РАВНОВЕСИЕ В ЭКОНОМИКЕ С ПЕРЕКРЫВАЮЩИМИСЯ ПОКОЛЕНИЯМИ

Данилов В.И.

(Москва)

Исследуются равновесия в моделях экономики со счетным числом участников и товаров. Типичный пример такой ситуации доставляют экономики с перекрывающимися поколениями. Существование конкурентных равновесий устанавливается при стандартных предположениях и дополнительных условиях конечности, которые выполняются в случае перекрывающихся поколений. Особое внимание уделяется правильному определению цен в такой бесконечной модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье рассматривается вопрос о существовании равновесий в моделях экономики с перекрывающимися поколениями с бесконечным дискретным временем, при этом в каждый момент имеется конечное число индивидов и каждый индивид "живет" конечное время. Иначе говоря, вместо экономики с фиксированным числом участников исследуется экономика популяции [1]. Это предполагает, что множество участников и товаров в данной модели счетно. Для многих вопросов явное задание временной структуры несущественно, и часто экономикой с перекрывающимися поколениями называют произвольную экономику со счетными множествами индивидов и товаров. Именно в такой постановке мы изучаем существование конкурентных равновесий. Однако предварительно хотелось бы кратко остановиться на развитии теории перекрывающихся поколений и ее месте в теории общего экономического равновесия.

Если общее равновесие отвечает на вопрос о ценах вообще, то теория перекрывающихся поколений занимается вопросом цены денег, т.е. процентом. Этой классической проблеме посвящено множество работ, и в частности [2]. В самых общих чертах ее идею можно выразить так. Каждый человек живет конечный период времени, в течение которого он получает поток однородного блага (условно называемого доходом); его потребление доставляет ему удовольствие. Разные люди получают различные потоки дохода и имеют неодинаковые предпочтения относительно потоков потребления, поэтому у них возникает желание обмениваться этими потоками. Скажем, сегодня я готов отдать часть дохода, чтобы завтра получить дополнительную. Такой обмен осуществляется с помощью системы цен между разновременными доходами, которые естественно называть процентом.

Следующая веха – модель Самуэльсона [3]. В ней предполагается, что люди живут два периода. Доход они получают в первый период (в молодости), но потребляют его не целиком, а передают часть живущим в это время старикам. Когда же они состарятся, новое поколение передаст им часть дохода. В [3] были выявлены две важные черты моделей с перекрывающимися поколениями, отличающие их от статических равновесных моделей: 1) неоптимальность в общем случае равновесных распределений; 2) необходимость введения денежных дотаций для реализации равновесия. Иначе говоря, естественные кандидаты на равновесие обладали тем свойством, что предложение некоторых товаров превышало спрос на них, хотя цена была ненулевой. Это явление увязывалось с ценой бумажных денег и отмечалось, что такое возможно именно благодаря бесконечности временно́го горизонта.

Из последующих работ хотелось бы упомянуть [1]. Отметим также, что в нашей стране имелась сильная школа экономической динамики, и многие ее представители подходили близко к тематике перекрывающихся поколений. Например, некоторые из них поняли, что равновесные траектории могут быть неоптимальными, и разработали критерии оптимальности (см. [4]). Хотя потребители в [4] живут один период, связь (перекрытие) поколений осуществляется за счет производства.

Настоящее слияние общеравновесного подхода с динамикой (да и сам термин "перекрывающиеся поколения") было осуществлено И. Баляско и К. Шеллом в серии статей [5, 6]. Они доказали существование равновесий и довольно глубоко исследовали условия оптимальности равновесных распределений, а также роль монетарной политики. Каждое поколение жило в их модели два периода, но это не слишком снижает общность.

В модели Баляско и Шелла динамика еще входила явно. Но уже начиная с [7] стало ясно, что в вопросах существования равновесий временно́-демографическая структура не используется и фактически речь идет о почти обычной модели равновесия со счетными множествами товаров и агентов. Автор [7] ориентировался на стандарты, достигнутые в [8, 9]. В частности, он допускал и бесконечно живущих агентов и привел пример, что в этом случае лучшее, на что можно рассчитывать, – это существование равновесий с субсидиями. Иначе говоря, некоторые участники могут тратить на потребление больше, чем позволяет их доход. Одна из целей настоящей работы – прояснить причину появления таких субсидий.

К сожалению, приведенное в [7] доказательство существования равновесия содержит пробелы. Фактически это показал Дж. Бурк [10], хотя он (как и другие авторы) нигде не отмечает, что его пример противоречит теореме Вильсона. Дальнейшее развитие моделей экономики с перекрывающимися поколениями освещено в обзоре [11].

Во всех предыдущих работах о перекрывающихся поколениях речь шла о моделях чистого обмена, без производства. Здесь возможны два объяснения: 1) для начала надо разобраться с более простой ситуацией чистого обмена; 2) производство не меняет существенно модель и ее свойства. Во всяком случае, мы явно вводим производство и изучаем существование (или несуществование) равновесий в этой ситуации.

Перейдем теперь к теме настоящей статьи. Как уже говорилось, чтобы гарантировать существование равновесий, приходится допускать превышение расходов над доходами, т.е. субсидии. Равновесия с субсидиями называются компенсированными, и они уже "всегда" существуют. Казалось бы, замена конкурентного равновесия компенсированным не является большим недостатком. Однако такой выход из положения не вполне удовлетворителен. Компенсированное равновесие подразумевает наличие некоего вспомогательного органа ("государства"), который назначает участникам субсидии. Какими соображениями он мог бы при этом руководствоваться? Теорема существования ответа на этот вопрос не дает. Конечно, аналогичный упрек возможен и по отношению к ценам, но в этом случае можно надеяться на механизм нащупывания, повышающего их уровень при нехватке товаров и понижающего его при избытке. А что делать с субсидиями? При малейшей неточности может нарушиться финансовый баланс, и тогда уж никакие цены не помогут прийти к равновесию. Как предотвратить такие злоупотребления? Кроме того, появляются проблемы со справедливостью. Пусть, к примеру, есть два совершенно одинаковых индивида; можно ли им давать одинаковые субсидии? Теорема существования ничего не говорит и об этом.

По нашему мнению, проблема субсидий возникает из-за не совсем удачной формулировки понятия равновесия и цены. Мы вводим более тонкое определение цены, учитывающее "поведение товарного набора на бесконечности", которое дает более правильную (и более высокую) оценку начального запаса. Эта оценка и оправдывает завышенное, на первый взгляд, потребление. Основной результат – теорема существования "правильных" равновесий в экономике с производством при тех же условиях, при которых доказано существование компенсированных равновесий.

Хотя наши результаты относятся к экономикам с производством, удобнее начать с более простого случая чистого обмена.

2. ЭКОНОМИКА ОБМЕНА

Пусть $\mathbf{L}$ – счетное множество "видов" товаров. Товарный набор – это элемент пространства $X = \mathbf{R}^{\mathbf{L}}$, т.е. семейство $x = (x^l, l \in \mathbf{L})$ чисел, указывающих количество товара вида l в наборе x (здесь неявно предполагается выбор единицы измерения товара l). Неотрицательный конус $\mathbf{R}^{\mathbf{L}}_{+}$ в векторном пространстве $\mathbf{R}^{\mathbf{L}}$ обозначается X^{+}. Носителем набора (или вектора) x называется множество $\operatorname{supp}(x) = \{ l \in \mathbf{L}, x^l \neq \neq 0 \}$. Для вектора x из X и подмножества товаров $\mathbf{S} \subset \mathbf{L}$ через $x_{\mathbf{S}}$ выражается проекция x на пространство $\mathbf{R}^{\mathbf{S}}$. Вектор вида $(1,1,...)$ записывается как $\mathbf{1}$; соответственно понимаются $\mathbf{1}_{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{1}_l$ для $\mathbf{S} \subset \mathbf{L}$ и $l \in \mathbf{L}$. Когда речь идет о топологии на X, то предполагается топология произведения; иначе говоря, речь идет о покоординатной сходимости векторов.

