ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1992
Том 28, вып. 5-6

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

УЧЕТ РИСКА ПРИ УСТАНОВЛЕНИИ НОРМЫ ДИСКОНТА

Смоляк С.А.

(Москва)

Моделируется процесс получения дохода от функционирования предприятия с учетом и без учета риска. Показано, что оба расчета идентично оценят выгодность приобретения предприятия, если во втором использовать иную норму дисконта. Установлен не аддитивный и не мультипликативный характер влияния ряда случайных факторов на указанную норму.

Оценка эффективности инвестиций осуществляется в рыночной экономике обычно на основе расчета интегрального дисконтированного будущего дохода от инвестиций (этот подход применим для установления эффективности приобретения в собственность приватизируемого предприятия [1, 2]). Важный этап такого расчета – определение нормы дисконта E, с помощью которой соизмеряются разновременные расходы и доходы. Под нормой дисконта понимается ожидаемая норма отдачи на альтернативные и доступные на рынке инвестиционные возможности со сравнимым риском [1]. Исходя из этого инвесторы часто находят E путем суммирования нормы безрисковой отдачи ρ (например, нормы годового дохода по государственным ценным бумагам) и так называемой "премии за риск". Ниже предлагается вероятностная модель, позволяющая количественно и качественно отразить влияние факторов риска на норму дисконта, и показана невозможность агрегирования подобных факторов в некую аддитивную или мультипликативную добавку к "безрисковой" норме ρ.

Принимая решение о приобретении объекта и приспособлении его для ведения той или иной деятельности, предприниматель (покупатель) оценивает предстоящие доходы от функционирования объекта, общий (интегральный) дисконтированный доход и сопоставляет последний со своими интегральными дисконтированными капитальными вложениями [1, 2]. С точки зрения покупателя, процесс получения дохода от функционирования объекта можно охарактеризовать интенсивностью (скоростью) дохода $x(t)$. При этом доход, получаемый в достаточно малом интервале времени $(t, t+dt)$, составит $x(t)\,dt$. Будем считать известной интенсивность $x(0) = X$ в начале функционирования объекта (в момент $t = 0$). На дальнейшую динамику этого показателя влияют две группы факторов.

Существенное воздействие на величину дохода оказывает физический износ основных средств. Он является причиной роста затрат на содержание и ремонт зданий, сооружений и оборудования, снижения производительности оборудования (такое ухудшение частично компенсируется при проведении текущих и капитальных ремонтов, не меняя, однако, общей тенденции падения доходности). Пусть в зависимости от возраста основных средств доход уменьшается линейно

$$x(t) = X - bt. \tag{1}$$

Естественно считать, что объект целесообразно эксплуатировать до тех пор, пока доход от него неотрицателен, поэтому в конце срока службы объекта (в году T)

должно быть $x(T) = 0$, откуда

$$b = X/T, \quad X = bT. \tag{2}$$

Кроме того, на доход влияют различного рода случайные факторы, обусловливающие риск при использовании объекта для ведения определенной деятельности. Если бы их воздействие отсутствовало или было несущественным, то интегральный дисконтированный (при норме дисконта E) доход V от функционирования объекта можно было бы исчислить по формуле

$$V = \int_0^T x(t)\, e^{-Et} dt = \frac{X}{E} - \frac{b\,(1-e^{-ET})}{E^2}. \tag{3}$$

Рассмотрим три типа случайных факторов, влияющих на доходность объекта: случайные сбои в производстве; резкие изменения экономической среды ("катастрофы"); случайные колебания цен, налогов и объемов спроса. Чтобы адекватно отразить эти факторы в E, предлагается выполнить два расчета доходности приобретения объекта. В первом, использующем норму E, указанные факторы вообще не принимаются во внимание, а интегральный дисконтированный доход оценивается по (3). Во втором, опирающемся на "безрисковую" норму ρ, эти факторы включаются непосредственно в соответствующую модель случайного процесса изменения интенсивности дохода. Тогда значение нормы дисконта E, учитывающее факторы риска, целесообразно установить таким, чтобы оба варианта расчета оценивали эффективность функционирования объекта одинаково.

Реализация изложенного подхода требует более подробного моделирования рассматриваемых факторов.

