

РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛИ СМЕШАННОЙ ЭКОНОМИКИ

Фридман А.А.

(Москва)

Исследуется чувствительность равновесия в модели экономики с очередями и свободным рынком к изменению государственных цен и предложения товаров. Выявлены эффекты увеличения времени в очередях при повышении цен или расширении предложения товаров и улучшения благосостояния потребителей при повышении цен.

ВВЕДЕНИЕ

В экономике, где осуществляется контроль за ценами, неизбежно возникает потребность в неценовых методах воздействия на спрос и предложение. Для этого используются такие формы распределения ресурсов, как rationирование производства и потребления (фондирование, карточная система) и механизм очередей. Один из вариантов модели равновесия при наличии очередей приведен в [1]. В [2] описано действие механизма очередей в динамике. В [3] предложен подход к формированию спроса при наличии очередей и установлена связь между временем, проведенным в них, и интенсивностью дефицита. В [4] исследован процесс регулирования цен в дефицитной экономике на основе информации об активном избыточном спросе.

В действительности параллельно с централизованной системой почти всегда действует и децентрализованная, работающая по законам рынка. Обе системы, функционируя автономно, оказывают влияние друг на друга. В последнее время широко разрабатываются отражающие это явление модели. В частности, М. Алексеев предложил модель для централизованно планируемой экономики (ЦПЭ) с фиксированными ценами, механизмом очередей и черным рынком [5]. В ней потребители могли продавать на черном рынке товары, приобретенные в официальной торговле.

Сейчас предприняты первые шаги движения от ЦПЭ к рынку: расширяется его сектор, начался процесс либерализации цен. Без модельного анализа трудно предсказать, к чему приведут принятые и будущие решения. Следует ли сокращать предложение государственного сектора и за счет этого увеличивать рыночное (что уже сделано в отношении товаров, которые разрешено продавать по свободным ценам) или же оставить первое на прежнем уровне и параллельно наращивать второе? Как отразятся подобные изменения на рыночных ценах и времени в очередях? На первый взгляд как при повышении цен, так и при увеличении предложения товаров время в очередях за всеми товарами должно сократиться (или сохраниться прежним). Ниже будет показано, что такой прогноз не вполне соответствует действительности. Для ряда товаров это время может возрасти, в том числе и для тех, цена которых повысилась. Анализ подобных ситуаций проведен на основе наиболее простой модели.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим экономику, в которой M потребителей и N товаров. Предпочтения потребителя k описываются функцией полезности $U_k(c_k + x_k, \theta_k)$, зависящей от векторов потребления товаров и услуг государственного $c_k = (c_{k1}, \dots, c_{kN})$ и рыночного $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kN})$ секторов и от свободного времени θ_k . Будем считать, что товар можно приобрести в госторговле и на свободном рынке; качестве одинаковых товаров в обоих секторах одно и то же (потребителю безразлично, где он куплен).

Каждый потребитель имеет фиксированный доход β_k и запас времени T_k . Различные цены $p = (p_1, \dots, p_N)$ фиксированы, рыночные $q = (q_1, \dots, q_N)$ — свободные. Обозначим время, требующееся для приобретения единицы товара i в госторговле, через τ_i (в него входит время на поиск товара и ожидание в очередях), которое для краткости будем далее называть просто временем в очередях. Спрос потребителя k определяется из решения задачи

$$\begin{aligned} U_k(c_k + x_k, \theta_k) &\rightarrow \max, \\ p c_k + q x_k &\leq \beta_k, \\ \tau c_k + \theta_k &\leq T_k, \\ c_k \geq 0, \quad x_k \geq 0, \quad \theta_k \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Предложение товаров на обоих рынках считается ограниченным. В государственном секторе распределяется фиксированный вектор благ $D = (D_1, \dots, D_N)$, а в рыночном — вектор $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$.