Далее, $\mathbf{I}$ – счетное множество индивидов или потребителей. Каждый индивид $i \in \in \mathbf{I}$ характеризуется: потребительским множеством X_i, отношением предпочтения $\geqslant_i$ на X_i, и начальным набором товаров $\omega(i)$. Интуитивно потребительское множество состоит из тех потребительских наборов, которые нужны для выживания индивида. Предполагается, что начальные запасы достаточны для выживания, т.е. $\omega(i) \in X_i \; \forall \; \forall\, i \in \mathbf{I}$. Для простоты пока будем считать, что $X_i = X^{+}$. Отношения $\geqslant_i$ предполагаются слабыми порядками, т.е. транзитивными и полными бинарными отношениями на X_i. Символ $>_i$ используется для обозначения асимметричной части $\geqslant_i$, т.е. строгого отношения предпочтения.

Замечание. Может быть, здесь уместно сказать несколько слов о временной структуре, столь естественной при рассмотрении экономики с перекрывающимися поколениями. В самом общем виде она состоит в задании некоторого упорядоченного множества "моментов времени" $\mathbf{T}$ (обычно это $\mathbf{N} = \{ 1,2,... \}$, но можно брать произвольное дерево), отображения $\tau : \mathbf{L} \to \mathbf{T}$ и соответствия $S : \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{T}$. Отображение τ указывает, к какому моменту относится товар; при этом неявно предполагается, что товары скоропортящиеся. (Хранение товара можно рассматривать как разновидность производства.) $S(i)$ указывает моменты жизни индивида i. Естественно поэтому считать, что конечны следующие множества: а) $\tau^{-1}(t) \; \forall\, t \in \mathbf{T}$ (в каждый момент t имеется конечное число видов товара), б) $S(i) \; \forall\, i \in \mathbf{I}$ (индивид живет конечное время), и в) $S^{-1}(t) \; \forall\, t \in \mathbf{T}$ (в каждый момент живет конечное число индивидов). Естественно также предположить, что индивид может потреблять только те товары, которые существуют во время его жизни, т.е. товары из конечного множества $\mathbf{D}(i) = \tau^{-1}(S(i))$. Поэтому и предпочтения участника i должны зависеть только от ограничения потребительского набора x на $\mathbf{D}(i)$.

Экономика обмена состоит в перераспределении совокупного начального запаса между участниками.

Введем соответствующие понятия. *Совокупным начальным запасом* экономики называется бесконечная сумма $\omega(\mathbf{I}) := \Sigma_{i \in \mathbf{I}}\, \omega(i)$. Она понимается как предел в X конечных сумм $\omega(\mathbf{K}) := \Sigma_{i \in \mathbf{K}}\, \omega(i)$, где $\mathbf{K}$ пробегает конечные подмножества в $\mathbf{I}$. Здесь неявно предполагается, что этот предел существует, т.е. принадлежит X.

Распределением (в экономике обмена) называется семейство $(x(i), i \in \mathbf{I})$ элементов X, причем $x(i) \in X_i$. Распределение $x(\cdot)$ удобно понимать как меру (со значениями в X) на множестве $\mathbf{I}$, обозначая для коалиции $\mathbf{K} \subset \mathbf{I}$ через $x(\mathbf{K})$ сумму $\Sigma_{i \in \mathbf{K}} x(i)$. Распределение $x(\cdot)$ называется *допустимым*, если $x(\mathbf{I})$ равно совокупному начальному запасу $\omega(\mathbf{I})$. Каждый конкретный механизм обмена перерабатывает начальное распределение $\omega(\cdot)$ в некоторое допустимое конечное распределение. В дальнейшем мы ограничимся механизмом специального вида, называемым рынком, или рыночной системой.

3. РЫНОК

Перейдем к описанию рыночной системы. Центральную роль на рынке играет понятие цены. Цена p формирует для каждого индивида i его бюджетное множество $B_i(p)$, после чего каждый индивид выбирает в этом множестве наиболее привлекательный для него потребительский набор $x(i)$. В общем случае распределение $x(\cdot)$ не допустимо. Если все же $x(\cdot)$ допустимо, то говорят, что имеет место равновесие. Конкретизируем эту общую схему.

Нужно начать с понятия цены. На первый взгляд, ценой следовало бы считать линейный (и, быть может, непрерывный) функционал на X. Тогда бюджетное множество имеет вид : $B_i(p) = \{x \in X_i, \ p(x) \leqslant p(\omega(i))\}$.

Как минимум, это предполагает, что значение функционала p на любом векторе $x \in X$ конечно. Однако таких функционалов очень мало, поэтому приходится допустить и бесконечные значения для $p(x)$. Во всех известных нам работах ценой называется семейство $p = (p_l, l \in \mathrm{L})$ неотрицательных чисел p_l (цен товаров вида l), и мы временно будем использовать это определение. Стоимость $p(x)$ или px товарного набора x при таких ценах p – сумма бесконечного ряда $\Sigma_{l \in \mathrm{L}} p_l x_l$; разумеется, она может обращаться в бесконечность.

Теперь можно дать (предварительное) определение равновесия.

Определение. *Конкурентным равновесием* называется цена p и распределение $x(\cdot) = (x(i), i \in \mathbf{I})$ такие, что: а) для любого индивида i потребительский набор $x(i)$ – наилучший относительно предпочтения $\geqslant_i$ в бюджетном множестве $B_i(p)$, иначе говоря, $x(i)$ принадлежит $B_i(p)$, и $x(i) \geqslant_i x \ \ \forall x \in B_i(p)$; б) распределение $x(\cdot)$ допустимо, т.е. $\Sigma_i x(i) = \omega(\mathbf{I})$.

Наиболее важно здесь то, что для каждого участника существует единственное бюджетное ограничение. В рамках временно́й структуры это представляется нереалистичным. Все выглядит так, как если бы в начальный момент участники собрались вместе и приняли решения о своих потреблениях. Но ведь многие еще и не родились! Обычно здесь подразумевается достаточно полный рынок ценных бумаг, который может снять многие возражения, хотя, видимо, не все. Тем не менее мы принимаем в дальнейшем эту сквозную связь через цены всех товаров.

Конечно, для существования конкурентного равновесия нужны некоторые условия. Мы скажем об этом подробнее, когда введем в рассмотрение производство. Грубо говоря, это обычные требования выпуклости, непрерывности и монотонности, а также условие неприводимости. Однако, как мы увидим, даже этого недостаточно для существования конкурентных равновесий.

4. КОМПЕНСИРОВАННЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Начнем с одного поучительного примера (приведенного в [7]). Через ξ_l обозначается l-я координатная функция на X.

Пример 1. Здесь $\mathbf{I} = \{1, 2, ..\}$, $\mathbf{L} = \{1, 2, ...\}$. Участник i владеет товаром с номером i в количестве 2^{i-1}, так что $\omega(i) = 2^{i-1}\mathbf{1}_i$, а его полезность задается функцией $\xi_i + \xi_{i+1}$. Таким образом, он владеет своим товаром, но желает иметь еще и другой. Ясно, что начальное распределение равновесно относительно цен $p = (1, 1, ...)$ и это единственное равновесное распределение. Однако такое распределение не оптимально по Парето. В самом деле, оно мажорируется распределением: $x(1) = \mathbf{1}_1 + 2\mathbf{1}_2$, $x(i) = 2^i\mathbf{1}_{i+1}$ при $i \geqslant 2$.

Неоптимальность в данном случае связана с мощным потоком товаров "из бесконечности": участник 1 получает товар от участника 2; этот – от 3-го, и т.д. Это типичный эффект бесконечности. Заметим, что если стоимость $p\omega(\mathbf{I})$ совокупного начального запаса в равновесных ценах конечна, то равновесное распределение оптимально по Парето. Другие, более тонкие, условия оптимальности равновесных распределений можно найти в [5] и [11].