Пусть в момент t объект характеризовался некоторой интенсивностью получения дохода $x(t)$. Тогда в течение следующего малого интервала времени dt либо произойдет "сбой" в производстве с вероятностью ωdt, либо объект будет функционировать "нормально" (с дополнительной вероятностью $1-\omega dt$). Если произошел "сбой", на его устранение потребуется некоторое время τ (будем предполагать эту величину малой, но не бесконечно малой) и дополнительные материальные затраты ζ, вообще говоря, случайные. Примем, что после этого производство возвращается к своему прежнему состоянию, т.е. "сбой" не уменьшает оставшегося срока службы объекта.

Наряду с рассматриваемым покупателем тот же вид деятельности осуществляется и другими предпринимателями. При этом кем-либо из них может быть разработан новый, более эффективный способ производства этой же продукции. Если подобный новый технологический способ производства достаточно эффективен, то цена на выпускаемую продукцию резко снизится. В связи с этим дальнейшее функционирование данного объекта уже не обеспечит дохода, что для предпринимателя окажется "экономической катастрофой". Аналогичная ситуация может сложиться, если существенно изменяется налоговое законодательство или политическая обстановка в регионе.

Предположим, что вероятность подобной "катастрофы" в интервале $(t, t + dt)$ равна κdt, где κ (интенсивность "катастроф") не зависит от t. Оценка вероятности подобных ситуаций может проводиться только экспертно с учетом результатов анализа темпов НТП в соответствующем производстве и прогноза экономической и политической ситуации. Поскольку величины κ и τ малы, "катастрофы" в период устранения последствий "сбоя" на производстве будем считать невозможными.

Наконец, на протяжении периода функционирования объекта цены на производимую продукцию и используемые для ее изготовления ресурсы, а также объемы спроса и налоговые ставки могут меняться. Под влиянием указанных факторов интенсивность получения дохода также будет случайно колебаться. Допустим, что при оценке эффективности приобретения объекта предприниматель правильно оценил средний размер дохода. Тогда колебания интенсивности $x(t)$, вызываемые рассматриваемой группой факторов, имеют нулевое математическое ожидание, но характеризуются некоторым разбросом. Представляется естественным, что в малом интервале времени случайное колебание $x(t)$ имеет малую дисперсию и не зависит от размера таких колебаний в предыдущие отрезки времени. Поэтому примем, что указанные колебания могут быть описаны моделью винеровского случайного процесса. Это означает, что интенсивности дохода в близкие моменты времени t и $t + dt$ связаны соотношением

$$x(t+dt) = x(t) + \sigma\, dw(t), \tag{4}$$

где $\omega(t)$ – "обычный" винеровский случайный процесс; σ – среднеквадратическое отклонение случайного колебания интенсивности дохода за единицу времени (средний квадрат таких колебаний за время dt будет при этом равен $\sigma^2 dt$).

Обозначим теперь через $V(x)$ среднее значение (математическое ожидание) интегрального дисконтированного дохода (при норме дисконта ρ) от эксплуатации объекта до (случайного) окончания срока его службы, исчисленное при условии, что в начальный момент производство функционировало "нормально" и интенсивность получения дохода была x. Очевидно, что $V(0) = 0$ (использовать объект с нулевым доходом нецелесообразно), поэтому достаточно рассмотреть случай $x > 0$. Заметим также, что при определении $V(x)$ неважно, какой именно момент времени принят в качестве начального; это позволяет дисконтировать доходы к моменту $t = 0$.

Рассмотрим малый интервал $(0, dt)$. Здесь возможны три ситуации.

1. С вероятностью ωdt произойдет "сбой" в производстве. На устранение его последствий потребуются (случайные) затраты, дисконтированная величина которых ζ. При этом производство "восстанавливается" через (случайное) время τ, после чего объект вновь окажется в исходном состоянии, которому отвечает математическое ожидание интегрального дисконтированного дохода $V(x)$. Однако таким будет указанный доход, если разновременные доходы приводятся к моменту полного устранения последствий "сбоя". Если же привести доходы к моменту $t = 0$, то величину $V(x)$ следует умножить на соответствующий дисконтирующий коэффициент $e^{-\rho\tau}$.

