ЭКОНОМИКА 1992
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ Том 28, вып. 4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ И АДАПТИВНЫХ СВОЙСТВ СТАТИЧЕСКОГО МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ

Ястремский А.И.

(Киев)

Рассматривается опыт использования специализированных стохастических межотраслевых моделей в вероятностно-адаптивном анализе МОБ при случайных коэффициентах прямых затрат. Приводятся результаты экспериментальных расчетов.

Межотраслевому балансу (МОБ) как вероятностной системе посвящены исследования [1–10] и др. Цель данной работы – изложение результатов по построению, анализу и реализации специализированных межотраслевых моделей, учитывающих факторы неопределенности и стохастичности [11–14]. При этом одной из основных задач являлось определение зависимости ожидаемой эффективности межотраслевой системы от уровня неточности (неопределенности, разбросов) информации о коэффициентах прямых затрат и от степени адаптивности плана валовых выпусков.

В используемых далее моделях информация о случайных параметрах задается через функции распределения, т.е. рассматривается вид неопределенности, сводимый к вероятностной ситуации, которая необязательно трактуется статистически. В [15] обоснована возможность применения стохастических моделей при отсутствии статистического ансамбля с помощью концепции субъективной вероятности.

Хорошо известны такие методы подготовки исходной информации о коэффициентах прямых затрат для детерминированных моделей, как статистические [16, 17], техническое прогнозирование, экспертное экстраполирование, ассортиментные сдвиги, RAS, технико-экономическое проектирование [18, 19]. Их анализ показывает, что при должном переосмыслении и модификации эти методы могут быть использованы для информационного обеспечения и стохастических моделей, если их (методы) дополнить концепциями объективной и субъективной вероятностей, имитационным моделированием, принципе максимума неопределенности, экспертными оценками, причем принимая во внимание специфику прямых вероятностных методов [11].

Далее описываются результаты компьютерного анализа стохастических межотраслевых моделей, основанного, во-первых, на априорном задании функции распределения случайных коэффициентов прямых затрат, которая соответствует принципу максимума неопределенности [15] и, во-вторых, на гибком варьировании параметров, характеризующих степень точности задания коэффициентов. Безусловно, возможности стохастических моделей не исчерпываются данным конкретным прагматическим подходом к информационному обеспечению.

1. О ПОСТАНОВКАХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Случайность коэффициентов прямых затрат требует переосмысления традиционной схемы "затраты – выпуск", описываемой системой балансовых соотношений

$$x = Ax + y, \tag{1}$$

где A – матрица прямых затрат; x, y – векторы валовых и конечных выпусков.

Обозначим через $A(\omega)$ случайную матрицу прямых затрат, где ω – элементарное событие некоторого вероятностного пространства. При детерминированном векторе валовых выпусков x конечная продукция описывается случайным вектором $x-A(\omega)x$. Рассмотрим постановку, которая заключается в выборе вектора x, удовлетворяющего ресурсным ограничениям и максимизирующего ожидаемое значение (математическое ожидание) конечного продукта в заданных пропорциях, т.е.

$$F(x) = Mz(x, \omega) \to \max, \tag{2}$$

$$z(x, \omega) = \arg\max_{z} \{z : x \geqslant A(\omega)x + \alpha z\}, \tag{3}$$

$$Rx \leqslant r, \quad x \geqslant 0, \tag{4}$$

где R – матрица удельных затрат ресурсов; r – вектор ресурсов; α – вектор удельных весов конечной продукции каждого вида в общем объеме конечной продукции; $z(x, \omega)$ – общий объем конечной продукции в заданных пропорциях; $\arg\max_{z}$ означает, что оптимизация в (3) производится по переменной z.

Заметим, что при $\alpha_i > 0 \ \forall_i$

$$z(x, \omega) = \min_i \frac{1}{\alpha_i} [x - A(\omega)x]_i,$$

и модель (2) – (4) – формально двухэтапная задача стохастического программирования – сводится к одноэтапной

$$F(x) = M \min_i \frac{1}{\alpha_i} [x - A(\omega)x]_i \to \max, \quad Rx \leqslant r, \quad x \geqslant 0. \tag{5}$$

В (2) – (4) на первом этапе (до наблюдения действительных реализаций матрицы $A(\omega)$) выбирается план валовых выпусков, а после наблюдения – величина общего объема конечного выпуска в заданных пропорциях, т.е. процесс получения и использования информации аналогично [11] можно изобразить в виде цепочки

$$\text{решение } (x) - \text{наблюдение } (\omega) - \text{решение } (z(x, \omega)). \tag{6}$$

В рамках предположений модели собственно план межотраслевой системы – валовые выпуски – выбирается независимо от изменений коэффициентов прямых затрат. Поэтому (2) – (4) можно назвать моделью с программно задаваемыми валовыми выпусками и адаптацией конечных выпусков. Подобная постановка изучалась в [12, 14]. В литературе имеются постановки (например, в [2–4, 7]), предполагающие, что валовые выпуски формируются после наблюдения над реализациями матрицы $A(\omega)$, т.е. выбор управляемых параметров происходит в соответствии со схемой

$$\text{наблюдение } (\omega) - \text{решение } ((x(\omega), z(\omega)). \tag{7}$$

Она эквивалентна решению при каждом ω задачи

$$z \underset{x, z}{\longrightarrow} \max, \quad x \geqslant A(\omega)x + \alpha z, \quad Rx \leqslant r, \quad x \geqslant 0, \tag{8}$$

где x, z под стрелкой показывают, по каким переменным производится оптимизация. Соотношения (8) при фиксированном ω являются межотраслевой моделью хорошо изученного типа [18].

Схемы (6), (7) и модели (2)–(4) и (8) соответствуют в некотором смысле крайним случаям: либо валовые выпуски принимаются полностью независимо от изменений коэффициентов прямых затрат, либо они максимально адаптированы к этим изменениям. Интерес представляет промежуточный случай: одна часть валовых выпусков выбирается до наблюдения ω, другая – после. Соответственно будем различать два отрезка всего планового периода: первый – до наблюдения над реализациями $A(\omega)$, второй – после. Каждый отрезок характеризуется своей величиной ресурсов, которая зависит от его длительности.