Добавим еще одного участника 0 с полезностью ξ_1 и начальным запасом $\omega(0) = (0, 1, 1, 1, ...)$. Чтобы ответ выглядел проще, изменим начальные запасы участников $i \geqslant 1$, полагая $\omega(i) = (2^{i-1} + 1)\mathbf{1}_i$ и оставляя предпочтения неизменными (заданными функциями полезности $u_i = \xi_i + \xi_{i+1}$). Утверждается, что в этой экономике, удовлетворяющей всем обычным условиям, конкурентных равновесий нет. В самом деле, пусть $p = (p_l)$ – равновесные цены. Тогда все p_l строго положительны. Так как стоимость начального запаса участника 0 должна быть конечной, то для сколь угодно больших номеров l выполняется неравенство $p_l > p_{l+1}$. Иначе говоря, множество $M = \{ l \in L, p_l > p_{l+1} \}$ бесконечно. Участник $l \in M$ будет продавать свой начальный запас и на все вырученные деньги покупать товар $l + 1$. Но тогда товар l купит только участник $l - 1$. Всего товара l имеется $2^{l-1} + 2$ единицы, и чтобы его раскупить, участник $l - 1$ должен располагать деньгами в сумме $p_l (2^{l-1} + 2)$. А имеет он (при $l \geqslant 2$) $p_{l-1} (2^{l-2} + 1)$. Отсюда $2p_l = p_{l-1}$ и, в частности, $p_{l-1} > p_l$. Таким образом, с каждым l множество M содержит и $l - 1$, и значит, совпадает со всем L. Итак, $p_l = 2p_{l+1}$ $\forall$ $\forall\, l \in L$. Но тогда участнику 0 не хватит денег для приобретения товара 1, который имеется в количестве 2. В самом деле, его доход $p\omega(0)$ равен $\sum_{l=2}^{\infty} p_l = p_1 (1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots) = p_1$, и его хватает только на покупку единицы товара 1.

Казалось бы, ничего страшного, что товар 1 остался в избытке. Но это только на первый взгляд. То, что он не распродан, разрушает всю цепочку сделок. Первый участник, который владел этим товаром, не получает денег, и поэтому не может купить нужный ему товар 2. Второй участник не может продать свой начальный запас и купить товар 3, и т.д.

Таким образом, конкурентного равновесия здесь нет. Мы видим три выхода из этой ситуации. Ясно, что нарушение существования вызвано тем, что начальный запас $\omega(0)$ одного из участников имеет бесконечный носитель. И первый выход состоит в том, чтобы допускать только начальные запасы с конечными носителями. Однако в допущении бесконечных начальных запасов нет ничего необычного. Индивид вполне может быть владельцем вещи, "приносящей урожай" неограниченное время, даже когда его уже не будет в живых. И он ее использует не для непосредственного потребления, а для продажи.

Второй выход подсказывается следующим наблюдением. Если в этом примере разрешить участнику 0 расходовать больше, чем он получает от продажи своего начального запаса, то все встает на свои места. А именно, если участнику 0 предоставить субсидию в размере p_1, то те же цены дают рыночную сбалансированность. Эта идея реализуется ниже в понятии компенсированного равновесия.

Наконец, третий путь, который мы обсудим позже, связан с более глубокой ревизией понятия цены.

Определение. *Компенсированное равновесие состоит из цены p и распределения $x(\cdot)$, причем*

а) *для любого индивида i потребительский набор $x(i)$ – наилучший относительно предпочтения $\succcurlyeq_i$ в множестве $\{ x \in X, px \leqslant px(i) \}$;*

б) *$px(i) \geqslant p\omega(i)$ для любого i, и равенство для тех участников i, у которых начальный запас $\omega(i)$ имеет конечный носитель;*

в) *распределение $x(\cdot)$ допустимо; т.е. $x(\mathrm{I}) = \omega(\mathrm{I})$.*

Различие с конкурентным равновесием состоит в том, что участникам с "бесконечным" начальным запасом разрешается тратить больше, чем стóит их начальный запас. Эти субсидии (равные $px(i) - p\omega(i)$) можно ввести явно и назвать компенсированным равновесием тройку: из цены p, распределения $x(\cdot)$ и набора субсидий $(\delta_i, i \in \mathrm{I})$, где:

а) набор $x(i)$ наилучший для i при доходе $p\omega(i) + \delta_i$,

б) $\delta_i \geqslant 0$ $\forall i$ и равны нулю при конечном $\mathrm{supp}(\omega(i))$,

в) $x(\mathrm{I}) = \omega(\mathrm{I})$.

Любое конкурентное равновесие является компенсированным (с нулевыми субсидиями). Однако имеются два случая (отмеченные в [7]), когда верно обратное, т.е. когда любое компенсированное равновесие конкурентно. Первый случай, при котором все начальные запасы имеют конечные носители, очевиден. Второй, когда конечная коалиция участников владеет значительной частью начальной собственности, менее очевиден. Вектор товаров y считается существенным по сравнению с совокупным начальным запасом, если существует константа k и вектор z с конечным носителем таковы, что $\omega(\mathrm{I}) \leqslant ky + z$. При этом стоимость $\omega(\mathrm{I})$ в равновесных ценах будет конечной, и, как легко понять, все субсидии должны равняться нулю.

Теорема Вильсона–Бурка утверждает, что при обычных условиях компенсированные равновесия существуют. Однако, как уже отмечалось, понятие компенсированного равновесия не вполне удовлетворительно. Главная причина в том, что не ясно, из каких соображений нужно назначать субсидии, если без них нельзя обойтись. Мы предположили, что не надо субсидировать участников с конечным начальным запасом, но хорошего объяснения такой догадки нет. Например, если начальный запас какого-то участника (или даже конечной коалиции) существен, то можно никого не субсидировать. Возникает и такой вопрос: если $\omega(i) \leqslant \omega(j)$, то следует ли, что $\delta_i \leqslant \delta_j$? Или более простой: если начальные запасы двух участников равны, то нужно ли субсидировать их одинаково?

Ответы на эти вопросы станут очевидны при рассмотрении третьего пути выхода из затруднения.

5. РЕВИЗИЯ ПОНЯТИЯ ЦЕНЫ

При правильном задании цен субсидии будут частью оценки начального запаса, учитывающей поведение его на бесконечности. Кроме оценок вида $\Sigma p_l x_l$, есть много других функционалов на X, например, $\lim x^l$ при $l \to \infty$. В приведенном примере такое дополнение к цене (умноженное на p_1) как раз дало бы нужные деньги для нулевого участника и получилось бы равновесие. Конечно, предел может не всегда существовать, но это уже дело техники.

Итак, идея состоит в том, что цена – неотрицательный линейный функционал на X, который может принимать значение ∞. Для правильного определения этот функционал должен быть определен не на всем X, а на некотором подпространстве в X. Так мы приходим к следующему определению.

Определение. *Полной ценой называется пара* (E, p), *где E – векторное подпространство в X, а $p : E \to \mathbf{R}$ – линейный функционал, причем E содержит все векторы с конечным носителем, а p принимает неотрицательные значения на* $E^* = E \cap X^+$.

Имея полную цену p, можно найти цену товара l как $p_l = p(\mathbf{1}_l)$, а также "конечную" часть p_f цены p как функционал $p_f(x) = \Sigma_l p_l x_l$.

Очевидно, это тоже цена.

Лемма. *$p_f \leqslant p$ на E^+.*

Нужно показать, что для любого вектора $x \in E^+$ $p_f(x) \leqslant p(x)$. Для этого рассмотрим произвольное конечное подмножество $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$. Так как $x_\mathbf{K} \leqslant x$, то $p(x_\mathbf{K}) \leqslant p(x)$. Остается заметить, что $p_f(x)$ – предел $p(x_\mathbf{K})$, поэтому и $p_f(x) \leqslant p(x)$.

В силу этой леммы можно определить "бесконечную часть" p_∞ полной цены p как $p - p_f$. Очевидно, что $p_\infty = 0$ на любом векторе с конечным носителем. Иначе говоря, $p_\infty(x)$ зависит лишь от поведения x на бесконечности.

