МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

РАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕХОДА ОТ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ ЭКОНОМИКИ К КОНКУРЕНТНОМУ РЫНКУ*

© 1994 г. Аркин В.И., Сластников А.Д.

(Москва)

Работа посвящена проблеме моделирования смены одного экономического механизма другим. В рамках общей теории равновесия строится модель перехода от централизованной (бюджетно-регулируемой) экономики к конкурентному рынку и доказывается существование равновесного переходного процесса, позволяющего в определенном смысле "адаптировать" технологический выбор участников к смене экономического механизма.

1. ВВЕДЕНИЕ

Объектом изучения является экономика, состоящая из конечного числа участников, которые производят или потребляют определенные виды товаров (продуктов) и услуг. Каждый потребитель обладает своей системой предпочтений (функцией полезности), а производитель характеризуется допустимым технологическим множеством (пары "затраты – выпуск"). Считается, что все продукты соизмеримы, т.е. имеют цены, а любой участник в каждый момент времени обладает определенной суммой денег (бюджетом).

Исследования будут проводиться в рамках динамических моделей равновесия. Однако в отличие от большинства работ по этой тематике (например, [1–5]) мы вводим бюджетные ограничения не только для потребителей, но и для производителей. Такой подход позволяет связать разные принципы формирования бюджетов участников с различными механизмами функционирования экономики и поставить задачу перехода от одного экономического механизма к другому..

Мы будем рассматривать следующие два механизма.

Первый предполагает наличие в системе некоторого центрального планирующего органа ("Центра") и отождествляется с государственным регулированием экономики. Функционирование системы при этом описывается так.

Пусть в некоторый момент t производители выпустили продукцию. Центр назначает на нее цены и определяет общий бюджет экономики как стоимость всех товаров, выпущенных в момент времени t. Этот бюджет распределяется далее между потребителями и производителями в соответствии с некоторыми приоритетами Центра. Потребитель, используя выделенный ему бюджет, покупает по установленным ценам набор продуктов с максимальной полезностью. Производитель выбирает производственный процесс (пару "затраты – выпуск")**, покупая в рамках своих бюджетных

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-06-10356).

** Здесь, как обычно, затраты относятся к моменту t, а выпуск – к $t+1$.

ограничений вектор затрат по существующим в момент t ценам так, чтобы максимизировать стоимость выпуска в ценах следующего момента $t + 1$. Описанная ситуация далее повторяется.

При втором механизме функционирование системы происходит в отсутствие Центра, а его распределительные функции берет на себя конкурентный рынок. При этом доход производителя в момент t образуется только за счет денег, вырученных от продажи его собственной продукции, выпущенной (и реализованной) в этот момент по ценам, сложившимся на рынке. Этот доход разбивается на две части. Одна распределяется между потребителями в виде дивидендов по акциям, имеющимся у потребителя в данном предприятии, оставшаяся часть используется в процессе воспроизводства ресурсов для следующего производственного цикла. При этом производственный процесс выбирается из условия максимизации дохода к концу следующего периода. Бюджет (доход) потребителя складывается из суммы дивидендов по акциям тех предприятий, которыми он владеет, а его спрос формируется путем максимизации функции полезности в рамках полученного дохода.

Предположим теперь, что система в моменты времени $t < 0$ функционировала в соответствии с централизованным механизмом и в момент $t = 0$ принято решение о необходимости радикальных изменений, связанных с переходом к конкурентному рынку. Мотивы этого решения здесь не обсуждаются, как и вопрос о том, какой из механизмов "лучше". Предметом дальнейшего рассмотрения является построение переходного процесса, обладающего рядом "хороших" свойств.

Остановимся на возможных вариантах перехода. Первый – это мгновенный неожиданный ("шок"), при котором все участники, находясь в момент t в рамках централизованной экономики, в момент $t + 1$ оказываются в рамках конкурентного рынка. Поскольку в момент t участники не знают о грядущем переходе и ориентируются на бюджетное финансирование, то в момент $t + 1$ у некоторых производителей может быть нулевой (или очень малый) доход, что автоматически вынуждает его свертывать производство (ведет к банкротству). В этом случае потребителя от нулевого бюджета может спасти только наличие у него акций производителей с ненулевым доходом или некоторой собственности. Таким образом, в варианте шокового перехода ситуация равновесия может сопровождаться банкротством участников. Второй вариант перехода также мгновенный, но объявленный. Другими словами, участникам в точности известно, что в момент $t + 1$ система окажется в рамках конкурентной экономики. В этом случае возможно вообще отсутствие равновесия, например, связанное с возникновением ажиотажного спроса и потребности в таких продуктах, которые не производились в централизованной экономике. Отметим, что оба варианта мгновенного перехода, как правило, сопровождаются резким скачком цен. Упомянутые эффекты иллюстрируются на примере, изложенном в разд. 7.

Рассмотрим теперь вариант постепенного перехода, который и является предметом нашего исследования.

Качественно этот вариант описывается следующим образом. Государство (Центр) в некоторый момент времени, скажем $t = 0$, объявляет о возможной в будущем смене экономического механизма, не фиксируя точно, когда это произойдет. С точки зрения участника, этот момент является случайной величиной. Таким образом, в каждый момент t имеется вероятность того, что смена экономического механизма произойдет в момент $t + 1$. Производители, учитывая данное обстоятельство, при выборе технологического способа на интервале $(t, t + 1)$ естественно должны ориентироваться как на "государственные", так и на рыночные цены в момент $t + 1$. Основная гипотеза о поведении производителя состоит в том, что при выборе технологического способа он максимизирует свой будущий доход по средневзвешенным ценам, в которых в качестве "весов" берутся условные вероятности смены экономического механизма в следующий момент времени (некоторое обоснование этой гипотезы см. в разд. 6). Предлагаемый переходный процесс свободен от упомянутых недостатков мгновенного перехода и гарантирует при соответствующих условиях равновесные траектории с положительными бюджетами для всех участников. Отметим, что предлагаемый вариант перехода обеспечивает также постепенную перестройку (адаптацию) планов производителей к рыночным ценам.

Дальнейшее изложение материала построено следующим образом. В разд. 3 приводится один из вариантов централизованной экономики и показывается, что за счет выбора цен можно достигнуть равенства спроса и предложения. В разд. 4 строится модель конкурентной рыночной экономики, для которой тоже доказывается возможность ее равновесного функционирования. В разд. 5 предлагается модель переходного процесса, отличительными чертами которого являются баланс спроса и предложения, а также изменение структуры производства. Оптимальные свойства равновесных траекторий и некоторые аргументы в пользу предлагаемой гипотезы о поведении производителей на переходном периоде рассматриваются в разд. 6. Эффекты, которые могут возникать в системе при различных вариантах перехода (в том числе, "шоковых"), продемонстрированы на примере, описанном в разд. 7.

2. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Будем рассматривать замкнутую экономическую систему, функционирующую в дискретные моменты времени $t = 0, 1, ..., T$, состояние которой характеризуется набором l различных видов товаров (продуктов). Имеется конечное число участников, разделенных на множества I производителей и J потребителей. Один и тот же участник может одновременно выступать и как производитель и как потребитель определенного набора продуктов.

Технологические возможности *производителей*, которых мы помечаем индексом i, $i \in I$, описываются в период $t, t+1$ (в дальнейшем t) множеством $Q_t^i \subseteq R_+^l \times R_+^l$ пар "затраты – выпуск" (x, y), при этом затраты x относятся к моменту t, а выпуск y к $t+1$.

Потребители (индекс j, $j \in J$) характеризуются в момент t функциями полезности $u_t^j(c)$, заданными на множестве возможных потребительских благ $C_t^j \subseteq R_+^l$.