В предположении, что время устранения "сбоя" случайно и имеет экспоненциальное распределение со средним значением θ, математическое ожидание (M) дисконтирующего коэффициента равно

$$q = M_\tau e^{-\rho\tau} = \int_0^\infty e^{-\rho\tau} e^{-(\tau/\theta)} (d\tau/\theta) = 1/(1+\rho\theta). \tag{5}$$

Приняв, что дополнительные затраты в процессы устранения последствий "сбоя" осуществляются равномерно и их величина в единицу времени составляет z, найдем математическое ожидание дисконтированных затрат, связанных с одним "сбоем"

$$c = M_\tau [\zeta] = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\tau z e^{-\rho t} dt \right\} e^{-(\tau/\theta)} (d\tau/\theta) = z\theta/(1+\rho\theta) = zq\theta. \tag{6}$$

2. В рассматриваемом интервале времени с вероятностью κdt произойдет "экономическая катастрофа". В этом случае производство прекращается и, следовательно, интегральный дисконтированный доход от последующего функционирования объекта станет равным нулю.

3. В данном интервале времени с вероятностью $1-(\omega+\kappa)dt$ объект будет эксплуатироваться "нормально". Тогда за время dt доход составит xdt, после чего интенсивность его получения изменится на величину bdt за счет физического износа основных средств и (в соответствии с (4)) на $\sigma dw(t)$ под влиянием случайных колебаний цен и (или) налогов. Поэтому в момент времени dt объект будет характеризоваться интенсивностью дохода, равной $x-bdt + \sigma dw(t)$. Этому отвечает интегральный дисконти-

рованный (к моменту 0, а не dt) доход от последующего функционирования объекта, равный

$$V(x-bdt+\sigma\, dw(t))\, e^{-\rho dt}.$$

Учитывая вероятность каждой из рассмотренных ситуаций и то состояние, в котором оказывается объект после них, можно записать следующее выражение для математического ожидания интегрального дисконтированного дохода от функционирования объекта

$$V(x)=\omega dt M_{\zeta\tau}\,[-\zeta+e^{-\rho\tau}V(x)]\ +\kappa\, dt\times 0\ +$$
$$+\,[1-(\omega+\kappa)\,dt]\ M_\zeta\ [xdt+V(x-bdt+\sigma\, dw(t))\, e^{-\rho dt}].$$

С учетом обозначений (5), (6) это уравнение с точностью до малых выше первого порядка можно заменить следующим

$$V(x)=\omega dt\ [-c+qV(x)]\ +xdt\ +$$
$$+\,[1-(\omega+\kappa+\rho)\,dt]\ M_\zeta\ [V(x-bdt+\sigma\, dw(t)]. \tag{7}$$

Предположим, что функция V достаточно гладкая и при $x>0$ ее вторая производная $V''(\ddot{x})$ существует и непрерывна. Тогда, разложив последний сомножитель в (7) в ряд Тейлора и учитывая, что величина $dw(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию dt, найдем

$$V(x)=[-c+qV(x)]\ \omega\, dt+xdt+[1-(\omega+\kappa+\rho)\,dt]\ \times$$
$$\times\ [V(x)-bdtV'(x)+(\sigma^2/2)\,dtV''(\ddot{x})]\ +o\,(dt).$$

Отсюда получается уравнение

$$(\sigma^2/2)\ V''-bV'-\delta\, V+x-c\,\omega=0, \tag{8}$$

где

$$\delta=\rho+\kappa+(1-q)\,\omega. \tag{9}$$

Одно из решений такого уравнения – линейная функция

$$V_0(x)=(x-c\,\omega)/\delta-b/\delta^2. \tag{10}$$

Общее решение (8) поэтому можно представить как сумму $V_0\ (x)$ и решения однородного уравнения

$$(\sigma^2/2)\ V''-bV'-\delta\ V=0. \tag{11}$$

Очевидно, что (11) имеет два линейно независимых решения $-e^{\lambda x}$ и $e^{\mu x}$, где

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= -\ \{\sqrt{b^2+2\,\sigma^2\delta}-b\}/\sigma^2,\\ \mu &= \{\sqrt{b^2+2\,\sigma^2\delta}\ +b\}/\sigma^2\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

– корни соответствующего характеристического уравнения.