Замечание. Разложение $p = p_f + p_\infty$ аналогично разложению Иосида–Хьюита конечно-аддитивной меры на счетно-аддитивную и вполне конечно-аддитивную части. Разумеется, счетно-аддитивной компонентой тут является p_f.

Как увидим, в цене может присутствовать "бесконечная" часть, хотя полное описание всех цен неизвестно. В нужных случаях цены будут строиться как слабые пределы конечных цен, подобно, впрочем, и равновесиям, которые получаются как пределы конечных аппроксимаций. Чтобы дать обо все этом представление, вернемся еще раз к ключевому примеру.

Анализ примера. Напомним, что множество индивидов $\mathbf{I} = \{0,1,2,\dots\}$, а товары $\mathbf{L} = \{1,2,\dots\}$. Полезность индивида 0 задается функцией ξ_1, начальный запас $\omega(0) = (0,1,\dots)$. Пусть $\omega(i) = (2^{i-1} + 1)\mathbf{1}_i$ $i \geqslant 1$, а полезности задаются функциями $u_i = \xi_i + \xi_{i+1}$. Теперь рассмотрим урезанную экономику, оставив только участников из $\mathbf{K} = \{0,1,\dots,N\}$ и товары из $\mathbf{M} = \{1,\dots,N\}$. В этой конечной экономике имеется равновесие, и мы его явно определим. Чтобы формулы выглядели проще, будем считать, что $N = k + 1 + 2^{k-1}$, где k – натуральное число. Напишем сразу ответ

$$p_n = \begin{cases} 2^{-n+1}, & n = 1, \dots, k, \\ 2^{-k+1}, & n = k+1, \dots, N. \end{cases}$$

Потребление

$x(0) = 2 \cdot \mathbf{1}_1,$

$x(n) = (2^n + 2) \quad \mathbf{1}_{n+1}, n = 1, ..., k-1,$

$x(n) = (2^{n-1} + 1 - N + n) \; \mathbf{1}_n + (N - n) \; \mathbf{1}_{n+1},$

$n = k, ..., N-1,$

$x(N) = (2^{N-1} + 1) \mathbf{1}_N.$

Проверим баланс товаров вида n. С товаром 1 все в порядке, как и с товарами вида n, $n < k$. Баланс по товару $n = k$. Имеется его $2^{k-1} + 2$, а потребляют участники $k-1$ в количестве $(2^{k-1}+2)$ и k в количестве $2^{k-1}+1 - N + k = 0$. Товаров n, $(k+1 \leqslant n \leqslant N-1)$ имеется $2^{n-1}+2$. Потребляют участники $n-1$ в количестве $N - n + 1$ и n в количестве $2^{n-1} + 1 - N + n$, что в сумме дает $2^{n-1}+2$. Наконец, товар N потребляют участники $N-1$ в количестве 1 и N в количестве $2^{N-1}+1$.

Обратим внимание на поведение цен. С ростом N цена на каждый фиксированный товар l стабилизируется и становится равной 2^{-l+1}. Однако при этом гонится еще вал цен на правом конце отрезка $[1, N]$, высотой равный примерно $2^{-k+1} = 1/(N-k+1)$ и длиной $N - k$. Этот вал в пределе и дает бесконечную часть равновесной цены. Действие этой цены p_∞ на произвольный вектор x таково: взять k, усреднить x^l на отрезке $[k, k + 2^{k-1}]$ и устремить k к бесконечности. Конечно, тут возникают вопросы с существованием предела, к которым мы еще вернемся. Во всяком случае, для вектора $\omega(0)$ из нашего примера предел существует и равен единице.

Мы утверждаем, что аналогично дело обстоит и в общем случае, и конечные аппроксимации дают равновесие в бесконечной модели.

6. ЭКОНОМИКА С ПРОИЗВОДСТВОМ

Производство задается набором множеств $Y_j \subset X$, где j пробегает счетное множество $\mathbf{J}$. Вектор y из Y_j интерпретируется как производственный процесс; его отрицательная компонента y^- отражает затраты, а положительная y^+ – выпуск. Обычно производственные множества привязываются к потребителям с помощью долей собственности. Мы этого делать не будем, предполагая, что Y_j – конус для любого j (дивиденды заменяются зарплатами).

Распределением называется набор $x = (x(i)) \in \Pi X_i$ и $y = (y(j)) \in \Pi Y_j$. Снова наборы x и y удобно понимать как меры (со значением в векторном пространстве X) на множествах $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$. Для подмножества $\mathbf{K} \subset \mathbf{I}$ через $x(\mathbf{K})$ обозначается сумма $\Sigma_{i \in \mathbf{K}} x(i)$; неявно допускается, что сумма существует. Аналогично для $\mathbf{K} \subset \mathbf{J}$. Распределение (x, y) называется *допустимым*, если $x(\mathbf{I}) = y(\mathbf{J}) + \omega(\mathbf{I})$.

При фиксированной цене p взаимоотношения рыночной системы с производством – обычные. Во-первых, каждая фирма максимизирует прибыль. Неявно подразумевается, что эта прибыль меньше $+\infty$. Это значит, что для любого $y \in Y_j$ выпуск $y^+ \in E$ – области конечности цены p. Кроме того, так как Y_j – конус, максимальная прибыль равна нулю; это значит, что выбранный фирмой производственный способ $y(j) \in E$, и $py(j) = 0$. Во-вторых, каждый потребитель максимизирует свою полезность на бюджетном множестве $B_i(p) = \{x \in X_i, px \leqslant p\omega(i)\}$. Неявно это означает, что $\omega(i) \in E$, как и вектор потребления $x(i)$. В-третьих, планы потребления x и производства y образуют допустимое распределение. Приведем окончательное определение.

Определение. *Конкурентным равновесием называются цена p и распределение* (x, y), *такие, что:*

а) $x(i)$ – *наилучший (относительно предпочтения* $\geqslant_i$) *в бюджетном множестве* $B_i(p) = \{z \in X_i, pz \leqslant p\omega(i)\}$; *иначе говоря*, $x(i) \in B_i(p)$, и $x(i) \geqslant_i x \; \forall x \in B_i(p)$;

б) *цена p опорна к конусу* Y_j *в точке* $y(j)$ (т.е. $pz \leqslant 0 \; \forall z \in Y_j$) *и* $py(j) = 0$;

в) *распределение допустимо, т.е.* $x(\mathbf{I}) = y(\mathbf{J}) + \omega(\mathbf{I})$.

Замечание. Такое равновесие в случае чистого обмена дает, разумеется, и компенсированное в старом смысле. для этого в качестве цены нужно взять p_f – конечную часть полной цены p, а субсидии δ_i положить равными $p_\infty \omega(i)$. Однако, кроме существования субсидий, мы получаем целый набор их свойств:

0) $\delta_i = 0$ для участников i, у которых начальный запас имеет конечный носитель;

1) если начальные запасы двух участников i и j отличаются лишь в конечном числе товаров, то $\delta_i = \delta_j$;

2) если $\omega(i) = \omega(j) + \omega(k)$, то $\delta_i = \delta_j + \delta_k$;

3) если $\omega(i) \leqslant \omega(j)$, то $\delta_i \leqslant \delta_j$;

4) если $\omega(i) = o(\omega(j))$, (т.е. для любой константы $k > 0$ $\omega(i)^l \leqslant k\omega(j)^l$ при достаточно большом l,) то $\delta_i = 0$. Это же верно, если $\omega(i)$ – o-малое по сравнению с $\omega(\mathbf{K})$ для некоторой конечной коалиции $\mathbf{K} \subset \mathbf{I}$. Действительно, $p_\infty \omega(\mathbf{K})$ – некоторое конечное число, и $p_\infty \omega(i) \leqslant k p_\infty \omega(\mathbf{K})$ $\forall\, k > 0$, откуда $\delta_i = p_\infty \omega(i) = 0$.

7. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Чтобы равновесия существовали, нужны некоторые условия (большинство из них аналогичны обычным требованиям).

А. Выпуклость. Потребительские множества X_i выпуклы; производственные множества Y_j – выпуклые конусы; предпочтения $\geqslant_i$ – выпуклы.

