

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЗАТРАТ-ВЫПУСКА В РЕГИОНЕ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ КОНВЕРСИИ

Пересада В.П.

(Санкт-Петербург)

Рассматривается обобщение модели леонтьевского типа "затраты-выпуск", позволяющее получить динамические уравнения развития взаимосвязанных производств региона. Излагается подход, основанный на теории сетей, который дает возможность достаточно просто рассматривать любой характер взаимосвязей и получать систему дифференциальных уравнений в пространстве состояний. Это обеспечивает возможность формирования прогнозных оценок развития любых экономических показателей региона.

Осуществление конверсии в регионе с изменением направленности капитальных вложений ведет к существенному перераспределению взаимных поставок потребителей и производителей. Известная модель леонтьевского типа "затраты-выпуск" отражает сложившиеся соотношения между последними, но не позволяет прогнозировать характер динамики выпуска продукции в перспективе. Однако возможно некоторое развитие этой модели, обеспечивающее получение динамических зависимостей во времени.

Рассмотрим основное уравнение "затраты-выпуск"

$$(I-A) X_0 = Y_0, \quad (1)$$

где X_0 — вектор объемов продукции, выпускаемой каждой из отраслей экономической системы; Y_0 — вектор конечной продукции этих отраслей; $A = \{a_{ij}\}$ — матрица технологических коэффициентов.

Элементы матрицы A отражают количество продукции отрасли i , необходимое для производства единицы продукции отрасли j . Они могут быть как в натуральном, так и в денежном выражении. Если считать, что матрица представлена в натуральном выражении, то для перехода в денежное нужно умножить правую и левую части (1) на матрицу цен S

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & S_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & S_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Матрица цен считается диагональной с элементами, имеющими размерность руб/ед. продукции. В результате вместо (1) можно записать

$$SX_0 = SAX_0 + SY_0. \quad (2)$$

Из (2) следует, что стоимость продукции каждой отрасли i за год определяется как сумма ее продаж всем отраслям (в том числе и самой себе) плюс стоимость конечного продукта. Но известно уравнение для добавленной стоимости

$$(I - A^T) P_0 = V, \quad (3)$$

где P_0 — вектор стоимости продукции, выпускаемой каждой из отраслей за год, т.е. $P_0 = SX_0$. Вместе с тем V — вектор добавленной стоимости — равен сумме векторов трудовых затрат (Z) и прибыли Q . А так как общая стоимость выпущенной продукции (валовой внутренний продукт) отрасли i должна быть равна сумме стоимости потребленной ею продукции и добавленной стоимости, то вместо (3) имеем

$$SX_0 = A^T P_0 + Z + Q. \quad (4)$$

Выражение (4) можно представить несколько иначе. Добавим к вектору X_0 еще одну составляющую $X_{N+1} = T$, которая отражает трудовые затраты на производство всей продукции. Соответственно в матрице цен S появится также составляющая $S_{N+1} = S_T$ — ставка заработной платы. Добавочный столбец матрицы $A_{N+1,j}^T$ состоит из коэффициентов $a_{N+1,j} = Z_j/X_j S_T$, которые определяют долю трудовых затрат, необходимых для производства продукции j . Здесь $Z_j/S_T = T_j$ — трудовые затраты, чел./год. Следовательно, размерность элементов этого столбца: чел./([прод.] / [вр.]). Она отражает потребность в рабочей силе, необходимой для производства единицы продукции в единицу времени, т.е. на данную производительность. Элементы строки $A_{i,N+1}^T$ равны нулю, кроме последнего — $a_{N+1,N+1} = 1$. В результате (4) принимает вид

$$SAX + SY = A^T SX + Q.$$

Обратимся вновь к исходной матрице A . Ее элементы представлены в натуральном выражении и, подобно элементам $N+1$ строки, также должны отражать потребность в поставке продукции отрасли i на удовлетворение потребности отрасли j на единицу ее скорости производства (выпуска) и соответственно иметь размерность [пред. i]/([пред. j]/[вр.]).

Однако на практике чаще всего имеются данные о затратах (руб.) на годовую потребность отрасли ([руб.]/[год]) для выпуска годовой продукции отрасли i . Поэтому экономисты вынуждены исследовать матрицу A_D , представленную в денежном выражении: $A_D = SAS^{-1} = RS^{-1}$.

Переход от матрицы A к A_D можно рассматривать как последовательное умножение на матрицу цен S .