Таким образом, общее решение (8): $V(x)=V_0\ (x)+\mathrm{C}e^{-\lambda x}+C'e^{\mu x}$.

Из (12) видно, что $\mu>0>\lambda$, поэтому, если $C'\neq 0$, функция $V(x)$ при $x\to+\infty$ будет экспоненциально возрастать до $+\infty$ или экспоненциально убывать до $-\infty$. В то же время, поскольку траектории винеровского процесса не могут расти слишком сильно, сопоставление вероятностной модели с детерминированной (3) показывает, что при $x\to+\infty$ функция $V(x)$ положительна и растет не быстрее, чем x. Такая ситуация возможна, только если $C'=0$. При этом искомое решение имеет вид

$$V(x)=V_0(x)+Ce^{\lambda x}. \tag{13}$$

Использовав условие $V(0)=0$, получим, что $C=-V_0\ (0)$. Отсюда и из (10) вытекает следующее выражение для искомой функции $V(x)$

$$V(x)=x/\delta\ -(c\,\omega/\delta+b/\delta^2)\ [1-e^{\lambda x}]. \tag{14}$$

Значения нормы дисконта E, учитывающей факторы риска,

S	$\rho = 0{,}08$ $\delta = 0{,}1499$	$\rho = 0{,}10$ $\delta = 0{,}1698$	$\rho = 0{,}12$ $\delta = 0{,}1898$
		$T = 10$	
0,00	0,1626	0,1827	0,2028
	1,0850	1,0757	1,0684
0,05	0,1591	0,1795	0,2000
	1,0614	1,0571	1,0535
0,10	0,1496	0,1711	0,1924
	0,9982	1,0072	1,0136
0,15	0,1366	0,1594	0,1819
	0,9115	0,9386	0,9585
0,20	0,1224	0,1466	0,1703
	0,8164	0,8629	0,8972
0,25	0,1082	0,1337	0,1586
	0,7221	0,7875	0,8357
0,30	0,0950	0,1216	0,1475
	0,6366	0,7161	0,7770
0,35	0,0828	0,1105	0,1371
	0,5527	0,6504	0,7225
		$T = 20$	
0,00	0,1569	0,1771	0,1972
	1,0467	1,425	1,393
0,05	0,1554	0,1759	0,1964
	1,0371	1,0358	1,0346
0,10	0,1517	0,1729	0,1939
	1,0120	1,0179	1,0215
0,15	0,1467	0,1687	0,1903
	0,9789	0,9931	1,0026
0,20	0,1414	0,1640	0,1862
	0,9434	0,9657	0,9810
0,25	0,1362	0,1594	0,1820
	0,9089	0,9383	0,9588
0,30	0,1314	0,1550	0,1779
	0,8768	0,9124	0,9375
0,35	0,1270	0,1509	0,1741
	0,8476	0,8885	0,9175

В частности, математическое ожидание интегрального дисконтированного дохода от функционирования объекта от момента начала осуществления на нем соответствующей деятельности после приобретения его в собственность данного предпринимателя может быть рассчитано по (14) при $x = X$. Обратим внимание на то, что с увеличением σ показатель λ в этой формуле будет уменьшаться по абсолютной величине, приближаясь к нулю. Второй член в (14) также уменьшается, а значение $V(x)$ возрастает. Это означает, что случайные колебания дохода в среднем у в е л и ч и в а ю т интегральный доход предприятия. Такой неожиданный вывод можно объяснить тем, что при случайном положительном отклонении дохода средний оставшийся срок службы предприятия растет быстрее, чем он уменьшился бы при том же по величине, но отрицательном отклонении дохода. Ввиду важности этого факта ему следует дать и более строгое объяснение.