Как обычно в таких моделях, будем предполагать, что: 1) неограниченные (по всем координатам) множества Q_t^i выпуклы, замкнуты, содержат точку (0,0) и локально ограничены (т.е. для любого ограниченного A множество $\left\{y:(x,y) \in Q_t^i,\ x \in A\right\}$ ограничено); 2) множества C_t^j выпуклы, замкнуты, $0 \in C_t^j$; 3) неотрицательные функции u_t^j непрерывны и квазивогнуты (т.е. $u_t^j\left(\alpha c^1 + (1-\alpha)c^2\right) \geqslant \min\left\{u_t^j(c^1), u_t^j(c^2)\right\}$, $\forall\, c^1, c^2 \in C_t^j$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$).

Примем следующее: для векторов $x^k = \left(x_1^k, \dots, x_l^k\right)$, $k = 1, 2$, неравенство $x^1 \geqslant x^2$ означает $x_i^1 \geqslant x_i^2\ \forall i$; $x^1 > x^2$ означает $x^1 \geqslant x^2$ и $x^1 \neq x^2$, а $x^1 \gg x^2 - x_i^1 > x_i^2\ \forall i$.

3. МОДЕЛЬ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ БЮДЖЕТНО-РЕГУЛИРУЕМОЙ ЭКОНОМИКИ

Опишем поведение участников в экономической системе с централизованным бюджетным регулированием. В начале каждого периода времени централизованно устанавливаются бюджеты участников в зависимости от совокупного дохода всей системы в предыдущий период. Далее участники действуют в течение единичного интервала времени самостоятельно, но в рамках своих бюджетных ограничений. Будем называть такую модель централизованной экономикой (ЦЭ).

Пусть p_t – неотрицательный вектор цен на продукты в момент t, когда производителям и потребителям выделяются бюджеты ρ_t^i, $i \in I$ и π_t^j, $j \in J$. Задачей производителя является максимизация дохода (стоимости выпуска) в конце текущего интервала времени, а задачей потребителя – максимизация текущей полезности потребления при соответствующих бюджетных ограничениях, т.е.

$$p_{t+1}y \to \max, \tag{1}$$

$$(x, y) \in Q_t^i, \quad p_t x \leqslant \rho_t^i, \quad i \in I,$$

$$u_t^j(c) \to \max, \tag{2}$$

$$c \in C_t^j, \quad p_t c \leqslant \pi_t^j, \quad j \in I,$$

где цены p_{T+1} заданы.

Механизмом распределения бюджетов в этой модели будет распределение: $\rho_t^i(K) = \alpha_t^i K_t$, $\pi_t^j(K) = \beta_t^j K_t$, где коэффициенты α_t^i, β_t^j характеризуют "приоритеты" участников (с точки зрения Центра), а K_t – совокупный доход в системе к моменту t.

Функционирование системы происходит так. В момент $t = 0$ по заданным начальным состояниям $(y_0^i,\ i \in I)$ определяется совокупный бюджет $K_0 = \sum_i p_0 y_0^i$ и, следовательно ρ_0^i и π_0^j. Зная эти бюджеты, участники решают задачи (1) и (2) при $t = 0$. На основе полученных решений (x_0^i, y_1^i) строится совокупный доход в следующий момент времени $K_1 = \sum_i p_1 y_1^i$, определяются бюджеты ρ_1^i, π_1^j и т.д.

Равновесием в модели ЦЭ на конечном интервале времени T с начальными состояниями $(y_0^i, i \in I)$ называется набор $\left(\left(\hat{x}_t^i, \hat{y}_{t+1}^i\right), \hat{c}_t^j, \hat{p}_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ i \in I,\ j \in J\right)$, где $\left(\hat{x}_t^i, \hat{y}_{t+1}^i\right) \in Q_t^i$, $\hat{c}_t^j \in C_t^j$, $\hat{p}_t > 0$ удовлетворяют при $0 \leqslant t \leqslant T$ условиям

$$\hat{p}_{t+1}\hat{y}_{t+1}^i \geqslant \hat{p}_{t+1}y \ \forall\, (x, y) \in Q_t^i : \hat{p}_t x \leqslant \hat{\rho}_t^i, \quad \hat{p}_{T+1} = p_{T+1}, \tag{3}$$

$$u_t^j(\hat{c}_t^j) \geqslant u_t^j(c) \ \forall\, c \in C_t^j : \hat{p}_t c \leqslant \hat{\pi}_t^j, \tag{4}$$

$$\hat{\rho}_t^i = \alpha_t^i \hat{K}_t, \quad \hat{\pi}_t^j = \beta_t^j \hat{K}_t, \quad \hat{K}_t = \textstyle\sum_i \hat{p}_t \hat{y}_t^i, \quad \hat{y}_0^i = y_0^i, \tag{5}$$

$$\textstyle\sum_j \hat{c}_t^j + \sum_i \hat{x}_t^i = \sum_i \hat{y}_t^i. \tag{6}$$

Соотношения (3), (4) означают, что $(\hat{x}_t^i, \hat{y}_{t+1}^i)$ и $\hat{c}_t^j$ являются решениями соответственно задач производителя и потребителя при системе цен $\hat{p}_t$ и бюджетах $\hat{\rho}_t^i$ и $\hat{\pi}_t^j$; (5) – бюджеты участников распределяются из общего дохода в конце предыдущего периода; (6) – условие материального баланса.

Для того чтобы доказать существование равновесия в такой модели, нам понадобятся некоторые дополнительные (но не слишком ограничительные) предположения, которые должны выполняться при всех $0 \leqslant t \leqslant T$:

(P1) существуют технологические процессы $\left(\overset{0}{x}{}_t^i, \overset{0}{y}{}_{t+1}^i\right) \in Q_t^i$, такие что $\sum_i \overset{0}{y}{}_{t+1}^i \geqslant 0$ (в каждый момент времени любой продукт может быть кем-то произведен);

(P2) для любых $i \in I$ и $(x, y) \in Q_t^i$ найдется процесс $(x', y') \in Q_t^i$, такой, что $y' > y$ (ненасыщаемость производителей);

(C1) для любого s, $1 \leqslant s \leqslant l$, найдется $j \in J$, такой, что функция $u_t^j(c_1, \ldots, c_l)$ строго монотонна по c_s (ненасыщаемость потребления каждого продукта);

(C2) для любых $j \in J$ и $c \in C_t^j$ найдется $c' \in C_t^j$, такой, что $u_t^j(c') > u_t^j(c)$ (ненасыщаемость потребителей);

(D) $\alpha_t^i, \ \beta_t^j > 0, \ \sum_i \alpha_t^i + \sum_j \beta_t^j = 1.$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (P1) – (D). *Тогда для любых начальных состояний* ($y_0^i, \ i \in I$) *таких, что* $\sum_i y_0^i \geqslant 0$, *существует равновесие в модели* ЦЭ *с положительными ценами* ($\hat{p}_t \gg 0$).

Для доказательства этой и аналогичных теорем мы используем следующее обобщение известной леммы Гейла из [6].

В соответствии с [6], отображение $F: X \to 2^Y$, где X и Y – конечномерные множества, назовем *стандартным*, если оно выпуклозначно, замкнуто (т.е. из $x^n \to x \in X$, $y^n \to y, \ y^n \in F(x^n)$ вытекает $y \in F(x)$) и отображает компакты из X в компакты.

Пусть $\sigma = \left\{x = (x_1, \ldots, x_l) \in R_+^l : |x| := x_1 + \ldots + x_l = 1\right\}$ – единичный симплекс в R_+^l, $\Delta = \operatorname{rint} \sigma = \{x \in \sigma : x \gg 0\}$, $P_m = \Delta \times \ldots \times \Delta$ – декартово произведение m открытых симплексов Δ.