Сформулируем содержательную постановку модели: необходимо выбрать такие валовые выпуски, удовлетворяющие ресурсным ограничениям на первом отрезке, чтобы максимизировать ожидаемое значение суммарного конечного продукта за весь период при условии, что на втором его отрезке эти выпуски выбираются наилучшим образом с точки зрения величины конечного продукта в заданных пропорциях для каждой реализации интенсивностей межотраслевых потоков.

Введем обозначения: r_1, r_2 – векторы ресурсов, соответствующие первому и второму отрезкам; x, Δx – валовые выпуски на первом и втором отрезках. Пусть для первого отрезка выбран вектор валовых выпусков x и после момента наблюдения стали известными реализации матрицы $A(\omega)$, а тем самым конечные выпуски: $x - A(\omega)x$. Для второго отрезка решается задача

$$z \underset{\Delta x,\, z}{\longrightarrow} \max,\ (E - A(\omega))(x + \Delta x) \geqslant \alpha z,\ R\Delta x \leqslant r_2,\ \Delta x \geqslant 0. \tag{9}$$

обозначим через $(\Delta x(x, \omega), z(x, \omega)) = \arg\max$ (9).

Тогда задача первого этапа состоит в выборе такого вектора валовых выпусков для первого отрезка планового периода, который удовлетворял бы условиям

$$F(x) = Mz(x, \omega) \to \max,\ Rx \leqslant r,\ x \geqslant 0. \tag{10}$$

Изучение этих моделей как стохастических позволяет получить качественно новую экономическую информацию по сравнению с детерминированными межотраслевыми моделями, дать ее содержательное истолкование и математическое обоснование эффектов, обнаруженных экспериментально.

2. ВЛИЯНИЕ ТОЧНОСТИ ИНФОРМАЦИИ ОБ ИНТЕНСИВНОСТЯХ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ ПОТОКОВ НА ОЖИДАЕМУЮ ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Подготовка информации о плановых коэффициентах затрат – дорогостоящая процедура. Например, по данным [20], расходы, приходящиеся на одну клеточку МОБ США за 1947 г., составляли 37,5 долл., в 1958 – 152, а в 1963 г. – 200 долл. Возникает проблема оценки влияния точности определения коэффициентов прямых затрат на ожидаемую эффективность. Детерминированные модели не дают возможности исследовать ее конструктивно, поскольку не формализуют понятие точности. Если же коэффициенты случайны, то одним из пригодных для этого показателей является, например, величина дисперсии $a_{ij}(\omega)$. Очевидно, что при изменении параметров распределения коэффициентов $a_{ij}(\omega)$ меняются решения сформулированных стохастических моделей МОБ. Это и позволяет уловить воздействие параметров на ожидаемую эффективность.

Реализация идеи на материале модели с программно задаваемыми валовыми выпусками состоит в нахождении зависимости $\varphi(\sigma) = F(x(\sigma), \sigma)$, где $x(\sigma) = \arg\max_x \{F(x, \sigma) = Mz(x, \sigma, \omega): Rx \leqslant r.\ x \geqslant 0\}$, $z(x, \sigma, \omega) = \arg\max_z \{z : x \geqslant A(\omega, \sigma)x + \alpha z\}$.

Методика расчетов требует, во-первых, табулирования зависимости $\varphi(\sigma)$ при различных σ, причем приближение к $x(\sigma)$ находится с помощью методов стохастических квазиградиентов [11, 21], и, во-вторых, приближенного подсчета с помощью метода статистических испытаний ожидаемой эффективности межотраслевой системы.

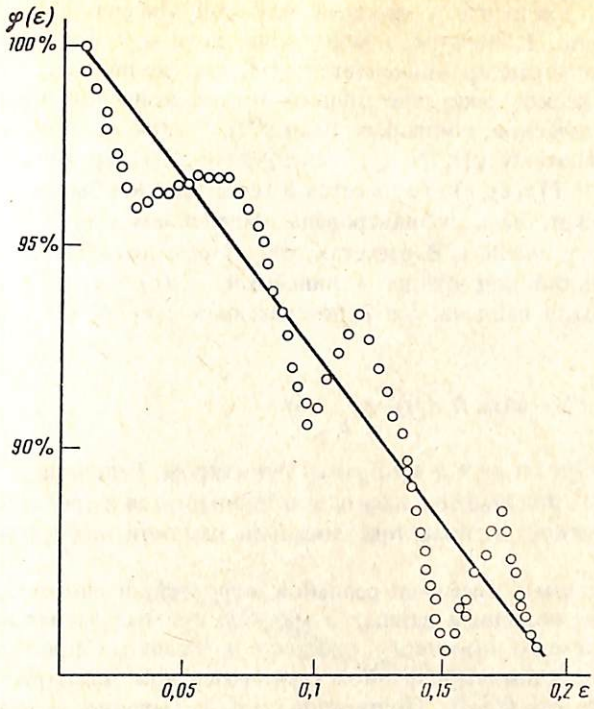

Рис. 1. Зависимость ожидаемой эффективности межотраслевой системы от уровня точности определения коэффициентов прямых затрат (в % к эффективности при нулевом разбросе)

Таким образом, экспериментальное определение указанной зависимости сводится к вычислению

$$F(x(\sigma), \sigma) = Mz(x(\sigma), \sigma) \approx \frac{1}{Q} \sum_{s=1}^{Q} z(x^N(\sigma), \sigma, \omega^s),$$

для $\sigma = \sigma_1, \ldots, \sigma_L$, где $x^N(\sigma)$ – приближение на N-й итерации метода стохастических квазиградиентов к оптимальному плану $x(\sigma)$, зависимому от уровня точности информации σ; Q – достаточно большое количество испытаний метода статистических испытаний; ω^s – независимое наблюдение над случайными параметрами в испытании s.