Б. Монотонность. $X_i + X^+ \subset X_i$, $Y_j - X^+ \subset Y_j$, а предпочтения $\geqslant_i$ монотонные ($x \geqslant y$ влечет $x \geqslant_i y$).

В. Замкнутость. Множества X_i, Y_j замкнуты, а предпочтения $\geqslant_i$ непрерывны.

Г. Выживаемость. $X_i \subset X^+$, и для каждого потребителя i существует число δ, $0 \leqslant \delta < 1$, такое что $\delta\omega(i) \in X_i$. Таким образом, начальная собственность позволяет автаркично существовать каждому потребителю с некоторым запасом.

Д. Ограничение начального запаса. $0 \leqslant \omega(\mathbf{I}) < \infty$.

Е. Ограниченность. Множество всех допустимых распределений ограничено. Это требование можно переписать так: сумма $Y = \sum_i Y_j$ всех производственных конусов – заостренный конус, пересекающийся с X^+ только по нулю.

Все это – обычные условия. Однако даже в конечном случае нужно принять какое-то требование невырожденности. Условие Слейтера о строгой положительности начального запаса каждого потребителя выглядит слишком сильным. Более приемлема ресурсная связность в следующем виде.

Ж. Неприводимость. Пусть (x, y) – произвольное допустимое распределение, и $\mathbf{I} = \mathbf{I}^1 \amalg \mathbf{I}^2$ – нетривиальное разбиение множества $\mathbf{I}$ на две части. Тогда существует участник $i \in \mathbf{I}^1$ и вектор z из $Y + \omega(\mathbf{I}^2)$, такой что $x(i) <_i x(i) + z$. Иначе говоря, полезность потребителя i увеличивается от добавления товарного набора, который может быть произведен из начальных запасов участников из $\mathbf{I}^2$.

Для конечных экономик условия **А–Ж** были бы достаточны, чтобы конкурентное равновесие существовало. В бесконечном случае приходится добавлять требования конечности потребления и производства.

З. Конечность: а) для каждого потребителя i существует конечное множество товаров $\mathbf{D}(i) \subset \mathbf{L}$, такое, что для любого $x \in X_i$ вектор $x_{\mathbf{D}(i)}$ также принадлежит X_i и имеет ту же полезность, что и x; б) для каждой фирмы j существует такое конечное множество товаров $\mathbf{D}(j) \subset \mathbf{L}$, что для любого $y \in Y_j$ вектор $y_{\mathbf{D}(j)} \geqslant y$ и также принадлежит Y_j; в) для любого товара l множество $\mathbf{D}^{-1}(l) = \{i \in \mathbf{I}, l \in \mathbf{D}(i)\} \cup \{j \in \mathbf{J}, l \in \mathbf{D}(j)\}$ конечно.

Сделаем некоторые пояснения. Пункт а) означает, что каждый участник желает иметь лишь конечное число товаров; интуитивно это соответствует конечности его жизни; б) что каждая фирма взаимодействует (затрачивает и выпускает) лишь с конечным числом товаров; в) что любой товар l интересует лишь конечное число участников.

Все эти условия хоть и выглядят не слишком обременительными, но вызывают некоторое раздражение, однако отбросить их нельзя, как будет видно из следующих двух примеров.

Пример 2. Он принадлежит Дж. Бурку [10]. Здесь $\mathbf{L} = \{0,1,\ldots\}$, $\mathbf{I} = \{1,2,\ldots\}$, а производства совсем нет. Полезность индивида i задается функцией полезности $\xi_0 + \xi_i$, а начальная собственность $\omega(i) = \mathbf{1}_{i-1}$. Предположим, что на рынке действуют цены $p = (p_l)$, которые устанавливают конкурентное равновесие. Ясно, что все $p_l > 0$. Доход участника i равен p_{i-1}, и так как только он желает иметь товар с номером i, он должен его целиком выкупить. Поэтому $p_i \leqslant p_{i-1}$ $\forall$ i, так что получаем неравенства: $p_0 \geqslant p_1 \geqslant \ldots \geqslant p_i \geqslant \ldots$ На самом деле, здесь всюду равенства.

Действительно, предположим, что $p_0 > p_l$. В этом случае участник i не будет покупать более дорогой товар 0, а все деньги потратит на товар с номером i. Это дает равенство $p_i = p_{i-1}$, откуда p_{i-1} тоже меньше p_0, и т.д. Получаем $p_0 = p_1 = \ldots = p_i = \ldots$ и каждый участник i все деньги тратит на покупку единицы товара с номером i. Но тогда никто не покупает товар 0, и равновесия нет.

Отсутствие равновесия вызвано тем, что товар 0 желателен для бесконечного числа участников (нарушено условие 3в)). Кстати, этот пример опровергает теоремы 1 и 2 из [7], поскольку там не делается никаких предположений о конечности.

Пример 3. Потребители, продукты и фирмы нумеруются натуральными числами. Потребитель с номером i имеет единицу товара i, так что $\omega(i) = \mathbf{1}_i$, и полезность его $u_i = \xi_i + 2\xi_{i+1}$. Производственный процесс j перерабатывает единицу первого продукта в единицу продукта j, так что Y_j – луч, натянутый на вектор $-\mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_j$. Мы утверждаем, что равновесий здесь нет.

В самом деле, пусть $p = (p_1, \ldots)$ – равновесные цены. Ясно, что все $p_l > 0$. Конечность прибыли дает сразу же соотношение $p_1 \geqslant p_l$ $\forall$ l. В частности, $p_1 \geqslant p_2$. Но тогда первый участник продает свой начальный запас $\mathbf{1}_1$ и покупает $p_1/p_2 \geqslant 1$ единиц товара 2. Причем, если $p_1 > p_2$, то он потребует больше единицы товара 2, но производить его никто не захочет. Следовательно, $x(1) = \mathbf{1}_2$, $p_1 = p_2$ и $p_2 = p_1 \geqslant p_3$. В таком случае второй потребитель отказывается от товара 2 и требует только товар 3. Это означает, что второй производственный способ не используется, $y(2) = 0$. Повторяя рассуждение, получаем $p_1 = p_3$, $x(2) = \mathbf{1}_3$, $y(3) = 0$ и т.д. Таким образом, $p_1 = p_l$ $\forall$ l. Но никто не покупает начальный запас первого участника. Равновесия нет, и это связано с тем, что продукт 1 используется бесконечным числом фирм.

Положение не изменится, если слить все фирмы в одну с производственным конусом $Y = \{ y \in X,\ y_1 + \sum_{l=2}^{\infty} (y_l)^+ \leqslant 0 \}$. Равновесий снова нет и потому, что $\mathbf{D}$ для этой фирмы бесконечно. А если слегка изменить технологии, считая, что фирма j преобразует единицу товара j в единицу товара $j+1$ (т.е. хранит его), то условие конечности 3 выполнено, и равновесия существуют. При этом все цены равны, $p_l = 1$ $\forall$ l, $y(j) = -\mathbf{1}_j + \mathbf{1}_{j+1}$, $x(i) = \mathbf{1}_{i+1}$.

Наконец, отметим, что в [10] приведен интересный пример, где отсутствие равновесия вызвано структурой потребительских множеств X_i.

Теперь можно сформулировать основной результат о существовании равновесий.

Теорема. *Предположим, что экономика удовлетворяет условиям* **А–3**. *Тогда существует равновесие.*

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Стратегия доказательства. Мы приближаем нашу экономику конечными экономиками и равновесие строим как предел конечных равновесий. Более точно, для каждого конечного подмножества $\mathbf{K} \subset \mathbf{I} \cup \mathbf{J}$ агентов строится конечная экономика $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$ с конечными множествами потребителей $(\mathbf{K} \cap \mathbf{I})$, фирм $(\mathbf{K} \cap \mathbf{J})$ и товаров $(\mathbf{D}(\mathbf{K}))$. Устанавливается существование равновесия $(p^{\mathbf{K}}, x^{\mathbf{K}}, y^{\mathbf{K}})$ в экономике $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$. Цены $p^{\mathbf{K}}$ нормируются условием равенства 1 стоимости потребления некоторого фиксированного потребителя. Устанавливается ограниченность как векторов потреблений и производств $x^{\mathbf{K}}(i)$ и $y^{\mathbf{K}}(j)$ для разных $\mathbf{K}$, так и их стоимостей. После этого можно перейти к пределу (при $\mathbf{K} \to \mathbf{I}$) и получить цены p, потребления x и производства y. Наконец, остается проверить, что получается равновесие.

