

АДАПТИВНЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Нгуен Тхук Лоан, Нгуен Минь Туан

(Вьетнам)

1. Введение

В управлении экономическим процессом чрезвычайно важна объективная оценка факторов, формирующих уровень показателей эффективности хозяйственной деятельности. Весьма полезны для решения такого рода задач методы современной математической статистики и теории адаптации [1-3].

Цель данной работы — изложить основные вопросы теории оценивания и прогнозирования в динамических экономических системах. Более подробные сведения по этим вопросам см. [4-10].

2. Математическое описание экономического процесса

Для весьма обширного класса задач модель экономического процесса может быть представлена в виде [1]

$$\sum_{i=0}^{N_y} a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{N_u} b_i u(n-i), \quad (1)$$

где $y(n)$ — измеряемая величина, $u(n)$ — возмущения, n — момент времени.

Будем предполагать, что (1) принадлежит к классу так называемых наблюдаемых систем [4, 5]. Из (1)

$$y(n) = - \sum_{i=1}^{N_y} a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^{N_u} b_i u(n-i) \quad (2)$$

или

$$y(n) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(n), \quad (3)$$

где $T(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ — передаточная функция; z^{-1} — оператор обратного сдвига; $z^{-1} y(n) = y(n-1)$, $z^{-1} u(n) = u(n-1)$, а полиномы $B(z^{-1})$ и $A(z^{-1})$ принимают вид

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N_u} z^{-N_u}, \quad b_{N_u} \neq 0,$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N_y} z^{-N_y}, \quad a_{N_y} \neq 0.$$

Порядки полиномов $A(z^{-1})$ и $B(z^{-1})$ для простоты выбираются одинаковыми, что, однако, не ограничивает общность рассмотрения.

Из (2) видно, что выражение для выходного процесса разбивается на два члена, один из которых обусловлен обратной связью, а другой зависит непосредственно от входного сигнала. Значение $y(n)$ можно вычислять с помощью следующего широко распространенного алгоритма:

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0 u(n) + z^{-1} (-a_1 y(n) + b_1 u(n)) + z^{-1} \times \\ &\times (-a_2 y(n) + b_2 u(n)) + \dots + z^{-1} (-a_{N_y} y(n) + b_{N_u} u(n) \dots). \end{aligned} \quad (4)$$

в виде векторной записи модель (1) описывается выражениями

$$\lambda(n) = A^T \lambda(n-1) + B u(n), \quad (5)$$

$$y(n) = C \lambda(n-1) + D u(n), \quad (6)$$

где $\lambda(n) = (\lambda_1(n), \dots, \lambda_{N_y-1}^{(n)}, \lambda_{N_y}^{(n)})^T$ — вектор-столбец состояния модели; $A = A^T$ — квадратная матрица перехода порядка; B, C, D — векторы.

Передаточную функцию можно представить оператором прямого сдвига, т.е. $z y(n) = y(n+1)$,

$$T_1(z) = \frac{B_1(z)}{A_1(z)} = -C(zI - A)^{-1}B + D, \quad (7)$$

где полиномы $B_1(z)$ и $A_1(z)$ принимают вид

$$B_1(z) = b_0 z^{N_u} + b_1 z^{N_u-1} + \dots + b_{N_u},$$

$$A_1(z) = z^{N_y} + a_1 z^{N_y-1} + \dots + a_{N_y}.$$

3. Адаптивные алгоритмы экономического прогнозирования

Пусть на наблюдаемый сигнал $y(n)$ накладывается белый гауссовский шум $\xi(n)$ с нулевым средним и постоянной дисперсией

$$z(n) = y(n) + \xi(n), \quad (8)$$

$$E[\xi(n)] = 0, \quad E[\xi^2(n)] = \sigma_\xi^2 < \infty.$$

Подстановка $y(n)$ из (8) в (2) приводит к выражению

$$z(n) = \Phi^T(n) \theta + \xi(n), \quad (9)$$

в котором $\Phi(n)$ — вектор наблюдений, θ — вектор параметров объекта

$$\Phi^T(n) = [z(n-1) - \xi(n-1), \dots, z(n-N_z) - \xi(n-N_z), u(n), \dots, u(n-N_u)],$$

$$\theta^T = [-a_1, \dots, -a_{N_y}, b_0, \dots, b_{N_u}],$$

для описываемого случая $N_z = N_y = N_\xi$.

Рассмотрим линейную модель оценки

$$\hat{z}(n) = \Phi^T(n) \hat{\theta}, \quad (10)$$

где $\hat{z}(n)$ — выход объекта, а $\hat{\theta}$ — вектор параметров модели

$$\hat{\theta} = [-\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{N_y}, \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_{N_u}] = [\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{N_y}, \hat{\theta}_{N_y+1}, \dots, \hat{\theta}_{N_S}],$$

причем $N_S = N_y + N_u + 1$.