Теорема 2. *Пусть* $F: P_m \to 2^{R^{lm}}$ – *стандартное отображение и выполнены следующие условия:*

1) *для любых* $p_t^n \in \Delta, \ \ p_t^n \to p_t, \ \ 1 \leqslant t \leqslant m$, *где* $p_r \in \sigma \setminus \Delta$ *для некоторого* r, *и* $x^n = \left(x_1^n, \ldots, x_m^n\right) \in F\left(p_1^n, \ldots, p_m^n\right)$ *существуют* t *и* s, $1 \leqslant t \leqslant m, \ 1 \leqslant s \leqslant l$, *такие, что* $p_{t,s} = 0$ *и* $\limsup\limits_n x_{t,s}^n > 0$;

2) $p_t x_t = 0$ *для любых* $p = (p_1, \ldots, p_m) \in P_m, \ \ (x_1, \ldots, x_m) \in F(p), \ \ 1 \leqslant t \leqslant m$.

Тогда $0 \in F(P_m)$, *т.е.* $0 \in F(\hat{p})$ *для некоторого* $\hat{p} \in P_m$.

Для $m = 1$ теорема доказана в [6], при произвольном в [7].

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что, не теряя общности, можно считать множества Q_t^i и C_t^j ограниченными. В самом деле, пусть $\left(\hat{p}_t, \left(\hat{x}_t^i, \hat{y}_{t+1}^i\right), \ \ \hat{c}_t^j, \ \ i \in I, \ \ j \in J, \ \ 0 \leqslant t \leqslant T\right)$ – состояние равновесия с начальной точкой ($y_0^i, i \in I$). Тогда, согласно (6), имеем

$$\hat{x}_0^i \leqslant \sum_i y_0^i, \quad \hat{c}_0^j \leqslant \sum_i y_0^i, \quad i \in I, \quad j \in J,$$

$$\hat{y}_1^i \leqslant b_1, \quad \hat{x}_1^i \leqslant d_1, \quad \hat{c}_1^j \leqslant d_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\hat{y}_t^i \leqslant b_t, \quad \hat{x}_t^i \leqslant d_t, \quad \hat{c}_t^j \leqslant d_t,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

для некоторых $b_t, d_t \gg 0$, которые существуют в силу локальной ограниченности технологий Q_t^i. Таким образом, найдутся векторы $\hat{x}$ и $\hat{y}$ такие, что $x_t^i \leqslant \hat{x}, \quad \hat{y}_{t+1}^i \leqslant \hat{y} \, \forall t$ и i. Поэтому достаточно ограничиться лишь технологиями $\hat{Q}_t^i = \left\{(x, y) \in Q_t^i : \hat{x}, y \leqslant \hat{y}\right\}$ и множествами потребительских благ $\hat{C}_t^j = \left\{c' \in C_t^j : c \leqslant \hat{c}\right\}$, а вектор $\hat{c}$ выберем так, чтобы

$$\hat{c} \gg \hat{y} N, \tag{7}$$

где N – общее количество производителей.

Займемся теперь построением функции избыточного спроса (ФИС). Из структуры задач участников (1) и (2) и их бюджетов легко видеть, что достаточно ограничиться ценами p_t из симплекса σ. Через $P = \Delta \times \ldots \times \Delta$ обозначим произведение $T + 1$ открытых симплексов. Для $p = (p_0, \ldots, p_T) \in P$ обозначим $p^t = (p_k, \ 0 \leqslant k \leqslant t)$.

Возьмем произвольное $p=(p_0, ..., p_T) \in P$ и будем строить ФИС последовательно, шаг за шагом.

Положим $K_0 = \sum_i p_0 y_0^i$, $\rho_0^i(p^0)=\alpha_0^i K_0$, $\pi_0^j(p^0)=\beta_0^j K_0$ и определим $\psi_0^i(p^i)$ как множество решений $(\tilde{x}_0^i, \tilde{y}_1^i)$ задачи производителя (1) при $t=0$ и ценах p^1. Аналогично $\varphi_0^j(p^0)$ – множество оптимальных решений задачи потребителя (2) при $t=0$ и ценах p^0. Далее положим $K_1 = \sum_i p_1 \tilde{y}_1^i$, где $\left(\tilde{x}_0^i, \tilde{y}_1^i\right) \in \psi_0^i(p^1)$, $\rho_1^i(p^1)=\alpha_1^i K_1$, $\pi_1^j(p^1)=\beta_1^j(K_1)$. Найдем $\psi_1^i(p^2)$ и $\varphi_1^j(p^1)$ как на первом шаге. Продолжая этот процесс, последовательно вычисляем суммарный доход $K_t = \sum_i p_t \tilde{y}_t^i$, где $\left(\tilde{x}_{t-1}^i, \tilde{y}_t^i\right) \in \psi_{t-1}^i(p^t)$, бюджеты $\rho_t^i(p^t)$ и $\pi_t^j(p^t)$, $t \leqslant T$ и т.д.

ФИС определяется теперь как $\chi(p) = (\chi_0, ..., \chi_T)$, где $\chi_t = \sum_j \tilde{c}_t^j + \sum_i \tilde{x}_t^i - \sum_i \tilde{y}_t^i$, $\tilde{c}_t^j \in \varphi_t^j(p^t)$, $\left(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{t+1}^i\right) \in \psi_t^i\left(p^{t+1}\right)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Покажем, что $\chi(p)$ – стандартное отображение P в $2^{R^{l(T+1)}}$. Выпуклость значений χ следует из выпуклости множеств Q_t^i и C_t^j. Для доказательства замкнутости отображения используем следующее утверждение.

Лемма. *Пусть X и Y – конечномерные множества, причем Y выпукло и замкнуто, а F и g – непрерывные функции на $X \times Y$, причем $g(x, y)$ выпукла по y. Тогда если для любого $x \in X$ множество $D(x)=\{y \in Y: g(x,y) \leqslant 0\}$ ограничено и $g(x,y')<0$ при некотором $y' \in Y$, то функция $\Phi(x) = \max\limits_{y \in D(x)} F(x,y)$ непрерывна, а отображение $G(x)=\{y^* \in D(x): F(x,y^*)=\Phi(x)\}$ замкнуто.*

Доказательство. В силу известной теоремы о максимуме (см., например [8]), достаточно убедиться в непрерывности отображения $D(x)$. Замкнутость его вытекает из непрерывности функции g. Пусть теперь $x_n \to x$, $y \in D(x)$, т.е. $g(x, y) \leqslant 0$. Положим $y_n = \vartheta_n y + (1-\vartheta_n)y'$, где $g(x,y')=-\varepsilon<0$, $0<\vartheta_n \leqslant 1$. Тогда $y_n \in Y$ и $g(x_n,y_n) \leqslant \vartheta_n g(x_n,y)+(1-\vartheta_n)g(x_n,y') \leqslant \vartheta_n \delta_n^1 + (1-\vartheta_n)(-\varepsilon+\delta_n^2)$, $\delta_n^1, \delta_n^2 \to 0$. При $\vartheta_n = (\varepsilon - \delta_n^1)/(\varepsilon+\delta_n^1-\delta_n^2)$ имеем $g(x_n,y_n) \leqslant 0$, т.е. $y_n \in D(x_n)$ и $y_n \to y$. Полунепрерывность снизу, а с ней и вся лемма доказаны.

Вернемся к доказательству теоремы. Из положительности бюджетов $\rho_0^j(p^0)$ и $\pi_0^j(p^0)$ и того факта, что множества Q_t^i и C_t^j содержат 0, из леммы 1 следует, что отображения $\psi_0^i(p^1)$ и $\varphi_0^j(p^0)$ замкнуты, а функции $\nu_1^i(p^1)=p_1 \tilde{y}_1^i$, где $(\tilde{x}_0^i, \tilde{y}_1^i) \in \psi_0^i(p^1)$, непрерывны. Продолжая последовательно применять лемму 1, легко получить, что отображения $\psi_t^i(p^{t+1})$ и $\varphi_t^j(p^t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, замкнуты. Отсюда $\chi(p)$ – замкнутое отображение. Далее образ компакта будет компактен в силу замкнутости отображения и замечания о возможности рассматривать ограниченные множества $\hat{Q}_t^i$ и $\hat{C}_t^j$. Таким образом, χ – стандартное отображение.