Конструкция $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$. Пусть $\mathbf{K}$ – конечное подмножество в $\mathbf{I} \cup \mathbf{J}$. Обозначим через $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{K})$ множество $\cup_{k \in \mathbf{K}} \mathbf{D}(k)$ желательных товаров для участников из $\mathbf{K}$. Тогда конечная экономика $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$ такова: потребители – $\mathbf{K} \cap \mathbf{I}$, фирмы – $\mathbf{K} \cap \mathbf{J}$, товары $\mathbf{D}(\mathbf{K})$, пространство потребительских благ – $X_{\mathbf{D}(\mathbf{K})} = \mathbf{R}^{\mathbf{D}(\mathbf{K})}$. Потребительские множества для участников из $\mathbf{K}$ получаются пересечением соответствующих множеств с пространством $X_{\mathbf{D}(\mathbf{K})}$. То же для предпочтений и производств. Начальные запасы $\omega^{\mathbf{K}}(i)$ равны $\omega(i)_{\mathbf{D}(\mathbf{K})}$.

Доказательство разбивается на серию шагов.

0. Прежде всего тривиальная редукция. Можно считать $\mathbf{L} = \mathbf{L}' = \mathbf{D}(\mathbf{I} \cup \mathbf{J})$. В самом деле, пусть найдено равновесие в модели с множеством товаров $\mathbf{L}'$ и начальными запасами $\omega(i)_{\mathbf{L}}$; обозначим его (p', x', y'). Тогда легко построить равновесие в исходной модели, полагая цену p равной композиции проекции $X \to X_{\mathbf{L}}$, и цены $p' : \mathbf{R}_+^{\mathbf{L}'} \to \mathbf{R}$, и полагая $x(i) = x'(i) + \omega(i)_{\mathbf{L}-\mathbf{L}'}$ и $y(j) = y'(j)$.

Ясно, что все предположения теоремы остаются верными при замене $\mathbf{L}$ на $\mathbf{L}'$. Далее будем считать, что $\mathbf{L} = \mathbf{D}(\mathbf{I} \cup \mathbf{J})$.

1. В экономике $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$ существует равновесие с нестандартными ценами, которое обозначим $(p^{\mathbf{K}}, x^{\mathbf{K}}, y^{\mathbf{K}})$. Нестандартность цены $p^{\mathbf{K}}$ означает, что все компоненты $p_l^{\mathbf{K}}$, $l \in \mathbf{D}(\mathbf{K})$ являются элементами нестандартной (расширенной) числовой прямой ${}^*\mathbf{R}$ (или, так как нас интересуют неотрицательные цены, то полупрямой ${}^*\mathbf{R}_f$). Векторы потребления и производства по-прежнему стандартны. Поэтому объяснения требует только формирование бюджетного множества $B_l(p^{\mathbf{K}})$ при нестандартной цене $p^{\mathbf{K}}$. Оно задается следующей формулой (где, чтобы не было путаницы, будем ставить черту над B)

$\overline{B}_i(p^{\mathbf{K}}) = \{ x \in X_i \cap X_{\mathbf{D}(\mathbf{K})}, \ p^{\mathbf{K}} x' \leqslant p^{\mathbf{K}} \omega^{\mathbf{K}}(i)$

для некоторого (нестандартного) $x' \in {}^*X_i$, стандартная часть которого равна x, т.е. $x' \approx x \}$.

Подробнее об этом говорится в дополнении.

Цена $p^{\mathbf{K}} \geqslant 0$, потребление $x^{\mathbf{K}}(i) \in \overline{B}_l(p^{\mathbf{K}})$ и наилучшее в нем, прибыль $p^{\mathbf{K}}\ y \leqslant 0\ \forall$ $\forall\ y \in Y_j \cap X_{\mathbf{D}(\mathbf{K})}$ и $\forall\ j \in \mathbf{K} \cap \mathbf{J}$, $p^{\mathbf{K}} y^{\mathbf{K}}(j) \geqslant 0\ \forall\ j \in \mathbf{K} \cap \mathbf{J}$, и, конечно, $x^{\mathbf{K}}(\mathbf{K} \cap \mathbf{I}) = y^{\mathbf{K}}(\mathbf{K} \cap \mathbf{J}) + \omega^{\mathbf{K}}(\mathbf{K} \cap \mathbf{I})$.

Цена $p^{\mathbf{K}}$ определена, как всегда, с точностью до множителя. Для дальнейшего удобно следующим способом отнормировать $p^{\mathbf{K}}$. Зафиксируем раз и навсегда некоторого участника 0, и будем считать, что $p^{\mathbf{K}}\omega(0) = 1$. Конечно, для этого нужно быть уверенным, что $p^{\mathbf{K}}\omega(0)$ отлично от нуля. Это проверяется с помощью условия неприводимости. Согласно ему существует потребитель i_0, желающий добавить к своему потреблению вектор z, выпускаемый из $\omega(0)$ с помощью некоторого множества фирм $\mathbf{J}_0$, которое можно считать конечным. Поэтому если $\mathbf{K}$ содержит $\mathbf{J}_0$, 0 и i_0 (далее всюду будем это предполагать), то стоимость $\omega(0)$ не может быть нулевой.

2. Можно считать, что $\operatorname{supp}(x^{\mathbf{K}}(i)) \subset \mathbf{D}(i)$ для любого $i \in \mathbf{K} \cap \mathbf{I}$ и $\operatorname{supp}(y^{\mathbf{K}}(j)) \subset \mathbf{D}(j)\ \forall j \in \mathbf{K} \cap \mathbf{J}$.

В самом деле, допустим, что некоторый участник i потребляет товар l, безразличный для него. Это означает, что цена $p_l^{\mathbf{K}}$ данного товара равна нулю. Но в этом случае компоненту $x^{\mathbf{K}}(i)_l$ можно забрать у i и передать другому участнику i', для которого $l \in \mathbf{D}(i')$.

Это же относится и к производителю.

Теперь можно переходить к пределу.

Технология образования предела. Равновесие в исходной модели будем строить как "предел" конечных равновесий $(p^{\mathbf{K}}, x^{\mathbf{K}}, y^{\mathbf{K}})$ при $\mathbf{K} \to \mathbf{I} \cup \mathbf{J}$. Однако пределы могут не всегда существовать. Чтобы многократно не переходить к подпоследовательностям, поступим следующим (фактически, эквивалентным) образом. Упорядочим как-то множество $\mathbf{I} \cup \mathbf{J}$ и обозначим через $\mathbf{K}_n$ подмножество первых n участников. Возьмем некоторый нетривиальный ультрафильтр $\mathcal{F}$ в множестве натуральных чисел [12]. Если теперь у нас есть семейство элементов $a = (a_{\mathbf{K}})$, индексированное конечными множествами $\mathbf{K}$, где $a_{\mathbf{K}} \in \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$, то через $\lim_{\mathcal{F}} a$ обозначим предел по фильтру $\mathcal{F}$. Это такое число A (или ∞), что для любой окрестности U этого числа найдется такой элемент $F \in \mathcal{F}$, что $a_{\mathbf{K}_n} \in U\ \forall n \in F$. В силу компактности пространства $\mathbf{R}_+\ U\{\infty\} = [0, \infty]$, снабженного естественной топологией, предел $\lim \mathcal{F} a$ всегда существует и единствен. Кроме того, он линейно зависит от последовательности a, т.е. $\lim_{\mathcal{F}} (a+b) = \lim_{\mathcal{F}} a + \lim_{\mathcal{F}} b$ и аналогично для умножения на скаляры.