Примем ряд гипотез относительно функции полезности U_k : 1) она возрастает по всем аргументам; 2) строго вогнута по совокупности аргументов (z_k, θ_k) , где $z_k = c_k + \theta_k$; 3) дважды дифференцируема на R_n^+ ; 4) сепарабельна относительно свободного времени, т.е. $U_k = V_k(z_k) + V_k(\theta_k)$.

2. СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Набор векторов $(\tau^*, q^*, \{c_k^*, x_k^*, \theta_k^*\}_1^N)$ называется равновесием в этой модели, если: 1) $(c_k^*, x_k^*, \theta_k^*)$ является решением задачи (1) при $\tau = \tau^*, q = q^*$; 2) $\sum_k c_k^* \leq D$, $\sum_k x_k^* \leq Y$ — соблюдается материальный баланс, 3) $\tau^* (\sum_k c_k^* - D) = 0, q^* (\sum_k x_k^* - Y) = 0$ (далее звездочки опустим).

Если функции полезности потребителей непрерывны и вогнуты по совокупности аргументов, $p > 0, \beta_k > 0, T_k > 0, Y > 0, D > 0$, то существует равновесие в модели ЦПЭ с очередями и свободным рынком.

Рассмотрим равновесия специального вида, где потребитель приобретает некоторые ненулевые количества каждого товара в госторговле и на рынке: $x_k > 0, c_k > 0$; свободное время покупателя — $\theta_k > 0$ и все товары дефицитные (т.е. все рыночные цены выше государственных). Правда, такое равновесие существует далеко не всегда. При этих допущениях модель оказывается эквивалентной описанной в [5] с тем лишь ограничением, что поток товаров изначально поступает не только в госторговлю, но и на свободный рынок.

Введем дополнительные предположения о поведении функции полезности (кроме указанных в гипотезах 1)–4): 5) $U_k(z_k, \theta_k)$ сепарабельна относительно всех переменных: $U_k(z_k, \theta_k) = \sum_i U_{ki}(z_{ki}) + V_k(\theta_k)$; 6) $U_{ki}' z_{ki}$ возрастает по z_{ki} , где U_{ki}' — производная по z_{ki} ; 7) $V_k' \theta_k$ возрастает по θ_k .

3. АНАЛИЗ СРАВНИТЕЛЬНОЙ СТАТИКИ

Обсудив необходимые предпосылки, перейдем к непосредственному анализу реакции равновесия в модели ЦПЭ с очередями и свободным рынком на изменение предложения товаров и государственных цен.

Будем рассматривать только такие изменения цен и предложения, которые не превращают дефицитные товары в неходовые.

Предполагается, что гипотезы 1)–4) выполнены на протяжении всего анализа, а 5)–7) — при изменении предложения в одном из секторов экономики (см. табл. 1).

Приведенные в табл. 1 результаты доказаны для одного потребителя с произвольной и нескольких — с логарифмической функцией полезности. Доказательство основано на получении аналитических выражений для всех параметров равновесия и их иссле-

Результаты анализа сравнительной статистики

Ситуация	Параметры равновесия					
	предельная полезность денег λ , ед./руб.	рыночные цены q , руб.	свободное время θ , ч	предельная полезность времени μ , ед./ч	оценка времени w , руб./ч	время в очередях τ , ч/ед. товара
Повышение государственных цен	+	—	+	—	—	H/o
Предложение в госторговле растёт, на рынке сокращается, но суммарное предложение каждого блага — прежнее	—	+	—	+	+	H/o
Увеличение рыночного предложения	+	—	+	—	—	H/o
Рост предложения товара i в госторговле	+*	—	H/o**	H/o	H/o	H/o
	—	q_i^- $q_j^+, j \neq i$	—	+	+	τ_i^- $\tau_j, j \neq i$, H/o

Примечание. "+" — возрастает; "—" — убывает; H/o — изменяется неоднозначно. *Случаи возрастания и убывания λ рассматриваются отдельно. **Для логарифмической функции свободное время растёт, полезность времени и его оценка уменьшаются.

довании с помощью дифференцирования (предполагается, что производные существуют).