Покажем, что выполнены условия 1) и 2) теоремы 2. Пусть $(p_0(n),\dots,p_T(n)) \to (p_0,\dots,p_T)$, где $p_t \in \sigma \setminus \Delta$ для некоторого t. Положим $r=\min\{t\colon p_t \in \sigma \setminus \Delta\}$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $r = 0$, т.е. $p_{0,s}=0$ для некоторого s, и $\eta_0(n)=\Sigma_j \tilde{c}_0^j + \Sigma_i \tilde{x}_0^i - \Sigma_i y_0^i$, где $\tilde{c}_0^j \in \varphi_0^j(p^0(n))$, $(\tilde{x}_0^i, \tilde{y}_1^i) \in \psi_0^i(p^1(n))$. По условию (С1) найдется $j \in J$, такое, что

$u_0^j(c_1,\dots,c_l)$ строго монотонна по c_s. Тогда

$$u_0^j(\tilde{c}_0^j) = \max\{u_0^j(c)\colon\ c = (c_1,\dots,c_l) \in \tilde{C}_0^j,$$

$$p_0(n)c = \Sigma_{k\neq s} p_{0,k}(n)c_k + p_{0,s}(n)c_s \leqslant \pi_0^j(n)\},$$

где $\pi_0^j(n) = \beta_0^j \Sigma_i p_0(n) y_0^i$. Поскольку $\Sigma_i y_0^i \geqslant 0$ и $p_0(n) \to p_0 > 0$, то $\lim_n \pi_0^j(n) > 0$ и в силу строгой монотонности u_0^j нетрудно показать, что $c_{0,s}^j \to \hat{c}_s$, где $\hat{c}_s$ определено в (7). Поэтому $\lim_n \sup \eta_{0,s}(n) \geqslant \hat{c}_s - \Sigma_i y_0^i > 0$.

2) Пусть $r \geqslant 1$ и $p_{r,s} = 0$, $\eta_t(n) = \Sigma_j \tilde{c}_t^j + \Sigma_i \tilde{x}_t^i - \Sigma_i \tilde{y}_t^i$, где $\tilde{c}_t^j \in \varphi_t^j(p^t(n))$, $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{t+1}^i) \in \in \psi_t^i(p^{t+1}(n))$. Возьмем $j \in J$, такое, что $u_r^j(c)$ – строго монотонна по c_s, и процессы $(\overset{0}{x}{}_t^i, \overset{0}{y}{}_{t+1}^i)$, $t = 0, \dots, r-1$, из условия (P1). Поскольку $p_t \geqslant 0$ при $t \leqslant r-1$, то для некоторых $0 < \vartheta_t < 1$ и всех достаточно больших n $\vartheta_t p_t(n) \overset{0}{x}{}_t^i \leqslant \alpha_t^i \Sigma_i p_t(n) \overset{0}{y}{}_t^i$, $i \in I$, $0 \leqslant t \leqslant r-1$, $\overset{0}{y}{}_0^i = y_0^i$. Тогда имеем $\vartheta_0 p_0(n) \overset{0}{x}{}_0^i \leqslant \rho_0^i(n)$ и, значит, $p_1(n)\tilde{y}_1^i \geqslant \geqslant \vartheta_0 p_1(n) \overset{0}{y}{}_1^i$. Отсюда $\vartheta_0 \vartheta_1 p_1(n) \overset{0}{x}{}_1^i \leqslant \rho_1^i(n)$. Продолжая эту цепочку, получим $\lambda p_{r-1}(n) \overset{0}{x}{}_{r-1}^i \leqslant \rho_{r-1}^i(n)$, где $\lambda = \vartheta_0 \dots \vartheta_{r-1}$. Отсюда $p_r(n)\tilde{y}_r^i \geqslant \lambda p_r(n) \overset{0}{y}{}_r^i$ и $\pi_r^j(n) \geqslant \geqslant \lambda \beta_t^j \Sigma_i p_t(n) \tilde{y}_t^i$. Следовательно, $\lim_n \inf \pi_r^j(n) > 0$ и аналогично случаю 1) $\lim_n \sup \eta_{r,s}(n) \geqslant \hat{c}_s - \hat{y}_s > 0$. Таким образом, условие 1) теоремы 2 справедливо.

Для проверки условия 2) заметим, что если $\tilde{c}_t^j \in \varphi_t^j(p^t)$, $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{t+1}^i) \in \psi_t^i(p^{t+1})$, то $p_t \tilde{x}_t^i = \rho_t^i(p^t)$, $p_t \tilde{c}_t^j = \pi_t^j(p^t)$. В самом деле, пусть $p_t \tilde{x}_t^i < \rho_t^i(p^t)$. Тогда по (P2) существует $(x, y) \in Q_t^i$, такой что $y > \tilde{y}_{t+1}^i$. При этом для $0 < \vartheta < 1$ процесс $(x_\vartheta, y_\vartheta) = (\vartheta x + (1-\vartheta)\tilde{x}_t^i, \vartheta y + (1-\vartheta)\tilde{y}_{t+1}^i) \in Q_t^i$ и при достаточно малых ϑ $p_t x_\vartheta \leqslant \leqslant \rho_t^i(p^t)$. Но $p_{t+1} y_\vartheta > p_{t+1}\tilde{y}_{t+1}^i$, что противоречит оптимальности $\tilde{y}_{t+1}^i$. Используя (C2), устанавливаем аналогичное свойство и для бюджетов потребителей. Наконец, если $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_T) \in \chi(p)$, то

$$p_t \eta_t = \Sigma_j p_t \tilde{c}_t^j + \Sigma_i p_t \tilde{x}_t^i - \Sigma_i p_t \tilde{y}_t^i = \Sigma_i \pi_t^j(p^t) + \Sigma_i \rho_t^i(p^t) - \Sigma_i p_t \tilde{y}_t^i = 0$$

в силу (D).

Итак, все условия теоремы 2 проверены и из нее сразу следует утверждение теоремы 1.

4. МОДЕЛЬ КОНКУРЕНТНОЙ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ

Опишем другую модель экономической системы с теми же участниками, похожую на предыдущую, но существенно отличающуюся по способу формирования бюджетов. В ней участники сами определяют свои бюджеты на основе доходов от произведенных (и реализованных) товаров в предшествующий период (для производителей) или в соответствии с долями участия в доходах производителей (для потребителей). Будем называть такую модель конкурентной рыночной экономикой (РЭ).

Поведение производителей и потребителей описывается соответственно задачами (1) и (2) с бюджетами ρ_t^i, π_t^j, определяемыми по формулам: $\rho_t^i = (1-\gamma_t^i)p_t y_t^i$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\pi_0^j = p_0\omega_0^j + \Sigma_i \alpha_0^{ij}\gamma_0^i p_0 y_0^i$, $\pi_t^j = \Sigma_i \alpha_t^{ij}\gamma_t^i p_t y_t^i$, $1 \leqslant t \leqslant T$, где $\omega_0^j \in R_+^l$ – начальная собственность потребителя j; γ_t^i, $0 < \gamma_t^i < 1$ – доля дохода производителя i в момент t, выделяемая для потребления, а неотрицательные $\alpha_t^{ij}(\Sigma_j \alpha_t^{ij} = 1)$ – доли участия j потребителя в доходах производителя (распределение дивидендов).