Для численного решения этой задачи разработаны специальный алгоритм и программное средство [22], реализующие общий метод стохастической линеаризации [11] при специфических ограничениях. С помощью модели (2)–(4) был проведен ряд расчетов по информации МОБ разных стран при различной степени детализации. Согласно простейшей гипотезе каждый коэффициент матрицы прямых затрат предполагался равномерно распределенным на интервале $[(1 - \epsilon_{ij})a_{ij}, (1 + \epsilon_{ij})a_{ij}]$, где a_{ij} – среднеожидаемое значение коэффициента; ϵ_{ij} – относительный разброс; ϵ_{ij} можно интерпретировать как меру точности определения коэффициентов a_{ij}. Поэтому принятая гипотеза давала возможность оперативного варьирования интервалов изменения различных коэффициентов

Если считать, что все величины ϵ_{ij} одинаковы, то при принятой гипотезе о равномерности распределения случайных коэффициентов прямых затрат в качестве параметра σ, характеризующего разброс, а следовательно, и моделирующего точность, выступает величина $\epsilon = \epsilon_{ij}$. На рис. 1 сплошной линией изображена экспериментально полученная зависимость $\varphi(\epsilon, N, Q) = 1/Q \sum_{s=1}^{Q} z(x^N(\epsilon)\epsilon, \omega^s)$, которая является приближением к $F(x(\epsilon), \epsilon)$. Заметим, что при $N, Q \to \infty$, $\varphi(\epsilon, N, Q) \to F(x(\epsilon), \epsilon)$.

Очевидно, при прочих равных условиях, планирование на основе более точной ин-

формации должно приносить в среднем больший эффект. Между тем зависимость, изображенная на рис. 1, не строго монотонна, хотя и имеет устойчивую тенденцию к этому. Такой ее характер объясняется тем, что, во-первых, приближенно подсчитывается математическое ожидание общего объема конечной продукции его заменой на среднее арифметическое, во-вторых, план $x^N(\epsilon)$ — также лишь приближение к оптимальному плану, поэтому $\varphi(\epsilon, N, Q)$ следует интерпретировать статистически. Но поскольку $\varphi(\epsilon, N, Q) \to F(x(\epsilon), \epsilon)$, то имеется и тенденция к убыванию $\varphi(\epsilon, N, Q)$ при увеличении ϵ. Она может быть отфильтрована выделением тренда с помощью корреляционно-регрессивного анализа. В расчетах, результаты которых изображены на рис. 1, рассмотрен простейший вид тренда — линейный — $q(\epsilon) = a\epsilon + b$. С помощью метода наименьших квадратов найдены a и b по значениям $\varphi(\epsilon_1, N, Q), \ldots, \varphi(\epsilon_K, N, Q)$ таким образом, чтобы

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^{K} (a\epsilon_i + b - \varphi(\epsilon_i, N, Q))^2 \longrightarrow \min_{a,\, b}.$$

Линейный тренд $q(\epsilon) = a\epsilon + b$ изображен пунктиром. Величина a — угловой коэффициент прямой $q(\epsilon)$ — показывает, насколько уменьшается в среднем ожидаемая эффективность межотраслевой системы при снижении точности информации о коэффициентах прямых затрат.

Расчеты по различным массивам реальной информации свидетельствуют о том, что увеличение точности исходных данных о матрице прямых затрат на 1% эквивалентно приращению ожидаемого конечного продукта в заданных пропорциях примерно на 0,5—0,8%. Например, для укрупненной семиотраслевой межотраслевой модели [23] эта величина составила 0,68%. Подчеркнем, что изменение эффективности происходит при неизменном среднем уровне коэффициентов, поэтому значение a существенно и можно его трактовать как своеобразную плату за точность информации. Но в силу специфики модели оценка платы несколько завышена и главным образом за счет того, что валовые выпуски выбираются с помощью программ, а программное планирование без достаточно развитых адаптационных механизмов в условиях неопределенности малоэффективно. Следовательно, при этом эффективность уменьшения степени неопределенности преувеличивается. На практике в некоторых пределах (может быть, не всегда осознанно) адаптивно определяются не только конечные, но и валовые выпуски.

Тем не менее показатель a можно полагать степенью уменьшения эффективности программного планирования при увеличении разбросов параметров. Он аккумулирует в себе плату и за неточность информации, и за жесткость, программность валовых выпусков. Разделить эффект по этим составляющим можно с помощью моделей, в которых валовые выпуски выбираются отчасти в зависимости от коэффициентов прямых затрат.

Возможны другие способы варьирования параметров, управляющих величинами разбросов интенсивностей межотраслевых потоков.

Рассмотрим преобразование $A(\omega, q) = qA(\omega) + (1 - q)MA(\omega)$, $0 \leqslant q \leqslant 1$, сохраняющее математическое ожидание матрицы $A(\omega)$ и уменьшающее при $q < 1$ дисперсию. Очевидно, функция

$$\varphi(q) = F(x(q), q) = \max_{\substack{Rx \leqslant r \\ x \geqslant 0}} Mz(x, q, \omega),$$

$$z(x, q, \omega) = \arg\max_{z} \{z : x \geqslant A(\omega, q)x + \alpha z\}$$

также будет характеризовать зависимость ожидаемой эффективности национальной экономики от степени разбросов коэффициентов прямых затрат.