Вернемся к (3) и представим эту формулу в несколько ином виде, выразив срок (числитель) и отношения $f = E/\delta$ (знаменатель)

$\rho = 0{,}14$ $\delta = 0{,}2098$	$\rho = 0{,}16$ $\delta = 0{,}2297$	$\rho = 0{,}18$ $\delta = 0{,}2497$	$\rho = 0{,}20$ $\delta = 0{,}2697$
	$T = 10$		
0,2229	0,2430	0,2362	0,2833
1,0625	1,0578	1,0538	1,0505
0,2204	0,2408	0,2612	0,2815
1,0506	1,0480	1,0459	1,0440
0,2136	0,2347	0,2558	0,2767
1,0183	1,0217	1,0242	1,0260
0,2042	0,2262	0,2481	0,2698
0,9734	0,9848	0,9936	1,0004
0,1937	0,2167	0,2394	0,2618
0,9231	0,9430	0,9585	0,9707
0,1830	0,2068	0,2303	0,2534
0,8721	0,9002	0,9222	0,9397
0,1727	0,1973	0,2214	0,2451
0,8231	0,8587	0,8867	0,9090
0,1631	0,1883	0,2130	0,2372
0,7773	0,8196	0,8529	0,8795
	$T = 20$		
0,2175	0,2377	0,2580	0,2783
1,0368	1,0348	1,0331	1,0318
0,2168	0,2372	0,2576	0,2779
1,0335	1,0324	1,0315	1,0306
0,2148	0,2355	0,2562	0,2768
1,0238	1,0252	1,0260	1,0264
0,2117	0,2329	0,2539	0,2748
1,0091	1,0136	1,0168	1,0190
0,2080	0,2296	0,2510	0,2720
0,9917	0,9995	1,0051	1,0093
0,2042	0,2262	0,2478	0,2692
0,9735	0,9843	0,9922	0,9983
0,2005	0,2226	0,2445	0,2662
0,9556	0,9690	0,9792	0,9869
0,1969	0,2193	0,2413	0,2631
0,9386	0,9544	0,9664	0,9757

службы объекта через начальный доход X и скорость его падения b

$$V = \frac{X}{E} - \frac{b\,(1 - e^{-EX/b})}{E^2} = \varphi(X).$$

Полученная функция $\varphi(X)$ выпукла вниз и потому, в силу неравенства Иенсена, $M\,[\varphi(X)] > \varphi(M\,[X])$. Это означает, что если в некоторый момент времени к величине дохода сделана случайная добавка, в среднем равная нулю, а в дальнейшем процесс будет протекать детерминированно, то математическое ожидание интегрального дохода возрастет. Более того, если случайная добавка к доходу имеет нормальное распределение с нулевым средним, то при увеличении ее дисперсии превышение $M\,[\varphi(X)]$ над $\varphi(M\,[X])$ увеличится, а следовательно, будет расти и математическое ожидание интегрального дохода. Очевидно, такое же положение сложится и в ситуации, когда случайные добавки будут производиться не в какой-то один момент времени, а несколько раз или вообще непрерывно. Именно такой характер носит случайное изменение дохода, описываемое (4). Следовательно, влияние случайных колебаний дохода рассматриваемого типа увеличивает, а не уменьшает математическое ожидание интегрального дохода, причем тем больше, чем больше дисперсия этих колебаний.

Заметим, что при $\omega = \kappa = \sigma = 0$ и $\rho = E$ формула (14) переходит в (3), отвечающую детерминированной ситуации, поэтому естественно попытаться применить (3) для определения математического ожидания интегрального дохода в стохастическом случае, подобрав подходящую норму дисконта E.

Такое предложение может на первый взгляд показаться странным – зачем проводить расчет по одной, не очень точной формуле, когда можно использовать более точную другую? Учтем, однако, что реальная динамика дохода предприятия не всегда совпадает с линейной моделью (1). В этой ситуации предпринимателю удобнее ограничиться прогнозированием динамики среднего значения дохода, агрегировав всю имеющуюся у него информацию о влиянии случайных факторов в одном показателе. В развитых странах воздействие факторов риска и неопределенности учитывается именно путем надлежащего установления нормы дисконта [1] и излагаемый подход позволяет количественно и качественно охарактеризовать такое влияние.