Мы можем определить *равновесие* в модели РЭ на конечном интервале времени аналогично предыдущей модели как набор $((\hat{x}_t^i, \hat{y}_{t+1}^i),\ \hat{c}_t^j,\ \hat{p}_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ i \in I,\ j \in J)$, удовлетворяющий соотношениям (3), (4) с бюджетами $\hat{\rho}_t^i$ и $\hat{\pi}_t^j$, рассчитанными при $p_t = \hat{p}_t$, $y_t^i = \hat{y}_t^i$, а также материальным балансам (6) для $t \geqslant 1$ и

$$\Sigma_j \hat{c}_0^j + \Sigma_i \hat{x}_0^i = \Sigma_i y_0^i + \Sigma_j \omega_0^j.$$

Обозначим $I_t(j) = \{i \in I\colon\ \alpha_t^{ij} > 0\}$ – множество производителей, от которых потребитель j получает положительные дивиденды. Будем предполагать, что для всех $j \in J$ и $0 \leqslant t \leqslant T$ множества $I_t(j)$ не пусты и, кроме того,

(Р3) существуют $(\overset{0}{x}{}_{t-1}^i, \overset{0}{y}{}_t^i) \in Q_{t-1}^i$ такие, что $\Sigma_{i \in I_t} I_t(j)\, \overset{0}{y}{}_t^i \gg 0$ (условие «широкого» распределения акций, т.е. долей доходов производителей у потребителей).

Пусть также выполняется условие

(Е) $\omega_0^j \gg 0$ для всех $j \in J$.

Это требование представляется завышенным и оно действительно может быть ослаблено, если использовать свойства положительности начальных состояний y_0^i. Так, предполагая, что $\Sigma_i y_0^i \gg 0$, можно взять $\omega_0^j = 0\ \ \forall j \in J$. Однако мы специально не будем налагать никаких дополнительных условий на начальные состояния y_0^i, что позволит в дальнейшем использовать эту модель в качестве второго этапа в модели перехода от ЦЭ к РЭ.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* (Р2), (Р3), (С1), (С2), (Е). *Тогда для любых ненулевых начальных состояний* $(y_0^i,\ i \in I)$ *существует равновесие в модели* РЭ *с положительными ценами* $(\hat{p}_t \gg 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема 2 в основном доказывается, как и теорема 1. При этом вектор $\hat{c}$ в (7) надо выбрать так, чтобы $\hat{c} \gg N\hat{y} + \hat{\omega}$, где $\Sigma_j \omega_0^j \leqslant \hat{\omega}$.

Построение ФИС, как и доказательство ее стандартности, проводится по той же схеме, что и выше. Так же совершенно аналогично проверяется условие 2) теоремы 2. Для проверки условия 1), сохраняя обозначения, принятые при доказательстве теоремы 1, возьмем $(p_0(n), \ldots, p_T(n)) \to (p_0, \ldots, p_T)$, где $p_t \in \sigma \setminus \Delta$ для некоторого t и положим $r = \min\{t\colon\ p_t \in \sigma \setminus \Delta\}$.

Если $r = 0$, то найдутся $1 \leqslant s \leqslant l$ и $j \in J$, такие, что $p_{0,s} = 0$, а $u_0^j(c)$ строго возрастает по c_s. По условию (Е) $\lim\limits_n \pi_0^j(n) > 0$ и, как и раньше, $\limsup\limits_n \eta_{0,s}(n) \geqslant \hat{c}_s - \Sigma_i y_0^i - \Sigma_j \omega_0^j \gg 0$.

Пусть $r \geqslant 1$, $p_{t,s} = 0$, при некотором $1 \leqslant s \leqslant l$ и $u_r^j(c)$ строго монотонна по c_s. В силу (Р3) $p_r \overset{0}{y}{}_r^i > 0$ для некоторого $i \in I_r(j)$. Пусть $\eta_0(n) = \Sigma_i \tilde{c}_0^j + \Sigma_i \tilde{x}_0^i - \Sigma_i y_0^i - \Sigma_j \omega_0^j$, $\eta_t(n) = \Sigma_j \tilde{c}_t^j + \Sigma_i \tilde{x}_t^i - \Sigma_i \tilde{y}_t^i$, $t \geqslant 1$.

Так как $p_{r-1} \geqslant 0$, то существует $0 < \vartheta < 1$, такое, что $\vartheta p_{r-1}(n) \overset{0}{x}{}_{r-1}^i \leqslant p_{r-1}(n) \tilde{y}_{r-1}^i$ и, значит, $p_r(n) \tilde{y}_r^i \geqslant \vartheta p_r(n) \overset{0}{y}{}_r^i$. Отсюда $\liminf_n \pi_r^j(n) \geqslant \liminf_n \alpha_r^{ij} \gamma_r^i p_r(n) \tilde{y}_r^i \geqslant \vartheta \alpha_r^{ij} \gamma_r^i p_r \overset{0}{y}{}_r^i$ и, как и выше $\limsup_n \eta_{r,s}(n) \geqslant \hat{c}_s - N\hat{y}_s > 0$. Таким образом, справедливо условие 1) теоремы 2, применение которой и завершает доказательство.

Замечание. Как стало известно авторам, близкая модель рассматривалась в [7].

5. МОДЕЛЬ ПЕРЕХОДА ОТ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ ЭКОНОМИКИ К КОНКУРЕНТНОЙ РЫНОЧНОЙ

Как отмечалось во Введении, в момент $t = 0$ принимается решение о необходимости перехода от централизованной экономики (ЦЭ) к рыночной. При этом возникает проблема: как, оставаясь в рамках ЦЭ, адаптировать систему к новому экономическому механизму.

Предлагается ввести в нее переходный период, во время которого участники (в первую очередь, производители), действуя по правилам ЦЭ, будут менять свое поведение на основе информации о ценах в будущей РЭ и неопределенности момента ее появления.

Длительность переходного периода ϑ рассматривается участниками системы как случайная величина с заданным распределением вероятностей $P\{\vartheta = t\}$, $t = 1, ..., T$. Поведение участников в модели перехода описывается несколько сложнее, чем в предыдущих моделях.

Обозначим $\tau_0 = \max\{t\colon\ P\{\vartheta \geqslant t\} = 1\}$, $\tau_1 = \min\{t\colon\ P\{\vartheta \leqslant t\} = 1\}$. Иными словами, отрезок $[\tau_0, \tau_1]$ – носитель распределения величины ϑ, т.е. минимальный отрезок, содержащий ϑ с вероятностью 1.

Пусть для некоторого τ задана система цен $\{p_t, t \leqslant \tau, p_t(\tau), \tau \leqslant t \leqslant T\}$. Если τ интерпретировать как момент скачка (смена одного экономического механизма другим), то p_t являются ценами на продукты системы в момент t при условии, что в это время она развивается согласно модели ЦЭ, а $p_t(\tau)$ – цены в момент t, если в момент τ произошла смена экономического механизма. Нетрудно понять, что цены p_t корректно определены при $0 \leqslant t \leqslant \tau_1 - 1$, $p_t(\tau)$ при $\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, $\tau \leqslant t \leqslant T$. Аналогичный смысл имеют и бюджеты участников ρ_t^i, π_t^j, $\rho_t^i(\tau)$, $\pi_t^j(\tau)$. Теперь мы будем рассматривать два типа задач для производителя и потребителя в момент t в зависимости от того, какой экономический механизм имеет место в этот период

$$p_{t+1}^* y \to \max, \tag{8}$$

$$(x, y) \in Q_t^i,\ p_t x \leqslant \rho_t^i,\ i \in I,$$

где $q^*{}_{t+1} = p_{t+1}\, q_{t+1} + p_{t+1}(t+1)(1 - q_{t+1})$,

$$q_{t+1} = P\{\vartheta > t+1 \mid \vartheta \geqslant t+1\},$$

$$u_t^j(c) \to \max, \tag{9}$$

$$c \in C_t^j,\ p_t c \leqslant \pi_t^j,\ (j \in J),$$

$$p_{t+1}(\tau) y \to \max, \tag{10}$$

$$
\begin{gathered}
(x,y)\in Q_t^i,\ \ p_t(\tau)x\leqslant\rho_t^i(\tau),\ \ i\in I,\\
u_t^j(c)\to\max,\\
c\in C_t^j,\ \ p_t(\tau)c\leqslant\pi_t^j(\tau),\ \ j\in J
\end{gathered}
\tag{11}
$$

(в момент $T+1$ цены считаются заданными).