На первом шаге формируется матрица $R = SA$, элементы которой имеют размерность строки трудовых затрат ([руб.вр.]/[прод.]). Они отражают затраты на выпуск единицы продукции в год. Далее, после умножения справа на обратную матрицу S^{-1} получается матрица A_D , элементы которой будут иметь размерность [руб.]/[прод.]/[вр.], деленную на [руб.]/[пр.], что окончательно дает размерность времени (вр.). Таким образом, элементы этой матрицы оказываются не безразмерными величинами, [руб.]/[руб.], а имеющими размерность времени. Это объясняется тем, что элементы любого j -го столбца матрицы определяют ту долю времени (года), которая должна быть отработана отраслью-потребителем j для возмещения ею затрат каждой отрасли i , поставляющей ей материалы и полуфабрикаты.

Отмеченные особенности размерности элементов матриц R и A требуют несколько иного понимания уравнения (4), в котором вектор P следует полагать произведением $P = SX$, где $\dot{X} = dX/dt$, [пред.]/[вр.] — вектор выпуска продукции, т.е. скорости ее производства в единицу времени, например в год (далее эту величину будем обозначать $\dot{X} = \dot{X}$). В этом случае P будет иметь следующую размерность: ([руб.]/[прод.]) $\times$ [прод.]/[вр.] = [руб.]/[вр.], откуда произведение любого элемента матрицы A на составляющие вектора P дают размерность [руб.].

Различия между X и $\dot{X}$ не имеют значения, пока рассматриваются годовые продажи продукции и годовое ее производство. Однако при анализе динамики процесса производства это различие необходимо учитывать. Исходя из сказанного, (4) необходимо записать в виде

$$SX - R^T \dot{X} = Q. \quad (5)$$

Это уравнение отражает известное положение, что разность между стоимостью продукции и расходами на ее производство равна прибыли.

Далее учтем, что часть прибыли должна идти либо на поддержание начального уровня выпуска (ремонт оборудования), либо на его наращивание (расширение производства), т.е. на капитальные вложения, а это означает рост скорости производства продукции: $\dot{X} = I = d^2 X/dt^2$, [прод.]/[вр.]².

Затраты на капитальные вложения P_{Li} каждой отрасли будут пропорциональны стоимости увеличения скорости производства, т.е.: $P_{Li} = L_i \dot{X}_i$. Коэффициент пропорциональности L_i имеет размерность [руб.]/[прод.]/[вр.]². В первом приближении эти коэффициенты можно считать равными стоимости основных фондов отрасли, отнесенных к годовому выпуску и умноженных на время, необходимое на их создание (на строительство еще одного подобного производства при условии, что старое продолжает работать). Таким образом, запишем матрицу для N производств

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & L_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & L_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Уравнение (5) примет вид

$$SX - R^T \dot{X} - L \ddot{X} = Q_1 + P_c, \quad (6)$$

где P_c означает сторонние инвестиции. Знак Q должен быть отрицательным, если вместо прибыли имеют место убытки. Пока не рассматриваются взаимосвязи предприятий, то записанное уравнение второго порядка (6) распадается на N независимых уравнений одинакового вида для каждой отрасли (производителя). Каждое такое уравнение для его дальнейшего анализа удоб-

но переписать в виде

$$\ddot{X}_i + (\sum (R_{ij}/L_i)) \dot{X}_i - (S_i/L_i) X_i = -(Q_i + P_{ci})/L_i. \quad (7)$$

где все коэффициенты представлены в относительных величинах, т.е. отнесены к стоимости основных фондов, что позволяет сравнивать расчеты вне зависимости от биржевого курса валют. Кроме того, каждый член этого уравнения (до того, как произведено деление на L_i) имеет размерность [руб.], т.е.: $\ddot{X}_i L_i = P_i$, [руб.]; $\dot{X}_i \sum R_{ij} = P_R$ [руб.]; $S_i X_i = -P_S$, [руб.]. Сумма, стоящая во втором слагаемом, показывает, что каждый производитель имеет множество поставщиков, расходы на которые должны суммироваться.

Записанное таким образом дифференциальное уравнение является динамической моделью единичного производства. Эту модель можно изобразить в виде схемы, для чего коэффициент R будем обозначать знаком $- [R]$, $S - \langle S \rangle$, $L - \{L\}$, $\circ$ — источник внешних инвестиций P_c . Эти элементы отражают основные характеристики производства: цену продукции S , затраты на комплектацию, материалы и рабочую силу R , стоимость расширения производства L (основные фонды). При анализе такой модели в качестве исследуемой переменной могут быть выбраны: либо продукция $X(t)$, либо скорость ее выпуска $\dot{X}(t) = I(t)$, или затраты $P(t)$.