Методика приближенного табулирования функции $\varphi(q)$ не отличается от $\varphi(\epsilon)$. На рис. 2 изображена экспериментально полученная зависимость $\varphi(q)$ по информации МОБ Эстонии в разрезе 15 отраслей. В качестве $A(\omega)$ выбрана случайная матрица, равномер-

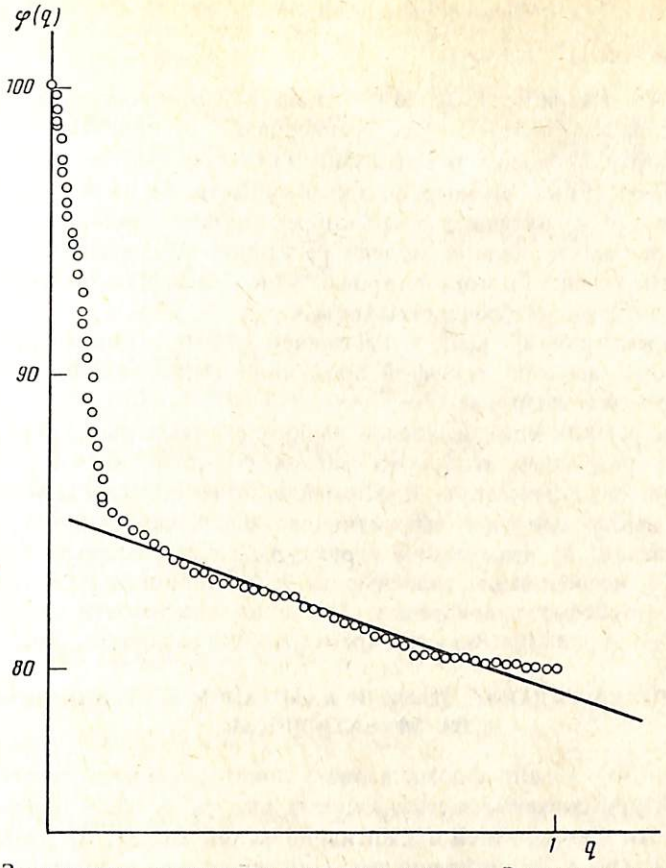

Рис. 2. Зависимость ожидаемого конечного продукта Эстонии от уровня точности определения коэффициентов прямых затрат (в % к уровню эффективности при нулевом разбросе)

но распределенная в матричном интервале $[A, \bar{A}]$, который задавался экспертно из соображений минимально и максимально возможных значений коэффициентов прямых затрат.

Результаты численных расчетов могут быть полезны при оценке эффективности мероприятий по подготовке исходной информации о коэффициентах прямых затрат для МОБ, в частности при решении такой важной проблемы балансовых построений, как оценка степени "важности" коэффициентов прямых затрат. Анализ расчетов по стохастической межотраслевой модели с программными валовыми выпусками экспериментально подтвердил влияние на эффективность моделируемой системы разбросов случайных удельных выпусков.

3. ОБ АДАПТАЦИИ ВАЛОВЫХ ВЫПУСКОВ В МЕЖОТРАСЛЕВОМ БАЛАНСЕ

Существенное допущение модели с программно задаваемыми валовыми выпусками — независимость последних от изменений матрицы прямых затрат. Между тем в практике использования МОБ корректировка валовых выпусков вследствие изменения неуправляемых параметров -- явление, весьма распространенное, поскольку оно повышает сбалансированность планов межотраслевых систем. В соответствии с [20]

корректировка валовых и конечных выпусков происходит по формулам типа

$$x + \Delta x = (E - A - \Delta A)^{-1}(y + \Delta y), \tag{11}$$

где ΔA – изменения матрицы A; Δx, Δy – изменения валовых и конечных выпусков.

Развитием способа корректировки по уравнениям (11) является использование стохастической межотраслевой модели с адаптацией валовых выпусков (9) – (10). По сравнению с (11) модель (9) – (10) имеет ряд преимуществ: 1) выбор x с учетом будущих изменений матрицы A и связанной с ней корректировкой (адаптацией) валовых выпусков; 2) учет в рамках единой модели ресурсной обеспеченности как вектора x, так и его корректировки; 3) корректировка валовых выпусков выбирается наилучшим образом для каждого изменения матрицы A.

Термину "корректировка" [20] в настоящей работе соответствует "адаптация". Случайное изменение вектора конечной продукции также можно учитывать в (9) – (10), полагая вектор α зависимым от ω.

Рассмотрение в рамках единой модели выбора валовых выпусков и их адаптации позволяет решить ряд задач экономико-математического анализа МОБ и получить качественно новую экономическую информацию о межотраслевых системах. Среди таких задач: 1) выбор наиболее эффективного плана валовых выпусков с учетом его будущей адаптации к изменениям структуры межотраслевых потоков и конечного продукта; 2) исследование зависимости эффективности межотраслевых систем от возможностей (степени) ее адаптации; 3) анализ зависимости эффективности межотраслевых систем от уровня разбросов параметров при различных степенях адаптации.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СТЕПЕНИ АДАПТАЦИИ И ЕЕ ВЛИЯНИЯ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ

В рамках (9) – (10) можно формализовать понятие степени адаптивности. Будем называть вектор x программной частью валовых выпусков; Δx – адаптивной. Очевидно, что возможности программной и адаптивной частей зависят от соотношений ресурсов r_1 и r_2. Чем больше r_2 по сравнению с r_1, тем большими ресурсами обеспечена адаптивная часть валовых выпусков по сравнению с программной. Обобщающая характеристика степени адаптивности и степени программности возможна, если исходить из простых гипотез, которые могут быть впоследствии существенно дополнены по мере накопления конкретной информации и результатов экономико-математического моделирования.

Пусть ресурсы, выделяемые на реализацию программной и адаптивной частей, постоянны, т.е. $r_1 + r_2 = r$, где r – ресурсы на весь плановый период. Распределение каждого вида ресурса для программной и адаптивной частей задается величиной $\tau \in [0, 1]$ как $r_1 = \tau r$, $r_2 = (1 - \tau)r$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. В этом случае τ можно интерпретировать как степень п р о г р а м м н о с т и, а $1 - \tau$ – степень а д а п т и в н о с т и.