Рассмотрим в качестве примера ситуацию повышения цен для одного потребителя. Поскольку имеется в виду такое повышение цен, которое только сокращает (но не исключает полностью) дефицит товаров, спрос остается прежним. Учитывая этот факт, делаем вывод, что полезность денег (λ) является возрастающей функцией государственных цен: $\lambda = \sum_i V'_i Y_i / (\beta - \sum_i p_i D_i)$. Так как $q_i = V'_i / \lambda$, то рыночные цены уменьшаются. Это объясняется тем, что предложение и спрос остались неизменными, а объем денег на свободном рынке сократился.

Чтобы оценить, как изменяется свободное время, проанализируем равенство $V'_\theta (T - \theta) = V'_z z - \beta \lambda(p)$. Правая его часть убывает по p , следовательно, убывает и левая. Кроме того, по предположению, V'_θ уменьшается с ростом θ . Отсюда $\theta(p)$ — возрастающая функция, т.е. свободное время с повышением государственных цен увеличивается.

Так как свободное время возрастает по p , то полезность времени убывает с ростом цен: $\partial \mu / \partial p = V''_\theta (\partial \theta / \partial p) < 0$. Следовательно, оценка времени w ($w = \mu / \lambda$) убывает по p . Результатом увеличения свободного времени является сокращение совокупного времени в очередях.

Интересно проследить, как при этом изменяется время простаивания в них для каждого отдельного товара

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial p_j} = \frac{1}{w} \left(\frac{\partial (q_i - p_i)}{\partial p_j} - \tau_i \frac{\partial w}{\partial p_j} \right), \quad j = 1, \dots, N.$$

Анализ показывает, что оно может как сокращаться, так и увеличиваться. Это объясняется тем, что повышение государственных цен вызывает два процесса, которые противоречиво воздействуют на время в очередях. С одной стороны, сокращается разрыв между государственными и рыночными ценами, а значит, выгоднее покупать на рынке,

что ведет к сокращению времени простаивания в очередях; с другой — уменьшается оценка единицы времени, и это делает выгодным обращаться к госторговле. В итоге изменение времени в очередях для каждого товара зависит от того, какая тенденция сильнее. Если разница рыночной и государственной цен товара i изменяется значительно, чем денежная оценка прежнего времени в очередях, то время в очередях для товара i возрастает, и наоборот.

4. РЕГУЛИРОВАНИЕ ЦЕН И СТОИМОСТИ ВРЕМЕНИ

Напомним, что мы изучаем специальное состояние равновесия в модели ЦПЭ, когда все потребители покупают ненулевые количества каждого товара как в государственном секторе, так и на рынке. В результате равновесные рыночные цены, время в очередях и государственные цены связаны соотношением $q = p + w\tau$, $q > p$. Такое равновесие существует не всегда.

Построим алгоритм, позволяющий находить подобные состояния равновесия. Рассмотрим некоего агента, координирующего деятельность всей экономической системы (т.е. и государственного, и рыночного секторов), который хочет найти указанное состояние равновесия. Тогда его задача — поддерживать соответствие между рыночными ценами q и ценой приобретения такого же товара в госторговле, складывающейся из фиксированной цены p и денежной оценки времени в очередях $w\tau$, причем w одинакова для всех потребителей. Управляющими параметрами системы являются цены q (они должны быть выше государственных) и оценка времени w . Вступая в переговоры с потребителями, агент выясняет, какое количество каждого продукта $\sum_k z_{ki}$ будет приобретено при данных ценах в обоих секторах. Сравнивая

эту величину с предложением товаров $(D_i + Y_i)$, агент принимает решение об увеличении (при превышении спроса над предложением) или уменьшении (в противном случае) рыночных цен (и соответственно ценам изменяется время в очередях). Кроме того, располагая информацией о предложении каждого товара и о суммарных доходах потребителей, агент оценивает, могут ли все предлагаемые товары быть приобретены при назначенных ценах: $\sum_i p_i D_i + \sum_i q_i Y_i - \sum_k \beta_k$. Если потенциальные расходы

выше доходов потребителей, то следует понизить уровень цен посредством уменьшения оценки времени, и наоборот. При $q = p + w\tau$ условие $\sum_i p_i D_i + \sum_i q_i Y_i = \sum_k \beta_k$ эквивалентно $\sum_k \theta_k = \sum_k T_k - \sum_i \tau_i D_i$. Гипотезы 5)–7) обеспечивают валовую заменимость и нормальность спроса (z_k, θ_k) в следующей задаче.