Отличие основной задачи производителя в переходный период (8) от аналогичной задачи (1) в модели ЦЭ заключается в том, что производитель должен подсчитывать свой доход в конце текущего периода t по ожидаемым (средневзвешенным) ценам p^*_{t+1}, а не по p_{t+1}. Когда в начале периода t в рамках ЦЭ производитель выбирает технологический процесс, еще не известно, произойдет ли смена экономического механизма к концу этого периода. Вероятность скачка в момент $t+1$ при условии, что он не произошел раньше, есть $1-q_{t+1}$. При этом цены станут равны $p_{t+1}(t+1)$. В момент $t+1$ при отсутствии скачка цены составят p_{t+1}, а вероятность такого события q_{t+1}. Таким образом p^*_{t+1} представляют собой средневзвешенные цены, где в качестве "весов" берутся условные вероятности смены или сохранения экономического механизма в момент $t+1$.

Соотношения (9)–(11) являются обычными задачами участников в соответствующих моделях (ЦЭ для (9) и РЭ для (10), (11)).

Равновесие в переходной модели с начальными состояниями производителей $(y_0^i, i\in I)$ и собственностью потребителя в момент скачка $\left(\omega_t^j,\ j\in J\right)$ определяется как набор $\{((\hat{x}_t^i,\hat{y}_{t+1}^i),\hat{c}_t^j,\hat{p}_t, 0\leqslant t\leqslant\tau_1-1),\ ((\hat{x}_t^i(\tau),\ \hat{y}_{t+1}^i(\tau)),\ \hat{c}_t^j(\tau)\ \hat{p}_t(\tau),\ \tau_0\leqslant\tau\leqslant\tau_1,$ $\tau\leqslant t\leqslant T),\ i\in I,\ j\in J\}$, удовлетворяющий соотношениям

$(\hat{x}_t^i,\hat{y}_{t+1}^i)$ – решение задачи (8) при ценах $\hat{p}_t,\ \hat{p}_{t+1},\ \hat{p}_{t+1}(t+1)$ и бюджете $\hat{\rho}_t^i$; $\hat{c}_t^j$ – решение задачи (9) при ценах $\hat{p}_t$ и бюджете $\hat{\pi}_t^j$; $\hat{\rho}_t^i=\alpha_t^i\hat{K}_t,\ \hat{\pi}_t^j=\beta_t^j\hat{K}_t,\ \hat{K}_t=\Sigma_i\hat{p}_t\hat{y}_t^i$, $\hat{y}_0^i=y_0^i$;

$(\hat{x}_t^i(\tau),\ \hat{y}_{t+1}^i(\tau))$ – решение задачи (10) при ценах $\hat{p}_t(\tau)$ и бюджете $\hat{\rho}_t^i(\tau)$;

$\hat{c}_t^j(\tau)$ – решение задачи (11) при ценах $\hat{p}_t(\tau)$ и бюджете $\hat{\pi}_t^j(\tau)$; $\hat{\rho}_t^i(\tau)=$ $=(1-\gamma_t^i)\hat{p}_t(\tau)\hat{y}_t^i(\tau)$, $\hat{\pi}_t^j(t)=\hat{p}_t(t)\omega_t^j+\Sigma_i\alpha_t^{ij}\gamma_t^i\hat{p}_t(t)\hat{y}_t^i(t)$, $\hat{\pi}_t^j(\tau)=\Sigma_i\alpha^{ij}\gamma_t^i\hat{p}_t(\tau)\hat{y}_j^i(t)$, $\tau+1\leqslant t,\ \hat{y}_t^i(t)=\hat{y}_t^i$; $\Sigma_j\hat{c}_t^j+\Sigma_i\hat{x}_t^i=\Sigma_i\hat{y}_t^i$; $\Sigma_j\hat{c}_t^j(t)+\Sigma_i\hat{x}_t^i(t)=\Sigma_i\hat{y}_t^i+\Sigma_j\omega_t^j$; $\Sigma_j\hat{c}_t^j(\tau)+\Sigma_i\hat{x}_t^i(\tau)=$ $=\Sigma_i\hat{y}_t^i(\tau)$; $\tau+1\leqslant t$.

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения* (P1)–(P3), (C1), (C2), (D). *Тогда для любых начальных состояний производителей* $(y_0^i;\ i\in I)$, *таких, что* $\Sigma_i y_0^i\geqslant 0$, *и положительной собственности потребителей в момент скачка* $(\omega_t^j,\ j\in J)$ *существует равновесие в переходной модели (с положительными ценами* $\hat{p}_t$ *и* $\hat{p}_t(\tau)$*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно комбинирует методы, использованные при доказательствах теорем 1 и 2.

Положим $P=\Delta^{(\tau_1-1)}\prod\limits_{\tau=\tau_0}^{\tau_1}\Delta^{(T-\tau+1)}$. Тогда для $p=((p_t,\ 0\leqslant t\leqslant\tau_1-1),\ (p_t(\tau),$ $\tau_0\leqslant\tau\leqslant\tau_1,\ \tau\leqslant t\leqslant T))\in P$ можно, как и выше, определить последовательно множества $\psi_t^i,\ \varphi_t^j,\ \psi_t^j(\tau),\ \varphi_t^i(\tau)$ и ФИС как $\chi=((\chi_t, 0\leqslant t\leqslant\tau_1-1),\ (\chi_t(\tau),\ \tau_0\leqslant\tau\leqslant\tau_1,\tau\leqslant$

$\leqslant t \leqslant T)$), где

$$\chi_t = \Sigma_j \tilde{c}_t^j + \Sigma_i \tilde{x}_t^i - \Sigma_i \tilde{y}_t^i, \quad (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{t+1}^i) \in \psi_t^i, \quad \tilde{c}_t^j \in \varphi_t^j,$$

$$\chi_t(t) = \Sigma_j \tilde{c}_t^j(t) + \Sigma_i \tilde{x}_t^i(t) - \Sigma_i \tilde{y}_t^i - \Sigma_j \omega_t^j, \ \chi_t(\tau) = \Sigma_j \tilde{c}_t^j(\tau) + \Sigma_i \tilde{x}_t^i(\tau) - \Sigma_i \tilde{y}_t^i(\tau),$$

$$\tilde{c}_t^j(\tau) \in \varphi_t^j(\tau), \quad (\tilde{x}_t^i(\tau), \ \tilde{y}_{t+1}^i(\tau)) \in \psi_t^i(\tau).$$

Используя рассуждения, аналогичные проведенным при доказательствах теорем 1 и 2, можно получить, что χ – стандартное отображение. Проверка условия 1) теоремы 2 проводится так же, как при доказательстве теоремы 1 (в случае, когда $p_t \in \sigma \setminus \Delta$ для некоторого t) или теоремы 3 (когда $p_t \gg 0 \forall t$). Завершение доказательства такое же, как и выше.

6. ОПТИМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАВНОВЕСИЙ

Понятие равновесия в моделях вальрасовского типа традиционно связывают с парето-оптимальностью, которая является выражением принципа, согласно которому ни один участник (потребитель) не может улучшить своего состояния (полезности), не ухудшив состояния другого. В моделях с бюджетными ограничениями, к которым относятся приведенные выше модели ЦЭ и РЭ, равновесие не будет, вообще говоря, парето-оптимальным. Однако, как мы покажем ниже, оно обладает некоторыми "приятными" свойствами и его можно представить как решение динамической оптимизационной модели вида

$$\Sigma_{t=0}^T [U_t(c_t) + F_t(z_t)] \to \max \tag{12}$$

по всем траекториям $c_t \in C_t = \Sigma_j C_t^j$, $z_t = (x_t, y_{t+1}) \in Q_t = \Sigma_i Q_t^i$: $c_t + x_t \leqslant y_t$ с заданным начальным состоянием $y_0 = \Sigma_i y_0^i$. Напомним, что цены $(p_t, 0 \leqslant t \leqslant T)$ называются *стимулирующими* для траектории $(\hat{c}_t, \hat{z}_t)$, если при всех $0 \leqslant t \leqslant T$:

(i) $U_t(\hat{c}_t) - p_t \hat{c}_t = \max\limits_{c \in C_t} [U_t(c) - p_t c]$,

(ii) $F_t(\hat{z}_t) + p_{t+1} \hat{y}_{t+1} - p_t \hat{x}_t = \max\limits_{z \in Q_t} [F_t(z) + p_{t+1} y - p_t x]$, $p_{T+1} = 0$,

(iii) $p_t(\hat{y}_t - \hat{x}_t - \hat{c}_t) = 0$.

Известно, что траектория $(\hat{c}_t, \hat{z}_t)$, стимулируемая некоторыми ценами, оптимальна в задаче (12).

Ниже будем рассматривать общие модели с бюджетными ограничениями (БО), в которых цели участников описываются задачами (1) и (2), где бюджеты ρ_t^i и π_t^j зависят от всей "истории" цен и решений задач производителей, т.е. $\rho_t^i = \rho_t^i(p^t, w^t)$, $\pi_t^j = \pi_t^j(p^t, w^t)$, где $p^t = (p_k, \ 0 \leqslant k \leqslant t)$, $w^t = ((x_k^i, y_{k+1}^i), \ 0 \leqslant k \leqslant t-1, \ i \in I)$, $t \geqslant 1$, $w^0 = (y_0^i, i \in I)$, а $\rho_t^i(\cdot)$ и $\pi_t^j(\cdot)$ – заданные функции. Равновесие в этой модели определяется аналогично равновесию в модели ЦЭ с той лишь разницей, что соотношение (5) заменяется на $\hat{\rho}_t^i = \rho_t^i(\hat{p}^t, \hat{w}^t)$, $\hat{\pi}_t^j = \pi_t^j(\hat{p}^t, \hat{w}^t)$, $\hat{p}^t = (\hat{p}_k, 0 \leqslant k \leqslant t)$, $\hat{w}^t = ((\hat{x}_k^i, \hat{y}_{k+1}^i), \ 0 \leqslant k \leqslant t-1, i \in I), t \geqslant 1$, $\hat{w}^0 = (y_0^i, i \in I)$.

Распределением будем называть набор $((x_t^i, y_{t+1}^i), \ c_t^j, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \ i \in I, \ j \in J)$, такой, что $(x_t^i, y_{t+1}^i) \in Q_t^i$, $c_t^j \in C_t^j$ и $\Sigma_j c_t^j + \Sigma_i x_t^i \leqslant \Sigma_i y_t^i$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 5. *Пусть* $(\hat{p}_t, (\hat{x}_t^i, \hat{y}_{t+1}^i),\ \hat{c}_t^j,\ i \in I,\ j \in J,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ *– равновесие в модели* БО *с начальными соотношениями* $(y_0^i;\ i \in I)$ *и положительными бюджетами* $\hat{\rho}_t^i$ *и* $\hat{\pi}_t^j$. *Тогда, если выполнены условия насыщаемости* (P2), (C2), *то найдутся числа* $\mu_t^j > 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\psi_t^i > -1$, $0 \leqslant t \leqslant T-1$, $\psi_T^i > 0$, *такие, что* $((\hat{x}_t^i, \hat{y}_{t+1}^i),\ \hat{c}_t^j)$ *— оптимальное решение задачи*

$$\Sigma_{t=0}^T [\Sigma_j \mu_t^j u_t^j (c_t^j) + \Sigma_i \psi_t^i \hat{p}_{t+1} y_{t+1}^i] \to \max \tag{13}$$

среди всех распределений $((x_t^i, y_{t+1}^i),\ c_t^j)$ *с начальным состоянием* $(y_0^i;\ i \in I)$, *а* $\hat{p}_t$ *будут стимулирующими ценами для траектории* $(\Sigma_i (\hat{x}_t^i, \hat{y}_{t+1}^i),\ \Sigma_j \hat{c}_t^j,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, *в задаче* (12) *с* $U_t(c_t) = \max\{\Sigma_j \mu_t^j u_t^j (c_t^j):\ c_t^j \in C_t^j,\ \Sigma_j c_t^j = c_t\}$, $F(z_t) = \max\{\Sigma_i \psi_t^i p_{t+1} y_{t+1}^i:$ $(x_t^i, y_{t+1}^i) \in Q_t^i,\ \Sigma_i (x_t^i, y_{t+1}^i) = z_t\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\pi_t^j > 0$, то по теореме Куна–Таккера существуют $\lambda_t^j \geqslant 0$, такие, что для любого $c \in C_t^j$

$$u_t^j(c) - \lambda_t^j \hat{p}_t c \leqslant u_t^j(\hat{c}_t) - \lambda_t^j \hat{\pi}_t^j \leqslant u_t^j(\hat{c}_t) - \lambda_t^j \hat{p}_t \hat{c}_t.$$

Из (C2) следует, что $\lambda_t^j > 0$. Итак, для всех $c_t^j \in C_t^j$

$$U_t(c_t^j, j \in J) - \Sigma_j \hat{p}_t c_t^j \leqslant U_t(\hat{c}_t^j;\ j \in J) - \Sigma_j \hat{p}_t \hat{c}_t^j, \tag{14}$$

где $U_t(c_t^j; j \in J) = \Sigma_j \mu_t^j u_t^j (c_t^j)$, $\mu_t^j = 1/\lambda_t^j$.

Аналогично можно показать, что существуют $\eta_t^j > 0$, такие, что для всех $z_t^i = (x_t^i, y_{t+1}^i) \in Q_t^i$

$$\hat{p}_{t+1} y_{t+1}^i - \eta_t^i \hat{p}_t x_t^i \leqslant \hat{p}_{t+1} \hat{y}_{t+1}^i - \eta_t^i \hat{p}_t \hat{x}_t^i, \quad 0 \leqslant t \leqslant T-1,$$

$$p_{T+1} y_{T+1}^i - \eta_T^i p_T x_T^i \leqslant p_{T+1} \hat{y}_{T+1}^i - \eta_T^i \hat{p}_T \hat{x}_T^i.$$

Следовательно

$$F_t(z_t^i, i \in I) + \Sigma_i (\hat{p}_{t+1} y_{t+1}^i - \hat{p}_t x_t^i) \leqslant F_t(\hat{z}_t^i, i \in I) + \Sigma_i (\hat{p}_{t+1} \hat{y}_{t+1}^i - \hat{p}_t \hat{x}_t^i), \tag{15}$$

$$F_t(z_t^i, i \in I) = \Sigma_i (1 - \eta_t^i) \hat{p}_{t+1} y_{t+1}^i, \quad t \leqslant T-1, \quad F_T(z_T, i \in I) = \Sigma_i (1/\eta_T^i) p_{T+1} y_{T+1}^i.$$

Кроме того, из (6) вытекает

$$\hat{p}_t (\Sigma_i \hat{y}_t^i - \Sigma_i \hat{x}_t^i - \Sigma_j \hat{c}_t^j) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{16}$$

Из (14)–(16) и следует утверждение теоремы.