Рассмотрим задачу

$$f(x, \tau) = Mz(\tau, x, \omega) \underset{x}{\to} \max, \quad Rx \leqslant \tau r, \quad x \geqslant 0,$$

$$(\Delta x(\tau, x, \omega),\ z(\tau, x, \omega)) = \arg\max_{\Delta x, z} \{ z : (E - A(\omega))(x + \Delta x) \geqslant \alpha z,$$

$$\Delta x \geqslant 0, \quad R\Delta x \leqslant (1 - \tau)r \}. \tag{12}$$

Обозначим ее решение $x(\tau)$. Изучим поведение функции $\psi(\tau) = f(x(\tau), \tau)$, которая моделирует зависимость ожидаемой эффективности от степени программности. Аналогично трактуется функция $\chi(1 - \tau) = \psi(\tau)$, которая увязывает ожидаемую эффективность со степенью адаптивности. Степень программности τ можно связать с временными характеристиками процесса получения уточненной информации о матрице прямых затрат. Если считать, что ресурсы, приходящиеся на некоторый отрезок временного периода, пропорциональны его длительности, то τ интерпретируется как момент получения информации о реализациях $A(\omega)$ и начала адаптации валовых выпусков. Следова-

тельно, $\psi(\tau)$ – зависимость ожидаемой эффективности межотраслевой системы (с точки зрения общего объема конечной продукции в заданной структуре) от момента начала адаптации валовых выпусков.

Интуитивно ясно, что "оттягивание" момента получения и использования информации для адаптации снижает эффективность системы. Но это можно и строго обосновать. Докажем, что $\psi(\tau)$ монотонно не возрастает. Пусть $\tau' > \tau$. Введем множества

$$V(x, \tau, \omega) = \{(\Delta x, z) : (E - A(\omega))(x + \Delta x) \geqslant \alpha z, \quad R\Delta x \leqslant (1 - \tau)r, \Delta x \geqslant 0\},$$

$$V'(x, \tau, \omega) = \{(\Delta' x, \Delta'' x, z) : (E - A(\omega))(x + \Delta' x + \Delta'' x) \geqslant \alpha z,$$

$$R(\Delta' x + \Delta'' x) \leqslant (1 - \tau)r, \quad \Delta' x, \Delta'' x \geqslant 0\},$$

$$W(x, \tau, \tau', \omega) = \{(\Delta' x, \Delta'' x, z) : (E - A(\omega))(x + \Delta' x + \Delta'' x) \geqslant \alpha z,$$

$$R\Delta' x \leqslant (1 - \tau')r, \; R\Delta'' x \leqslant (\tau' - \tau)r, \; \Delta' x, \quad \Delta'' x \geqslant 0\},$$

$$W'(x, \Delta'' x, \tau', \omega) = \{(\Delta' x, z) : (\Delta' x, \Delta'' x, z) \in W(x, \tau, \tau', \omega)\}.$$

Очевидна следующая цепочка равенств и неравенств

$$\psi(\tau) = \max_{\substack{Rx \leqslant \tau r \\ x \geqslant 0}} M\max\{z : (\Delta x, z) \in V(x, \tau, \omega)\} =$$

$$= \max_{\substack{Rx \leqslant \tau r \\ x \geqslant 0}} M\max\{z : (\Delta' x, \Delta'' x, z) \in V'(x, \tau, \omega)\} =$$

$$= \max_{\substack{Rx = \tau r \\ x \geqslant 0}} M\max\{z : (\Delta' x, \Delta'' x, z) \in W(x, \tau, \tau', \omega)\} \geqslant$$

$$\geqslant \max_{\substack{Rx \geqslant \tau r \\ x \geqslant 0}} M\max\{z : (\Delta' x, z) \in W'(x, \Delta'' x, \tau', \omega)\}. \qquad (13)$$

Последнее неравенство справедливо для детерминированных $\Delta'' x \geqslant 0$, таких, что $R\Delta'' x \leqslant (\tau' - \tau)r$.

Поскольку для тех же $W'(x, \Delta'' x, \tau', \omega) = V(x + \Delta'' x, \tau', \omega)$, из (13) следует

$$\psi(\tau) \geqslant \max_{\substack{Rx \leqslant \tau r \\ R\Delta'' x \leqslant (\tau' - \tau)r \\ x, \Delta'' x \geqslant 0}} M\max\{z : (\Delta' x, z) \in V(x + \Delta'' x, \tau', \omega)\} =$$

$$= \max_{\substack{R(x + \Delta'' x) \leqslant \tau' r \\ x, \Delta'' x \geqslant 0}} M\max\{z : (\Delta' x, z) \in V(x + \Delta'' x, \tau', \omega)\} =$$

$$= \max_{\substack{Rx \leqslant \tau' r \\ x \geqslant 0}} M\max\{z : (\Delta' x, z) \in V(x, \tau', \omega)\} = \psi(\tau'),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, $\max\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} \psi(\tau) = \psi(0)$, $\min\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} \psi(\tau) = \psi(0)$, т.е. максимальная ожидаемая эффективность будет достигаться при минимальной степени программности или максимальной – адаптивности, либо, наоборот, при максимальной степени программности или минимальной адаптивности ожидаемая эффективность минимальна.

При $\tau = 1$ задача (12) превращается в модель с программными выпусками, для которой ожидаемая эффективность оценивается численно, а при $\tau = 0$ (12) сводится к решению при каждом ω задачи

$$z \underset{x, z}{\longrightarrow} \max, \; x \geqslant A(\omega)x + \alpha z, \; Rx \leqslant r, x \geqslant 0. \qquad (14)$$

Следовательно, $\psi(0)$ можно оценивать с помощью метода статистических испытаний

$$\psi(0) \approx \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N} z(\omega^s), \qquad (15)$$

где $(x(\omega), z(\omega)) = \arg\max(14)$; N – достаточно большое количество испытаний.