3. Каждый потребитель i попадает в некоторое $\mathbf{K}_n$. Обозначим

$x^*(i) = \lim_{\mathcal{F}} (x^{\mathbf{K}}(i))$.

В силу предположения **Е** об ограниченности предел $x^*(i) \in X$, а в силу замкнутости X_i принадлежит X_l. Для каждой фирмы j аналогично определяем $y^*(j) = \lim_{\mathcal{F}} (y^{\mathbf{K}}(j))$. Он также определен и принадлежит Y_j.

Точно так же поступаем и с ценами $p^{\mathbf{K}}$. Для каждого вектора $x \in X$ находим $p^*(x)$ как стандартную часть нестандартного числа $\lim_{\mathcal{F}} (p^{\mathbf{K}} x_{\mathbf{D}(\mathbf{K})})$. Определим подпространство $E \subset X$ как множество тех x, для которых этот предел конечен. Тогда определено отображение $p^* : E \to \mathbf{R}$, очевидно, линейное. Однако нельзя пока считать p^* ценой, так как еще не показана конечность p^* на конечных векторах. Чтобы показать это, нам нужно получить несколько дополнительных фактов.

4. Утверждаем, что (x^*, y^*) – допустимое распределение, т.е. $x^*(\mathbf{I}) = \omega(\mathbf{I}) + y^*(\mathbf{J})$.

Для доказательства нужно проверить аналогичное соотношение для каждого товара l. Для каждого $\mathbf{K}$, такого что $l \in \mathbf{D}(\mathbf{K})$, имеем $x^{\mathbf{K}}(\mathbf{I} \cap \mathbf{K})_l = \omega(\mathbf{I} \cap \mathbf{K})_l + y^{\mathbf{K}}(\mathbf{J} \cap \mathbf{K})_l$, причем в сумме $x^{\mathbf{K}}(\mathbf{I} \cap \mathbf{K})_l = \Sigma_i x^{\mathbf{K}}(i)_l$ отличны от нуля лишь слагаемые с $i \in \mathbf{D}^{-1}(l)$ (см. шаг 2), а это множество конечно. Поэтому если $\mathbf{K}$ содержит $\mathbf{D}^{-1}(l)$, то $x^{\mathbf{K}}(\mathbf{I} \cup \mathbf{K})_l = x^{\mathbf{K}}(\mathbf{D}^{-1}(l))_l$, что при $\mathbf{K} \to \mathbf{I} \cup \mathbf{J}$ стремится к $x^*(\mathbf{I})_l$. Аналогично для y_l. Что касается ω, то $\omega(\mathbf{I})_l$ – предел $\omega(\mathbf{I} \cap \mathbf{K})_l$.

5. Для каждого потребителя i существует (стандартное) число K_i, такое что $p^{\mathbf{K}} \omega^{\mathbf{K}}(i) \leqslant K_i$ для всех достаточно больших $\mathbf{K}$. Или: для каждого i $\lim_{\mathcal{F}} p^{\mathbf{K}} \omega^{\mathbf{K}}(i)$ не является бесконечно большим (нестандартным) числом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{I}^1$ – множество участников, для которых выполнено свойство 5 (т.е. $\lim_{\mathcal{F}} p^{\mathbf{K}} \omega^{\mathbf{K}}(i)$ не бесконечно большое), а $\mathbf{I}^2$ – множество остальных участников, т.е. таких, что $\lim_{\mathcal{F}} p^{\mathbf{K}} \omega^{\mathbf{K}}(i) \approx \infty$. Заметим, что $\mathbf{I}^1$ непусто, ибо содержит участника 0. Предположим, что непусто и $\mathbf{I}^2$. Согласно предположению о неприводимости, найдется участник $i \in \mathbf{I}^2$, который хотел бы добавить к $x^*(i)$ некоторый вектор z из $Y + \omega(\mathbf{I}^1)$, $x^*(i) + z >_i x^*(i)$. Это соотношение сохранится, если заменить z на $z_{\mathbf{D}(i)}$. Но тогда z можно произвести из начального запаса $\omega(\mathbf{I}')$ некоторой достаточно большой конечной подкоалиции $\mathbf{I}' \subset \mathbf{I}^1$ с помощью конечного набора фирм j. Далее, если ϵ и δ – достаточно малые положительные числа, то $(1-\epsilon)x^*(i) + \epsilon(1-\delta)\omega(i) \in X_i$ (см. условия **А** и **Г**) и $(1-\epsilon)x^*(i) + \epsilon(1-\delta)\omega(i) + z >_i x^*(i)$.

Зафиксируем такие ϵ и δ. Тогда это же соотношение сохранится для близких векторов. В частности, для большого $\mathbf{K}$ выполняется неравенство $(1-\epsilon)x^{\mathbf{K}}(i) + \epsilon(1-\delta)\omega^{\mathbf{K}}(i) + z >_i x^{\mathbf{K}}(i)$.

В силу оптимальности вектора $x^{\mathbf{K}}(i)$ в экономике $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$ заключаем, что левый вектор сто́ит больше правого в ценах $p^{(\mathbf{K})}$, т.е. $p^{\mathbf{K}}[(1-\epsilon)x^{\mathbf{K}}(i) + \epsilon(1-\delta)\omega^{\mathbf{K}}(i) + z - x^{\mathbf{K}}(i)] > 0$.

А так как $x^{\mathbf{K}}(i)$ и $\omega^{\mathbf{K}}(i)$ сто́ят одинаково, получаем: $\epsilon\delta p^{\mathbf{K}} \omega^{\mathbf{K}}(i) < p^{\mathbf{K}} z \leqslant p^{\mathbf{K}} \omega^{\mathbf{K}}(\mathbf{I}')$.

Справа стоит ограниченная величина, тогда как выражение слева неограниченно растет по $\mathbf{K}$. Это противоречие доказывает 5.

5′. Аналогичное рассуждение показывает, что $\lim_{\mathcal{F}} p^{\mathbf{K}} \omega^{\mathbf{K}}(i)$ не является бесконечно малым.

Отсюда получаем сразу два следствия.

6. $0 < p^* \omega(i) < \infty$ для любого участника.

7. p^* конечно на векторах вида $\mathbf{1}_l$. В самом деле, любой товар l встречается в начальном запасе какого-то участника (условие **Д**). В частности, функционал p^* – цена в смысле данного выше определения. И остается проверить, что тройка (p^*, x^*, y^*) является равновесием. Мы уже установили, что (x^*, y^*) – допустимое распределение (см. 4). Поэтому остается проверить следующие четыре утверждения.

8. $x^*(i)$ принадлежит бюджетному множеству $B_i(p^*)$. Иначе говоря, нужно про-

верить, что $p^*x^*(i) \leqslant p^*\omega(i)$для любого участника i. Это вытекает из непрерывности p^* на конечномерном подпространстве $X_{\mathbf{D}(i)}$, в котором лежат все $x^{\mathbf{K}}(i)$ (см. шаг 2). В самом деле, для каждого $\mathbf{K}$ имеются неравенства $p^{\mathbf{K}}x^{\mathbf{K}}(i) \leqslant p^{\mathbf{K}}\omega^{\mathbf{K}}(i)$, откуда и в пределе $\lim_{\mathcal{F}} (p^{\mathbf{K}}x^{\mathbf{K}}(i)) \leqslant \lim_{\mathcal{F}} (p^{\mathbf{K}}\omega(i)_{\mathbf{D}(\mathbf{K})})$. Переходя к стандартным частям этих нестандартных величин, получаем неравенства $\mathrm{st}[\lim_{\mathcal{F}} (p^{\mathbf{K}}x^{\mathbf{K}}(i))] \leqslant p^*\omega(i)$.

Левая часть равна, очевидно, пределу $\mathrm{st}(p^{\mathbf{K}})x^{\mathbf{K}}(i)$. Так как $x^{\mathbf{K}}(i)$ меняется в конечномерном подпространстве $X_{\mathbf{D}(i)}$, то этот предел равен $p^*x^*(i)$.