Пусть $\hat{e}(n)$ — ошибка оценки — определяется как

$$\hat{e}(n) = z(n) - \Phi^T(n) \hat{\theta}. \quad (11)$$

Неизвестные параметры уравнения (9) можно определить как решение задачи минимизации функционала [7-9]

$$J(\hat{\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E \{ \hat{e}^T(n) \hat{e}(n) \}}{1 + \hat{a}^T \hat{a} + \hat{b}^T \hat{b}}, \quad (12)$$

где E — символ математического ожидания; $\hat{a} = [-\hat{a}_1, \dots, -\hat{a}_{N_y}]^T$; $\hat{b} = [\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_{N_u}]^T$.

Вектор $\hat{\theta}$, минимизирующий критерий (12), найдем из уравнений

$$\nabla_{\hat{\theta}} J(\hat{\theta}) = \frac{\partial J(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}_j} = 0, \quad j = 1, \dots, N_S. \quad (13)$$

Продифференцировав (12) по $\hat{\theta}_j$ и подставив результат в (15), получим адаптивный алгоритм оценки вектора параметров θ

$$\hat{\theta}[n] = \hat{\theta}[n-1] - I \gamma[n] \operatorname{sign} \nabla_{\hat{\theta}} \left\{ \frac{(z(n) - \Phi^T(n) \hat{\theta})^T (z(n) - \Phi^T(n) \hat{\theta})}{1 + \hat{a}^T \hat{a} + \hat{b}^T \hat{b}} \right\}, \quad (14)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

где $I - N_S \times N_S$ — единичная матрица,

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ +1 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (15)$$

и последовательность положительных действительных чисел $\gamma[n]$ удовлетворяет условиям [6, 10]

$$\gamma[n] \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma[n] = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^p[n] < \infty \quad \text{для некоторого } p \geq 2 \quad (16)$$

Так как нельзя предвидеть будущее, предполагают, что величина $\Phi(n)$ измерима. При прогнозе на один шаг минимизируется "цена" $(\Phi(n) - \Phi(n)^P)^2$, где $p \geq 1$

$$\hat{\Phi}^T(n) = [z(n-1) - \hat{\xi}(n-1) \dots z(n-N_z) - \hat{\xi}(n-N_z) u(n) \dots u(n-N_u)]. \quad (17)$$

В (16) все оценки в момент n , $\hat{\xi}(n)$ и $\hat{\Phi}(n)$ обозначаются через $\xi(n)$ и $\Phi(n)$ соответственно. Тогда алгоритм оценивания вектора неизвестных параметров формулируется в рекуррентном виде

$$\hat{\theta}(n) = \hat{\theta}(n-1) + P(n) \hat{\Phi}(n) [z(n) - \hat{\Phi}^T(n) \hat{\theta}(n-1)], \quad (18)$$

$$P(n) = P(n-1) - \frac{P(n-1) \hat{\Phi}(n) \hat{\Phi}^T(n) P(n-1)}{1 + \hat{\Phi}^T(n) P(n-1) \hat{\Phi}(n)}, \quad (19)$$

Уравнение прогнозирования на N шагов имеет вид

$$y(n+N) = - \sum_{i=0}^{N_y} \hat{a}_i y(n+N-i) + \sum_{i=0}^{N_u} \hat{b}_i u(n+N-i), \quad (20)$$

где $\hat{a}_i, \hat{b}_i$ — оценки, найденные либо по (14), либо по алгоритму (18) и (19).

В заключение отметим, что рассматриваемый в данной работе адаптивный подход является некоторой попыткой дальнейшего обобщения известных работ, опубликованных в [1-3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров И.Г. Адаптация и минимальный подход в экономических задачах прогнозирования временных рядов // Экономика и мат. методы. 1989. Т. XXV. Вып. 5.
2. Горелик Н.А., Френкель А.А. Адаптация при прогнозировании экономических показателей методом экспоненциального сглаживания // Экономика и мат. методы. 1981. Т. XVII. Вып. 6.
3. Горчаков А.А. К вопросу классификации адаптивных методов краткосрочного экономического прогнозирования // Проблемы применения экономико-математических методов в управлении народным хозяйством. М.: МЭСИ, 1981.
4. Устойчивость адаптивных систем. М.: Мир, 1989.
5. Goodwin G.C., Sin K.S. Adaptive Filtering Prediction and Control. New Jersey. 1984.
6. Цыпкин Я.З. Оптимальные адаптивные системы управления // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 5.
7. Крянев А.В. Статистическая форма регуляризованного метода наименьших квадратов А.Н. Тихонова // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 4.
8. Жданов А.Н. Оптимальная регуляризация решений приближенных стохастических систем линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30. № 10.
9. Жданов А.Н. Решение некорректных стохастических линейных алгебраических уравнений регуляризованным методом максимального правдоподобия // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 9.
10. Wei C.Z. Multivariate adaptive stochastic approximation // The Annals Statist. 1987. V. 15. N 3.

Поступила в редакцию
11 III 1991