Заметим, что многократное решение задачи (14) не требует привлечения общих методов линейного программирования. Если $A(\omega)$ $\forall\omega$ обладает свойством продуктивности (что для ряда распределений $A(\omega)$ можно гарантировать), то в силу свойств оптимизационных моделей МОБ [18] $x(\omega) = (E - A(\omega))^{-1}\alpha z(\omega)$, где $z(\omega) = \min\limits_{k}(r_k / [R(E - A(\omega))^{-1}\alpha]_k)$. Таким образом, для оценки $\psi(0)$ в соответствии с (15) необходимо N раз обращать матрицу $E - A(\omega)$. Это вполне приемлемо, особенно при использовании специальных методов ее обращения, учитывающих специфику матриц МОБ.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Зависимость $\psi(\tau) = f(x/\tau), \tau)$ можно установить приближенно, решая при различных τ задачу (12), т.е. задачу двухэтапного стохастического программирования (например, методом стохастической линеаризации [11]), а затем подсчитывая с помощью метода статистических испытаний значение целевой функции.

Численный эксперимент, проведенный с использованием (12) по семиотраслевому МОБ [23], дал следующие приближения зависимостей ожидаемой эффективности от уровня программности при различных уровнях разброса матрицы прямых затрат. На рис. 3 изображены экспериментально полученные приближения $\widetilde{\psi}(\tau, \epsilon)$ к кривым $\psi(\tau, \epsilon)$ при различных ϵ, где

$$\psi(\tau, \epsilon) = f(x(\tau, \epsilon), \tau, \epsilon) = \max_{\substack{Rx \leqslant \tau r \\ x \geqslant 0}} Mz(\tau, \epsilon, x, \omega),$$

$$Rx(\tau, \epsilon) \leqslant \tau r, \quad x(\tau, \epsilon) \geqslant 0,$$

$$(\Delta x(\tau, \epsilon, x, \omega),\ z(\tau, \epsilon, x, \omega)) = \arg \max_{\Delta x, z} \{z : (E -$$

$$-A(\omega, \epsilon))(x + \Delta x) \geqslant \alpha z,\ R\Delta x \leqslant (1 - \tau)r,\ \Delta x \geqslant 0\}.$$

Здесь $A(\omega, \epsilon)$ — случайная матрица, равномерно распределенная на интервале $[A(1 - \epsilon), A(1 + \epsilon)]$;

$$\widetilde{\psi}(\tau, \epsilon) \approx \frac{1}{V} \sum_{s=1}^{V} z(\tau, \epsilon, x^N(\tau, \epsilon), \omega^s);$$

V — достаточно большое количество испытаний метода статистических испытаний; $x^N(\tau, \epsilon)$ — приближение к $x(\tau, \epsilon)$, полученное с помощью метода стохастической линеаризации за N итераций.

Заметим, что $\psi(\tau, \epsilon)|_{\epsilon=0} = \max\limits_{\substack{Rx \leqslant r,\ x \geqslant 0 \\ x \geqslant Ax + \alpha z}} z$, т.е. при детерминированной ситуации теряется различие между программной и адаптивной частями валовых выпусков.

Отметим следующие характерные черты установленных экспериментальных зависимостей:

1) вблизи точки $\tau = 0$ имеется участок, на котором $\widetilde{\psi}(\tau, \epsilon)$ не различаются для разных τ и ϵ. Это означает, что при достаточно высокой адаптивности уровень разбросов, а также просто их наличие для случайных параметров практически не влияет на ожидаемую эффективность межотраслевой системы,

2) величины $\widetilde{\psi}(\tau, \epsilon)$ при всех ϵ имеют пологие участки максимальной эффективности, причем чем меньше уровень разбросов, тем больше отдалена точка, с которой начинается снижение ожидаемой эффективности от точки $\tau = 0$. Содержательно это можно трактовать как необходимость большей степени адаптивности для компенсации увеличения неопределенности матрицы $A(\omega)$;

3) справедливо $\widetilde{\psi}(\tau, \epsilon_1) \geqslant \widetilde{\psi}(\tau, \epsilon_2)$ при $\epsilon_1 < \epsilon_2$, т.е. при любом уровне адаптивности рост уровня разбросов случайных параметров не приводит к возрастанию уровня эффективности;

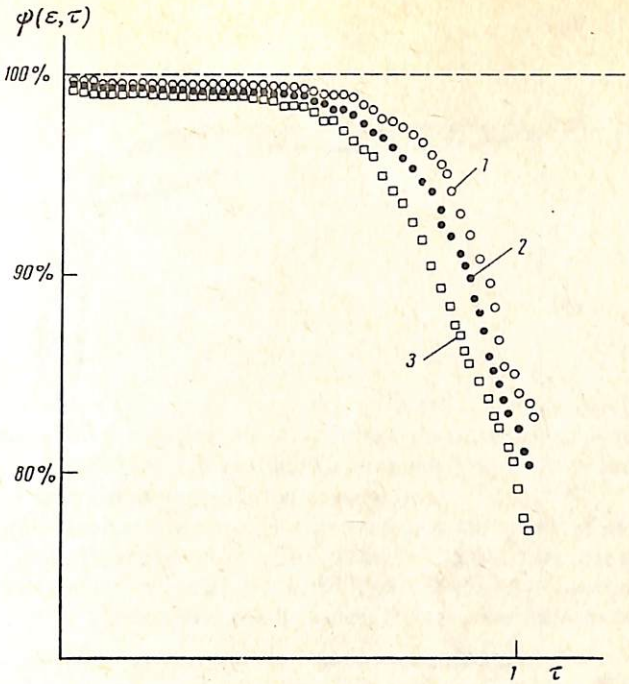

Рис. 3. Влияние степени жесткости плана валовых выпусков на ожидаемый конечный продукт бывшего СССР при различных уровнях разбросов коэффициентов прямых затрат: *1* – при $\epsilon = 0.1$; *2* – при $\epsilon = 0.2$; *3* – при $\epsilon = 0.3$

4) для $\epsilon_1 < \epsilon_2$ при увеличении τ возрастает $\tilde{\psi}(\tau, \epsilon_1) - \psi(\tau, \epsilon_2)$, т.е. при уменьшении степени адаптивности или повышении уровня программности растет цена более точной информации.