Используя представление равновесных моделей БО как оптимизационных задач, можно пояснить происхождение структуры цен $\overset{*}{p_t}$ в модели перехода от ЦЭ к РЭ. Пусть модели ЦЭ соответствует задача (12) с какими-то функциями $U_t^1(c)$ и $F_t^1(z)$, а модели РЭ – с функциями $U_t^2(c)$ и $F_t^2(z)$. Если ϑ – момент перехода от ЦЭ к РЭ, то переходная модель, описанная выше, естественным образом ассоциируется с задачей максимизации функционала

$$F_\vartheta [\Sigma_{t=0}^{\vartheta-1} F_t^1 (c_t^1, z_t^1) + \Sigma_{t=\vartheta}^T F_t^2 (c_t^2, z_t^2)],$$

где $F_t^k(c,z) = U_t^k(c) + F_t^k(z)$, $k = 1, 2$, а математическое ожидание F_ϑ берется по распределению случайной величины ϑ. В свою очередь известно, что стимулирующие цены в этой задаче имеют ту же "взвешенную" структуру, что и цены p_t^* в (8) (для более общих оптимизационных моделей со скачком данный факт установлен, например в [9]). Это свойство дает нам основание считать, что цены в предложенной модели перехода имеют "оптимальную" в определенном смысле структуру, а производитель ведет себя "оптимальным" образом.

7. ПРИМЕР ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Ниже мы рассмотрим пример экономики, в которой переход от одного экономического механизма к другому (в духе предыдущих рассмотрений) вызывает существенные изменения в производственной деятельности. Хотя к этому примеру формально неприменимы доказанные выше теоремы (например, мы допускаем здесь нулевые цены), он представляется нам весьма полезным для описания эффектов, возникающих при различных вариантах перехода от одного экономического механизма к другому.

Пусть в системе имеются три продукта (x_1, x_2, x_3) и два участника-производителя с технологиями $Q^1 = \{((x_1, x_2, x_3),\ (y_1, 0, y_3)),\ y_1 \leqslant f_1(x_1, x_2'),\ y_3 \leqslant f_3(x_2'', x_3),\ x_2' + x_2'' = x_2\}$, $Q^2 = \{((x_1, x_2, x_3),\ (0, y_2, 0)),$ где $y_2 \leqslant f_2(x_2)\}$. Задачами участников являются максимизация их доходов при соответствующих бюджетных ограничениях

$$p_{t+1,1} f_1(x_1, x_2') + p_{t+1,3} f_3(x_2'', x_3') \to \max,$$

$$p_{t,1} x_1 + p_{t,2}(x_2' + x_2'') + p_{t,3} x_3 \leqslant \rho_t^1, \tag{17}$$

$$f_2(x_2) \to \max,$$

$$p_{t,2} x_2 \leqslant \rho_t^2,$$

где $p_{t,s}$ – цена продукта s, $s = 1, 2, 3$. С этой системой мы будем связывать модели ЦЭ и РЭ в зависимости от способа формирования бюджетов.

Предположим, что функции f_i, $i = 1, 2, 3$, вогнуты, $f_1(x_1, x_2)$ и $f_3(x_2, x_3)$ строго возрастают по x_2, кроме того, $f_1(x_1, 0) = f_3(0, x_3) = 0$.

Можно показать, что в модели ЦЭ существует равновесие с ценами $\tilde{p}_t = (\tilde{p}_{t,1}, \tilde{p}_{t,2}, 0)$. При этом (17) превращается в статическую задачу

$$f_1(x_1, x_2) \to \max,$$

$$p_{t,1} x_1 + p_{t,2} x_2' \leqslant \rho_t^1$$

и $\tilde{p}_{t,1}$, $\tilde{p}_{t,2}$ будут равновесными ценами в модели обмена с двумя продуктами (x_1, x_2), двумя участниками с функциями полезности $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_2)$ и фиксированными бюджетами α_t^i.

Однако для модели РЭ существует равновесие с ценами $\hat{p}_t = (0, \hat{p}_{t,2}, \hat{p}_{t,3})$. В этом случае задача первого участника превращается в

$$f_3(x_2, x_3) \to \max,$$

$$p_{t,2} x_2 + p_{t,3} x_3 \leqslant \rho_t^1.$$

Поскольку $\rho_t^1 = p_{t,3} y_3^t$, $\rho_t^2 = p_{t,2} y_2^t$, то цены $\hat{p}_{t,2}$, $\hat{p}_{t,3}$ будут равновесными в обычной модели обмена с двумя продуктами (x_2, x_3), двумя участниками с функциями полезности f_3 и f_2 и начальным запасом (y_3^t, y_2^t).

Как видим, поведение первого участника существенно зависит от модели: в ЦЭ он производит только первый продукт, а в РЭ – только третий.

Рассмотрим теперь различные варианты перехода от ЦЭ к РЭ. В случае неожиданного "шока" первый участник остается с нулевым бюджетом, поскольку цена на производимый им первый продукт становится нулевой. Если мгновенный переход объявляется, скажем, в момент $t + 1$, то первый участник, учитывая будущие цены, решает в момент t задачу

$$
\begin{gathered}
f_3(x_2, x_3) \to \max, \\
\tilde{p}_{t,2} x_2 \leqslant \rho_t^1.
\end{gathered} \tag{18}
$$

Если функция f_3 неограничена по x_3, то эта задача не имеет решения. Если же f_3 ограничена и решение $\tilde{x}_3$ отлично от нуля, то равновесия в момент t не существует, так как предложение третьего продукта до этого было нулевым. Таким образом, любой вариант мгновенного перехода в этом примере не приводит к удовлетворительным результатам.

Приведенные эффекты исчезают в рамках предложенной модели перехода. В самом деле, основная задача производителя (8) для первого участника превращается в следующую

$$p_{t+1,1} f_1(x_1, x_2') + (p_{t+1,3} + \hat{p}_{t+1,3}(1 - q_{t+1}) / q_{t+1})$$

$$f_3(x_2'', x_3) \to \max,$$

$$p_{t,1} x_1 + p_{t,2}(x_2' + x_2'') + p_{t,3} x_3 \leqslant \rho_t^1.$$

Для того чтобы установить, что $f_3(\tilde{x}_2'', \tilde{x}_3) > 0$, перепишем последнюю задачу в более общей форме

$$af(x, y) + bg(z, w) \to \max,$$

$$cx + d(y + z) + ew \leqslant \rho,$$

где $b > 0$, поскольку $\hat{p}_{t+1,3} > 0$. Используя метод множителей Лагранжа, нетрудно показать, что если $\partial g(0, w) / \partial z = +\infty$, то оптимальное z^* положительно. Следовательно, если мы предположим, что $\partial f_3(0, x_3) / \partial x_2 = +\infty \forall x_3$, то $f_3(\tilde{x}_2'', \tilde{x}_3)$ на оптимальном решении будет положительно.

Таким образом, в переходном периоде в данном примере участник должен производить положительное количество товара, невыгодного в рамках ПЭ, который окажется выгодным в будущей РЭ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полтерович В.М.* Равновесные траектории экономического роста // етоды функционального анализа в математической экономике. М.: Наука, 1978.
2. *Полтерович В.М.* Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. М.: Наука, 1990.
3. *Bewley T.* An Intergation of Equilibrium Theory and Turnpike Theory // J. Math. Econ. 1982. V. 10. № 3.
4. *Yano M.* The Turnpike of Dynamic General Equilibrium Paths and its Insensitivity to Initial

4. *Yano M.* The Turnpike of Dynamic General Equilibrium Paths and its Insensitivity to Initial Conditions // J. Math. Econ. 1984. V. 13. № 3.
5. *Coles J.* Equilibrium Turnpike Theory with Constant Returns to Scale and Possible Heterogeneous Discount Factors // Int. Econ. Rev. 1985. V. 26. № 3.
6. *Тимохов А.В.* Некоторые теоремы о неподвижной точке // Методы функционального анализа в математической экономике. М.: Наука, 1978.
7. *Тимохов А.В.* Исследования по теории существования экономического равновесия: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1978.
8. *Berge C.* Topological Spaces. N.Y.: McMillan, 1963.
9. *Аркин В.И.* Экономическая динамика с дискретно меняющейся технологией. Вероятностный подход // Вероятность и математическая экономика. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1988.

Поступила в редакцию
7 XII 1993