Таким образом, равновесие для нее единственно

$$U_k(z_k, \theta_k) \rightarrow \max,$$

$$qz_k + w\theta_k \leq \beta_k + wT_k, \quad (2)$$

$$z_k \geq 0, \quad \theta_k \geq 0$$

(ограничение задачи получено путем суммирования бюджетного ограничения (1) и ограничения по времени, домноженного на w).

Процесс регулирования включает следующие этапы. 1. Задаются начальные условия: $q(0)$ ($q(0) > p$) и $w(0) > 0$; отсюда $\tau(0) = (q(0) - p)/w(0)$. 2. На s -м шаге:

а) определяется совокупный спрос каждого потребителя на каждый продукт $z_{ki}(q(s), w(s))$ из решения задачи (2);

б) рассчитываются: избыточный спрос по каждому товару $\Delta_i^s = \sum_k z_{ki}(q(s), w(s)) - (D_i + Y_i)$ и невязка по потенциальным расходам и доходам $\Delta_{N+1}^s = \sum_i p_i D_i + \sum_i q_i(s) Y_i - \sum_k \beta_k$;

с) устанавливается максимальная из невязок $\Delta_j^s = \max\{|\Delta_j^s|\}$;

Таблица 2

Первоначальное равновесие (до повышения цен)

Товары	D	Y	α	γ	p	q	τ	Спрос потребителей		
								1	2	3
1	10	5	1,5	0,4	1	4,781	0,551	6,049	4,865	4,086
2	20	15	3	0,3	2	3,370	0,200	13,757	11,415	9,829
3	25	10	4,5	0,3	3	5,055	0,300	13,756	11,414	9,829
θ			1	$\eta = 0,5$		$w = 6,859$		2,924	2,252	1,827
U								21,258	19,895	18,873

Состояние равновесия после повышения цены третьего товара

Товары	D	Y	α	γ	p	q	τ	Спрос потребителей		
								1	2	3
1	10	5	1,5	0,4	1	4,017	0,664	6,199	4,846	3,955
2	20	15	3	0,3	2	2,831	0,183	14,056	11,381	9,562
3	25	10	4,5	0,3	3,8	4,246	0,098	14,056	11,381	9,562
θ			1	$\eta = 0,5$		$w = 4,547$		4,839	3,601	2,817
U								21,886	20,274	19,044

Состояние равновесия после повышения цены первого товара

Товары	D	Y	α	γ	p	q	τ	Спрос потребителей		
								1	2	3
1	10	5	1,5	0,4	2,5	4,208	0,334	6,159	4,851	3,990
2	20	15	3	0,3	2	2,965	0,189	13,977	11,389	9,633
3	25	10	4,5	0,3	3	4,448	0,284	13,977	11,390	9,633
θ			1	$\eta = 0,5$		$w = 5,108$		4,175	3,135	2,480
U								21,693	20,152	18,981

Таблица 3

Таблица 4

d) если $j = N + 1$, то регулируется оценка времени

$$w(s+1) = \begin{cases} w(s) - \Delta_{N+1}^s / (2 \sum_i \tau_i(s) Y_i) & \text{при } [\Delta_{N+1}^s / (2 \sum_i \tau_i(s) Y_i)] < w(s), \\ 0,5w(s) & \text{при } [\Delta_{N+1}^s / (2 \sum_i \tau_i(s) Y_i)] \geq w(s) \end{cases}$$

и на соответствующую величину изменяются все рыночные цены: $q_i(s+1) = q_i(s) + \tau_i(s)(w(s+1) - w(s))$.