9. Так же проверяется, что $p^*y^*(j) \geqslant 0\ \forall j \in \mathbf{J}$.

10. Проверим, что вектор $x^*(i)$ – наилучший в бюджетном множестве участника i. Предположим противное: существует вектор x, такой, что $x >_i x^*(i)$ и $p^*x \leqslant p^*\omega(i)$. Заметим, что $p^*\omega(i) > 0$ согласно 5'. Поэтому при малом $\epsilon > 0$ вектор $x' = (1 - \epsilon)x$ все еще лучше $x^*(i)$, а стоит меньше, $p^*x' < p^*\omega(i)$. Если $\mathbf{K}$ достаточно велико, то вектор $x^{\mathbf{K}}(i)$ близок к $x^*(i)$, $p^{\mathbf{K}}x'$ близко к p^*x', а $p^{\mathbf{K}}\omega(i)_{\mathbf{D}(\mathbf{K})}$ близко к $p^*\omega(i)$. Получаем соотношения $x' >_i x^{\mathbf{K}}(i)$ и $p^{\mathbf{K}}x' < p^{\mathbf{K}}\omega(i)_{\mathbf{D}(\mathbf{K})}$, что противоречит предположению об оптимальности $x^{\mathbf{K}}(i)$ в экономике $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}$.

11. Проверим, наконец, что $p^*y \leqslant 0$ для любого $y \in Y_j$. По определению $p^*y = \mathrm{st}(\lim_{\mathcal{F}} (p^{\mathbf{K}}y_{\mathbf{D}(\mathbf{K})}))$. Но при большом $\mathbf{K}$ вектор $y_{\mathbf{D}(\mathbf{K})}$ также принадлежит Y_j, и поэтому $p^{\mathbf{K}}y_{\mathbf{D}(\mathbf{K})} \leqslant 0$. Поэтому и в пределе $p^*y \leqslant 0$.

Это завершает доказательство теоремы.

ДОПОЛНЕНИЕ

Кратко остановимся на равновесии с нестандартными ценами. О нестандартном анализе см., например, [13], а также [14].

Суть нестандартного анализа состоит в том, что наряду с обычными множествами вроде X, Y и т.п. рассматриваются их "нестандартные" образы или расширения $^*X$, $^*Y$ и т.д. Каждое стандартное множество является частью его расширения, $X \subset {}^*X$. Мы в основном будем иметь дело с числами и говорить о нестандартной числовой прямой $^*\mathbf{R}$. Наряду с обычными стандартными числами, $^*\mathbf{R}$ содержит массу других, например, бесконечно малых или бесконечно больших чисел. С ними можно делать все арифметические действия, как с обычными числами. В частности, для любого соотношения α между обычными числами определено соотношение $^*\alpha$ для нестандартных чисел. Ключевым утверждением нестандартного анализа является так называемый принцип переноса: утверждение α истинно тогда и только тогда, когда истинно $^*\alpha$.

Как уже говорилось, важное отличие $^*\mathbf{R}$ от $\mathbf{R}$ в том, что в нем существуют (отличные от нуля) бесконечно малые числа. Число $\epsilon \in {}^*\mathbf{R}$ называется бесконечно малым (обозначается это $\epsilon \approx 0$), если для любого $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, выполнено $|\epsilon| < r$. Число x называется бесконечно большим, если $1/x$ бесконечно малое. Число конечно, если оно не бесконечно большое. Пишем $x \approx y$, если $x - y \approx 0$. Стандартной частью числа $x \in {}^*\mathbf{R}$ называется такое стандартное число $y = \mathrm{st}(x) \in \mathbf{R}$, что $x \approx y$; стандартная часть числа x существует тогда и только тогда, когда x – конечно.

Теперь вкратце о равновесии при нестандартных ценах. Экономика предполагается конечной. Потребления, начальные запасы и производства – стандартные, нестандартны только цены, которые принимают значения в $^*\mathbf{R}_+$. Как всегда, нормируем цены, так что цена p – это элемент из единичного симплекса в $(^*\mathbf{R}_+)^{\mathbf{L}}$, где $\mathbf{L}$ – (конечное) множество товаров. Объяснения требует поэтому только бюджетное множество $B_i(p)$ при нестандартной цене p. Оно задается формулой $B_i(p) = \{x \in X_i, px' \leqslant p\omega(i)\}$для некоторого (нестандартного) $x' \in {}^*X_i$, стандартная часть которого равна x, т.е. $x' \approx x$.

Равновесие понимается, как обычно: это набор цены p, потреблений $x(i)$ и производств $y(j)$, такой что $x(i)$ – наилучшие элементы в $B_i(p)$; $y(j)$ – с максимальной прибылью (равной нулю) в Y_j, и $\Sigma x(i) = \Sigma y(j) + \Sigma\omega(i)$.

Утверждается, что при нормальных условиях равновесие существует. Более точно, предполагаются выполненными условия **А–Е**. Доказательство в основном повторяет рассуждения из [14]. Возьмем $\epsilon > 0$ и рассмотрим стандартную модель, где цены меняются в ϵ-уменьшенном симплексе

$$\Delta^\epsilon = \{p \in \mathbf{R}^{\mathbf{L}}, \Sigma p_l = 1, p_l > \epsilon\ \forall l\}.$$

Тогда в силу условия Г бюджетные множества непрерывно зависят от p, и поэтому существует ϵ-равновесие $(p^\epsilon, x^\epsilon, y^\epsilon)$ такое, что $p^\epsilon \in \Delta^\epsilon$, $x^\epsilon(i)$ – наилучший элемент в бюджетном множестве $B_i(p^\epsilon)$, $y^\epsilon(j)$ – наиболее прибыльный процесс в Y_j, и дисбаланс $\Sigma x^\epsilon(i) - \Sigma y^\epsilon(j) - \Sigma\omega(i)$ принадлежит ϵ-расширению отрицательного ортанта, т.е. конусу, двойственному к Δ^ϵ. С помощью принципа переноса получаем существование ϵ-равновесия уже для любого нестандартного $\epsilon > 0$, в частности, для $\epsilon \approx 0$. Остается заменить x^ϵ и y^ϵ их стандартными частями, которые обозначим $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Довольно ясно, что дисбаланс $\bar{x}(\mathrm{I}) - \bar{y}(\mathrm{J}) - \omega(\mathrm{I})$ принадлежит отрицательному ортанту. Если он ненулевой, то избыток (который ничего не сто́ит) можно передать какому угодно участнику (см. условие монотонности) и добиться полного баланса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gale D.* Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Models // J. Econ. Theory. 1973. V. 6.
2. *Fischer I.* The Theory of Interest. N.Y., 1930.
3. *Samuelson P.A.* An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money // J. of Polit. Economy. 1958. V. 66.
4. *Полтерович В.М.* Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. М.: Наука, 1990.
5. *Balasko Y., Shell K.* The Overlapping-Generations Model. I. The Case of Pure Exchange without Money // J. Econ. Theory. 1980. V. 23.
6. *Balasko Y., Shell K.* The Overlapping-Generations Model. II, III. // J. Econ. Theory. 1981. V. 24.
7. *Wilson C.* Equilibrium in Dynamic Models with an Infinity of Agents // J. Econ. Theory. 1981. V. 24.
8. *Bewley T.F.* Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities // J. Econ. Theory. 1972. V. 4.
9. *McKenzie L.W.* The Classical Theorem on Existence of Competitive Equilibrium // Econometrica. 1981. V. 49. № 4.
10. *Burke J.* On the Existence of Price Equilibria in Dynamic Economies // J. Econ. Theory. 1988. V. 44.
11. *Geanakoplos J.D., Polemarchakis H.M.* Overlapping Generations // Handbook of Mathematical Economics. V. 4. Amsterdam, 1991.
12. *Бурбаки Н.* Общая топология. М.: Наука, 1968.
13. *Дэвис М.* Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980.
14. *Маракулин В.М.* Равновесие с нестандартными ценами и его свойства в математических моделях экономики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.

Поступила в редакцию
23 III 1992