На рис. 4 отражены результаты расчетов по информации МОБ Эстонии в разрезе 15 отраслей. Вариация разбросов осуществлялась так же, как и при расчетах по модели с программными валовыми выпусками. Характерной чертой экспериментально полученных зависимостей является наличие пологого участка с почти неизменной средней эффективностью. Этот эффект (назовем его "эффектом плато") можно в некоторых случаях строго обосновать.

6. ОБОСНОВАНИЕ ЭФФЕКТА "ПЛАТО" ДЛЯ СЛУЧАЯ С ОДНИМ РЕСУРСОМ

Рассмотрим модель с адаптацией валовых выпусков, учитывающую один вид ресурсов (например, трудовые)

$$f(x, \tau) = Mz(\tau, x, \omega) \underset{x}{\rightarrow} \max, \quad tx \leqslant \tau L, \quad x \geqslant 0,$$

$$(\Delta x(\tau, x, \omega),\ z(\tau, x, \omega)) = \arg\max_{\Delta x, z} \{ z : (E -$$

$$- A(\omega))(x + \Delta x) \geqslant \alpha z, \quad t\Delta x \leqslant (1 - \tau)L, \quad \Delta x \geqslant 0 \}, \tag{16}$$

где t – вектор удельных затрат ресурса на выпуск валовой продукции; L – величина ресурса на весь период.

Если считать $\psi(\tau)$ функцией от L, то эта функция будет однородной. Поэтому в дальнейшем для сокращения записи задачу (16) будем рассматривать при $L = 1$.

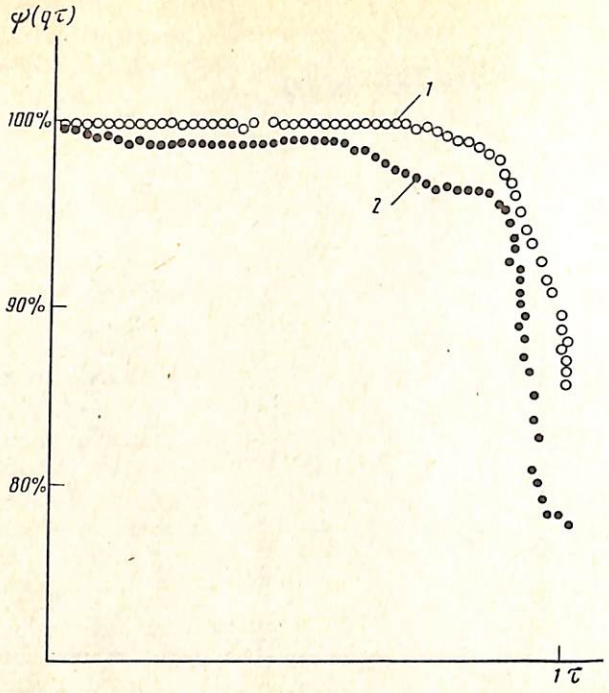

Рис. 4. Влияние степени жесткости валовых выпусков на ожидаемый конечный продукт Эстонии при различных уровнях разбросов коэффициентов прямых затрат: *1* – при $q = 0{,}1$; *2* – при $q = 1{,}0$

Утверждение. *Пусть с вероятностью единица* $A(\omega)$ – *продуктивная матрица* $t > 0$, $\alpha \geqslant 0$, *и для некоторого* $x^* \geqslant 0$ *выполняются*

$$tx^* = \tau, \tag{17}$$

$$x^* \leqslant B(\omega)\alpha \frac{1}{(t, B(\omega)\alpha} \tag{18}$$

с той же вероятностью. Тогда x^* *при данном* τ *будет решением задачи* (16).

Доказательство. Ранее было доказано, что $\psi(\tau_1) \geqslant \psi(\tau_2)$ при $\tau_1 < \tau_2$. Следовательно, $\psi(0) \geqslant \psi(\tau)\ \forall \tau \in [0, 1]$. Если удастся показать, что при некотором τ $f(x^*, \tau) = \psi(0)$, то тем самым будет гарантирована оптимальность x^* для задачи (16) при данном τ. Найдем

$$\psi(0) = Mz(x(\tau),\ \tau, \omega)|_{\tau=0}. \tag{19}$$

Очевидно, $z(x(\tau), \tau, \omega)|_{\tau=0} = z(\omega)$, где

$$(x(\omega),\ z(\omega)) = \arg\max_{x,\ z}\{z : x \geqslant A(\omega)x + \alpha z,\quad tx \leqslant 1,\quad x \geqslant 0\}.$$

Из предположения о продуктивности $A(\omega)$ и типичных свойств оптимизационных моделей межотраслевого баланса следует

$$z(\omega) = \frac{1}{(t, B(\omega)\alpha)}, \tag{20}$$

где $B(\omega) = (E - A(\omega))^{-1}$.

Рассмотрим

$$\Delta x(x^*, \omega) = B(\omega)\alpha \frac{1}{(t, B(\omega)\alpha)} - x^*. \tag{21}$$

Из (18) вытекает $\Delta x(x^*, \omega) \geqslant 0$ и в то же время

$$t\Delta x(x^*, \omega) = (t, B(\omega)\alpha \frac{1}{(t, B(\omega)\alpha)}) - tx^* = 1 - \tau. \tag{22}$$

Из (21) получаем

$$(E - A(\omega))(x^* + \Delta x(x^*, \omega)) = \alpha \frac{1}{(t, B(\omega)\alpha)}. \tag{23}$$

Сопоставление (20), (22), (23) и (17), (19) дает доказательство утверждения.

Аналогичное свойство нетрудно доказать и для модели с несколькими ресурсами, если дополнительно предположить устойчивость в некотором смысле набора дефицитных ресурсов для второго отрезка планового периода.