Если $j \neq N + 1$, то регулируются все рыночные цены: $q_i(s+1) = \max\{q_i(s) + 0,3\Delta_i^s, p_i + \delta\}$, где δ — положительная константа (эти цены должны быть выше государственных) и меняется время в очередях $\tau_i(s+1) = \tau_i(s) + (q_i(s+1) - q_i(s))/w(s)$, $i = 1, \dots, N$.

Процесс останавливается, когда максимальная невязка становится меньше заданной величины ϵ .

Представленный алгоритм — эвристический, однако во всех расчетах он сходился. Коэффициенты регулирования q и w подобраны экспериментально.

Поскольку равновесие для (1) при $q = p + w\tau$ является равновесием для (2), а для (2) оно единственно, то, если искомое состояние равновесия, где $q = p + w\tau$ для (1) существует, оно единственно. Чтобы найденное состояние было равновесием для (1) при $q = p + w\tau$, достаточно подобрать $c_k < z_k$, удовлетворяющие индивидуальным ограничениям по времени (тогда бюджетные ограничения будут выполнены автоматически) и условиям материального баланса $\forall i \sum_k c_{ki} = D_i$. Определить та-

кие величины c_k удастся, если полученное состояние удовлетворяет неравенству $\tau z_k + \theta_k > T_k \forall k$ и свободное время меньше лимита времени для каждого потребителя $\theta_k < T_k$. Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то для рассматриваемой ситуации состояния равновесия, в котором $q = p + w\tau$, не существует.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ

С помощью программы поиска равновесия в ЦПЭ с очередями и свободным рынком были проведены вычислительные эксперименты с целью выяснения влияния государственных цен на состояние равновесия в случае нескольких потребителей (их было 3 и товаров тоже 3). Рассматривалась экономика, в которой все потребители имели одинаковые функции полезности вида $U_k = \sum_i \alpha_{ki} z_{ki}^{\gamma_{ki}} + \theta_k^{\eta_k}$, лимиты времени, но разные доходы.

Расчеты проводились для различных ситуаций, которые определялись значениями коэффициентов целевой функции. Эксперимент показал, что во всех случаях проявлялись закономерности, отраженные в табл. 1. Причем при повышении государственных цен время в очередях увеличивалось для дешевых остродефицитных товаров и сокращалось для всех остальных.

Приведем пример, иллюстрирующий возможность увеличения времени в очередях для некоторых товаров при повышении цен. Рассмотрим трех потребителей, доходы и лимиты времени которых составляют соответственно $\beta_1 = 110$, $\beta_2 = 80$, $\beta_3 = 60$; $T_1 = T_2 = T_3 = 8$. Табл. 2 показывает первоначальное состояние; табл. 3–4 — как изменяется равновесие при повышении цены третьего и первого товаров по сравнению с табл. 2. Поскольку первый товар — остродефицитный (времени в очередях для его приобретения потребители тратят значительно больше, чем для покупки иных товаров) и недорогой, при повышении цены другого товара время в очередях для его покупки возрастает (табл. 2 и 3). В случае повышения цены первого товара это время сокращается (табл. 2 и 4). Но отсюда не следует, что время в очередях для приобретения товара при увеличении его цены всегда уменьшается.

Рассмотрим следующий пример. Пусть доходы и лимиты времени потребителей $\beta_1 = 110$, $\beta_2 = 80$, $\beta_3 = 60$; $T_1 = 11$, $T_2 = 8$, $T_3 = 6$. Сравнивая табл. 5 и 6, видим,

Таблица 5

Первоначальное равновесие (до повышения цен)

Товары	D	Y	α	γ	p	q	τ	Спрос потребителей		
								1	2	3
1	15	5	1,5	0,5	1	3,708	0,981	9,221	6,309	4,470
2	25	10	3,5	0,3	2	2,386	0,140	14,839	11,315	8,847
3	30	15	3,5	0,4	3	3,507	0,184	19,773	11,412	10,815
θ			1	$\eta = 0,1$		$w = 2,758$		0,509	0,412	0,340
U								24,899	22,105	19,872