Учитывая вышесказанное и используя введенные обозначения для коэффициентов модели, можно графически изобразить схему этой модели, отражающую связь между ее коэффициентами и переменными (см. рис. 1). Однако вследствие того, что в экономике обычно взаимодействует множество взаимосвязанных производителей и потребителей и изменения в коэффициентах одного из них ведет к перераспределению затрат и выпусков всех остальных, необходимо записать систему уравнений динамической модели множества взаимосвязанных отраслей. Наиболее наглядный способ ее получения — графическое представление этих связей.

Взаимосвязи отраслей разнообразны и имеют множество вариантов. Будем рассматривать один из них, когда каждый производитель i , с одной стороны, предоставляет потребителям j необходимую им продукцию (в том числе, возможно, и самому себе), с другой — потребляет продукцию многих других производителей. Графически такой характер взаимосвязи представлен в виде сложной сети (см. рис. 2).

Как видно из приведенной схемы, поставка производителем i необходимой потребителям j продукции отражается на схеме в виде параллельного включения к S_i продаж $R_{i1}, \dots, R_{iN}$. Чем больше их число, тем больший выпуск продукции должен обеспечиваться производителем i . Но каждый потребитель j требует поставки продукции множества поставщиков, что отражается на схеме последовательным включением закупок $R_{1j}, \dots, R_{Nj}$. Для сложной сети, изображенной на рис. 2, можно записать систему уравнений в пространстве состояний, которое характеризуется скоростями выпуска продукции каждым производителем I_i и объемом продаж каждым из них P_{Si} . Общий вид системы дифференциальных уравнений в пространстве состояний для сложной системы имеет вид

$$U = DU + B U_{\text{вн}}, \quad (8)$$

где вектор-столбец $U = (I_1, I_2, I_3, I_4, P_{S1}, P_{S2}, P_{S3}, P_{S4})$ — результат решения этого дифференциального уравнения и имеет составляющие I_i , определяющие динамику выпуска продукции каждым предприятием, и составляющие P_{Si} , отражающие динамику денежных поступлений каждого предприятия. Вектор-столбец $U_{\text{вн}} = (0, 0, 0, 0, P_{c1}, P_{c2}, P_{c3}, P_{c4})$ показывает объем инвестиций производителя, или его прибыль.

Размерность векторов N_y равна сумме N_L — числа производителей, вкладывающих капитал в расширение производства, и N — числа рассматриваемых производств (отраслей), т.е. $N_y = N_i + N$.

Таким образом, решение системы (8) дает ответ на вопрос о характере изменения во времени выпуска продукции и объема продаж в зависимости от величин элементов матрицы динамических коэффициентов D и матрицы внешних воздействий B .

Для нахождения элементов матрицы D и B обратимся к рис. 2, используя метод анализа сложных сетей Кирхгофа. По первому закону Кирхгофа для узлов должно удовлетворяться равенство $\sum I_j = 0$.

Обращаясь к узлу j , запишем $I_{ij} = I_{ij} + I_{Sj}; I_{Sj} = \dot{P}_{Sj}/S_j$. После анализа получим следующую систему уравнений для затрат в приведенном примере

$$\begin{aligned} \dot{P}_{S1} &= +S_1 (I_{L1} + I_{L2} + I_{L3} + I_{L4}) - P_{S1} S_1 (1/R_{12} + 1/R_{13} + 1/R_{14}), \\ \dot{P}_{S2} &= +S_2 (I_{L1} + I_{L2} + I_{L3} + I_{L4}) - P_{S2} S_2 (1/R_{21} + 1/R_{23} + 1/R_{24}), \\ \dot{P}_{S3} &= +S_3 (I_{L1} + I_{L2} + I_{L3} + I_{L4}) - P_{S3} S_3 (1/R_{31} + 1/R_{32} + 1/R_{34}), \\ \dot{P}_{S4} &= +S_4 (I_{L1} + I_{L2} + I_{L3} + I_{L4}) - P_{S4} S_4 (1/R_{41} + 1/R_{42} + 1/R_{43}) \end{aligned} \quad (9)$$