Для того чтобы расчеты по (3) и (14) с нормами дисконта E и ρ давали одинаковые результаты, должно выполняться равенство

$$X/\delta - (c\omega/\delta + b/\delta^2)\,[1-e^{\lambda X}] = X/E - b\,(1-e^{-ET})/E^2. \tag{15}$$

Учитывая, что в силу (2) $b = X(T)$, и введя обозначения

$$c\omega/X = \gamma, \quad \delta\,(\sigma T/X)^2 = n, \quad \delta T = \alpha, \quad ET = \beta, \tag{16}$$

соотношение (15) можно записать иначе

$$\frac{\alpha-(1+\alpha\gamma)\,[1-e^{-2\alpha/(1+\sqrt{1+2n})}]}{\alpha^2} = \frac{\beta-1+e^{-\beta}}{\beta^2}. \tag{17}$$

Таким образом, для определения искомой нормы дисконта E необходимо вначале в соответствии с исходной информацией рассчитать параметры α, γ и n, затем найти β (решение уравнения (17)) и, наконец, вычислить E по формуле: $E = \beta/T = \delta\,(\beta/\alpha)$.

Иными словами, норма дисконта с учетом риска E отличается от δ корректирующим коэффициентом $f = \beta/\alpha$. Значения этого коэффициента, как легко видеть, зависят только от α, γ и n. Анализ (17) показывает, что в правой части стоит убывающая функция от β, а в левой – убывающая от γ и возрастающая от n, поэтому β будет расти с увеличением γ и уменьшаться с ростом n. Из этого следует, что норма E повышается при увеличении c или при уменьшении σ. Проанализировать влияние других исходных параметров на норму E сложнее. Можно, однако, доказать, что при положительных n и достаточно малых γ рост α приводит к возрастанию β и, следовательно, E.

Необходимо указать также следующий важный вывод из построенной модели. Норму E, исчисленную указанным способом, нельзя разложить ни в сумму "безрисковой" составляющей ρ и какой-либо добавки, учитывающей риск ("премии за риск") и не зависящей от ρ, ни в произведение этой составляющей и какого-либо повышающего коэффициента, учитывающего риск и не зависящего от ρ. Иными словами, влияние факторов риска и неопределенности на норму дисконта неаддитивно и немультипликативно.

Приведем условный пример расчета. За единицу измерения времени примем 1 год. Будем считать, что "сбои" в производстве возникают в среднем 1 раз в год: $\omega = 1$. При этом время устранения последствий "сбоя" имеет экспоненциальное распределение со средним значением $\theta = 0{,}04$ (примерно соответствует двум неделям).

Допустим, что затраты, связанные с устранением последствий "сбоя", пропорциональны затраченному на это времени, причем каждый день "сбоя" не только приводит к недополучению соответствующего дохода, но и требует дополнительных расходов, составляющих 50% от начального (обеспечиваемого в начале функционирования предприятия) дохода X. При сделанных предположениях из (5) и (6) находим $q = 1/(1+\rho\theta) = 1/(1+0{,}04\,\rho)$, $c = zq\theta = 0{,}02\,X/(1+0{,}04\,\rho)$.

Появление новых технологий, внедрение которых сделает данное производство убыточным, обычно мало вероятно. Если считать, что подобные "революции" в технологии происходят в среднем 3 раза в столетие, то можно принять $\kappa = 0{,}03$.

Сделанные предположения позволяют записать соотношения для параметров, входящих в (17)

$$\delta = \rho + 0{,}03 + 0{,}04\,\rho/(1+0{,}04\,\rho),$$

$$\gamma = c\,\omega/X = 0{,}02/(1+0{,}04\,\rho),$$

$$n = \delta\,(\sigma\,T/X)^2, \quad \alpha = \delta\,T, \quad \beta = \rho\,T.$$

В этом случае E будет зависеть только от ρ, T и отношения $s = \sigma/X$. При $T = 10$ и $T = 20$ рассчитанные значения E и отношения $f = E/\delta$ представлены в таблице (в числителе и знаменателе). Сопоставление значений E и ρ подтверждает сделанный вывод о неаддитивности и немультипликативности влияния факторов риска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методы оценки стоимости имущества приватизируемых предприятий. М.: МЕНАТЕП, 1991.
2. *Смоляк С.А., Погорельский А.Л.* Проблемы оценки имущества приватизируемых предприятий // Экономика и мат. методы. 1992. Т. 28. Вып. 2.

Поступила в редакцию
29 XII 91