Таблица 6

Равновесие после повышения цены первого товара

Товары	D	Y	α	γ	p	q	τ	Спрос потребителей		
								1	2	3
1	15	5	1,5	0,5	1,9	3,181	1,337	9,223	6,309	4,469
2	25	10	3,5	0,3	2	2,047	0,049	14,840	11,315	8,846
3	30	15	3,5	0,4	3	3,009	0,009	19,775	14,411	10,813
θ			1	$\eta = 0,1$		$w = 0,958$		1,384	1,126	0,929
U								24,998	22,202	19,966

Таблица 7

Первоначальное равновесие (до изменения предложения)

Товары	D	Y	α	γ	p	q	τ	Спрос потребителей		
								1	2	3
1	10	5	1	0,4	1	3,403	0,290	5,897	4,890	4,213
2	20	15	3	0,3	2	3,599	0,193	13,454	11,460	10,086
3	25	10	4,5	0,3	3	5,399	0,289	13,454	11,460	10,086
θ			1	$\eta = 0,6$		$w = 8,299$		4,249	3,209	2,566
U								20,773	19,489	18,541

Таблица 8

Равновесие после перераспределения предложения третьего товара в сторону госторговли

Товары	D	Y	α	γ	p	q	τ	Спрос потребителей		
								1	2	3
1	10	5	1	0,4	1	4,014	0,274	5,797	4,902	4,302
2	30	5	3	0,3	2	4,246	0,204	13,254	11,480	10,265
3	25	10	4,5	0,3	3	6,370	0,306	13,254	11,480	10,265
θ			1	$\eta = 0,6$		$w = 11,001$		3,093	2,405	1,978
U								20,273	19,179	18,380

что хотя цена первого товара повысилась, время в очередях для его приобретения возросло.

Особый интерес представляет влияние государственных цен на благосостояние потребителей. Рост цен ведет к увеличению полезности денег и уменьшению полезности времени, поэтому при одинаковых запасах времени в выигрыше оказывается тот, у кого доход больше. Покажем, что новое равновесие (после повышения цен) может оказаться лучше первоначального для всех потребителей, в том числе и для тех, кто обладает меньшими доходами. Это демонстрируют табл. 2–4.

Улучшение благосостояния всех потребителей происходит за счет значительного увеличения свободного времени. Интересно выяснить, как изменяется их положение, если часть товаров, продававшихся ранее по свободным ценам, поступает в продажу по государственным. На первый взгляд кажется, что от этого можно только выиграть. На самом деле возможна такая ситуация, в которой новое равновесие будет хуже первоначального для всех потребителей.

Пусть их доходы составляют соответственно $\beta_1 = 110$, $\beta_2 = 80$ и $\beta_3 = 60$, а запасы времени T одинаковы и равны 8. Табл. 7 и 8 показывают следующее: несмотря на то что 10 единиц второго товара переданы из рыночного сектора в государственный, благосостояние потребителей ухудшилось. Отсюда можно сделать вывод, что при перераспределении предложения в обратном направлении возможно улучшение их благосостояния.

Автор выражает свою признательность В.М. Полтеровичу за большое внимание и помощь при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилов В.И. Экономическое равновесие при неравновесных ценах // Советско-польский научный семинар по математическим методам в планировании и управлении экономикой: Кр. тезисы. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1979.
2. Корнаи Я., Вейбулл Й.В. Обобщенное равновесие рынка при наличии дефицита: модель очереди // Экономика и мат. методы. 1981. Т. XVII. Вып. 5.
3. Полтерович В.М. Проблема измерения дефицитности благ // Экономика и мат. методы. 1983. Т. XIX. Вып. 5.
4. Мовшович С.М. Регулирование цен при наличии очередей // Экономика и мат. методы. 1988. Т. XXIV. Вып. 2.
5. Stahl D.O., Alexeev M. The Influence of Black Markets on a Queue-rationed Centrally Planned Economy // J. Econ. Theory. 1985. V. 35. № 2.

Поступила в редакцию
12 XI 1991