По второму закону Кирхгофа для всех контуров должно выполняться равенство — сумма всех затрат плюс прибыль равна стоимости продукции $P_{Sj} = \sum_i^N P_{Rij} + Q_j + P_{Lj}$. Для первого контура — $P_{R11} + P_{R21} + P_{R31} + P_{R41} + P_{L1} + Q_1 = P_{S1}$, так как $P_{L1} = \dot{I}_{L1} I_1$, то для первого и всех остальных

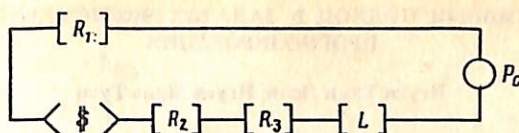


Рис. 1 Схема динамической модели одиночного производителя

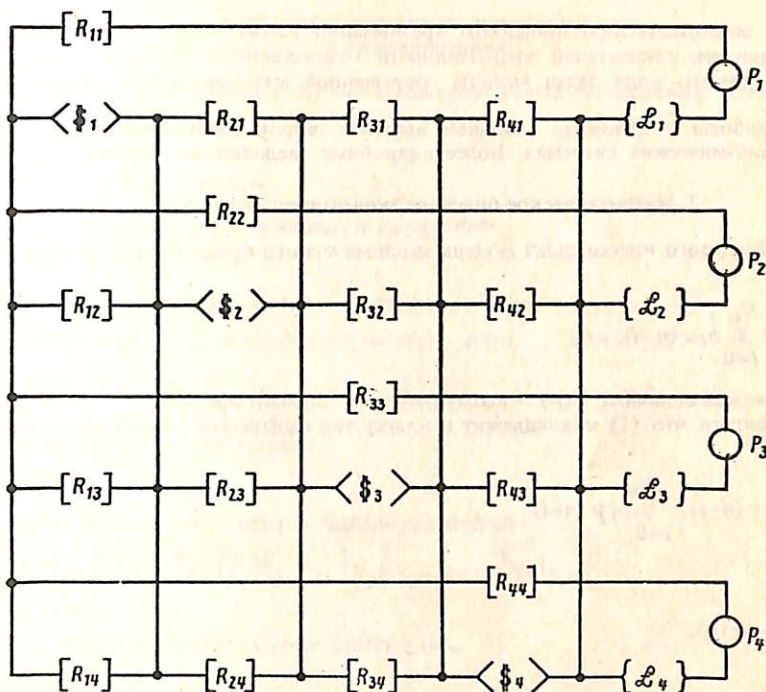


Рис. 2. Схема динамической модели четырех взаимосвязанных производителей

ных контуров

$$\begin{aligned} \dot{I}_{L1} &= -R_{11}I_{L1}/L_1 - (-P_{S1} + P_{S2} + P_{S3} + P_{S4})/L_1 - Q_1/L_1 \\ \dot{I}_{L2} &= -R_{22}I_{L2}/L_2 - (P_{S1} - P_{S2} + P_{S3} + P_{S4})/L_2 - Q_2/L_2 \\ \dot{I}_{L3} &= -R_{33}I_{L3}/L_3 - (+P_{S1} + P_{S2} - P_{S3} + P_{S4})/L_3 - Q_3/L_3 \\ \dot{I}_{L4} &= -R_{44}I_{L4}/L_4 - (P_{S1} + P_{S2} + P_{S3} - P_{S4})/L_4 - Q_4/L_4 \end{aligned} \quad (10)$$

Из этих уравнений нетрудно установить вид матриц D и B системы (8); L , R , S — матрицы исходных данных, необходимых для решения записанной выше системы уравнений.

Имея схему выбранного варианта взаимосвязей производителей вида, изображенного на рис. 2, можно найти все элементы матриц D и B , т.е. получить модель функционирования экономики региона и прогнозировать результаты конверсионных мероприятий в части изменения выпуска продукции, оплаты товаров, получения прибылей предприятиями региона и других их экономических характеристик.

Обсуждаемая динамическая модель является первым приближением, поскольку она описывает экономическую систему с постоянными во времени коэффициентами. Уточнением этой модели будет введение переменных во времени элементов матриц R , L , S , и записанная система дифференциальных уравнений превратится в систему с переменными коэффициентами. Следующий шаг уточнения модели — учет случайного характера оценок затрат и выпусков. Здесь система дифференциальных уравнений в пространстве состояний будет описывать не только сами процессы затрат и выпуска, но и статистические параметры этих процессов как случайных. Каждый из этих шагов все более полно учитывает особенности реальной экономики и ведет к все более сложной модели. Существующий математический аппарат решения упомянутых видов уравнений и использование современной вычислительной техники позволяют решить эти задачи.