Утверждение описывает множество τ, при которых достигается максимальная ожидаемая эффективность. Поэтому (17), (18) можно использовать для оценок τ^*, при котором $\psi(\tau) = \psi(0)$, если $\tau \leqslant \tau^*$ и $\psi(\tau) < \psi(0)$ при $\tau > \tau^*$. Минимальное τ, при котором выполняются (17), (18), очевидно, равно нулю. Оценку максимального τ, т.е. τ^*, дает решение задачи

$$(t, x) \to \max, 0 \leqslant x \leqslant B(\omega)\alpha \frac{1}{(t, B(\omega)\alpha)} \text{ с вероятностью единица.}$$

Эту задачу можно заменить детерминированной

$$(t, x) \to \max, 0 \leqslant x_j \leqslant \operatorname{essinf} [B(\omega)\alpha]_j/(t, B(\omega)\alpha), \quad j = 1, n, ...,$$

где $\operatorname{ess\,inf} \xi = \sup\limits_c \{ c : \xi \geqslant c$ с вероятностью единица$\}$. Отсюда

$$\tau^* = \sum_j t_j \operatorname{ess\,inf} [B(\omega)\alpha]_j/(t, B(\omega)\alpha). \tag{24}$$

Эффект "плато" (наличие участка $[0, \tau^*]$, при котором $\psi(\tau) = \psi(0)$) будет наблюдаться, если $\tau^* > 0$. При выполнении матричного неравенства $A \leqslant A(\omega) \leqslant \bar{A}$ с вероятностью единица, где $\bar{A}$ – продуктивная матрица,

$$\tau^* > \tilde{\tau} = \frac{(t, (E - A)^{-1}\alpha)}{(t, (E - \bar{A})^{-1}\alpha)}. \tag{25}$$

Из (25) следует, что $\tau^* > 0$, поскольку $\tilde{\tau} > 0$; $\tilde{\tau}$ показывает отношение минимальных и максимальных полных трудовых затрат на производство единицы конечного продукта. Значение τ^* можно приближенно подсчитать с помощью метода статистических испытаний по формуле

$$\tau^* \approx tX, \quad X_j = \min_s [B(\omega^s)\alpha]_j/(t, B(\omega^s)\alpha). \tag{26}$$

Использование (24) – (26) позволяет существенно сократить количество точек табулирования τ для численного определения зависимости $\tilde{\psi}(\tau)$ либо перераспределить эти точки для более точного табулирования.

Сохраняя принципиальную схему расчетов и экономико-математического анализа, модель с адаптацией валовых выпусков можно существенно развить.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Березин С.А., Лавровский Б.Л., Рыбакова Т.А., Сатанова Э.А.* Фактор неопределенности в межотраслевых моделях. Новосибирск: Наука, 1983.
2. *Гирко В.Л., Смирнова В.В.* Асимптотические методы решения некоторых задач линейного стохастического программирования и моделей типа "затраты–выпуск". Киев: ИК АН УССР, 1983.
3. *Ершов Э.Б* Неопределенность информации и устойчивость решения статической модели планового межотраслевого баланса // Проблемы народнохозяйственного оптимума. 1969. Вып. 2.
4. *Максимов Ю.И.* Стохастическое моделирование в планировании. Новосибирск: Наука, 1981.
5. *Самознаев М.Д.* Фактор неопределенности и устойчивость решения народнохозяйственной межотраслевой модели // Экономика и мат. методы. 1979. Т. XV. Вып. 6.
6. *Сатанова Э.А.* Экспериментальное исследование вероятностной полудинамической модели межотраслевого баланса производственных мощностей // Проблемы моделирования народного хозяйства. Ч. III. Новосибирск, 1973.
7. *Смирнова В.В.* Методы решения некоторых стохастических задач типа "затраты–выпуск" и линейного программирования. Автореферат дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев: Киевский Гос. ун-т, 1984.
8. *Quandt R.E.* Probabilitic Errors in the Leontieff System // Naval Res. Logist. Quart. 1958. № 1.
9. *Mandelbrot B.* Variables et Processus Stochastiques de Pareto–Levi et la repartition des revenus // C.r. Acad. sci., 1959. № 5.
10. *Mandelbrot B.* Stable Paretion Random Function and the Multiplicative Variation of Income // Econometrica. 1961. V. 29. № 4.
11. *Ермольев Ю.М.* Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976.
12. *Ермольев Ю.М., Ястремский А.И.* Стохастические модели и методы в экономическом планировании. М.: Наука, 1979.
13. *Ястремский А.И.* Стохастические модели математической экономики. Киев: Вища школа, 1983.
14. *Ястремский А.И.* Оптимизация плановых решений в условиях неопределенности с использованием стохастических моделей и методов. – Автореферат дисс. ... доктора экон. наук. Киев: ИК АН УССР, 1987.
15. *Ефимов В.М., Спивак В.А.* О неопределенности и вероятности // Экономика и мат. методы. 1972. Т. VIII. Вып. 5.
16. *Боярский А.Я., Симакова Г.П.* Метод регрессии и коэффициенты материальных затрат // Проблемы межотраслевого баланса. М.: Статистика, 1971.
17. *Яременко Ю.В., Ершов Э.Б., Смышляев А.С.* Модель межотраслевых взаимодействий // Экономика и мат. методы. 1975. Т. XI. Вып. 3.
18. *Гранберг А.Г.* Математические модели социалистической экономики. М.: Экономика, 1978.
19. *Дадаян В.С.* Моделирование народнохозяйственных процессов. М.: Экономика, 1973.
20. *Архангельский Ю.С., Коваленко И.И.* Межотраслевой баланс. Киев: Вища школа, 1988.
21. *Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И.* Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука, 1987.
22. *Ястремский А.И., Головко В.И., Демковский А.Б.* Исследование влияния точности информации на эффективность межотраслевых систем с помощью стохастических межотраслевых моделей // Исследование операций и АСУ. 1983. № 22.
23. *Гранберг А.Г.* Моделирование социалистической экономики. М.: Экономика, 1988.

Поступила в редакцию
15 XI 1990