

ПРОСТАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА С КРЕДИТНЫМ МЕХАНИЗМОМ

© 1994 г. Голубовский В.В., Поманский А.Б.

(Москва)

Исследуется динамическая модель роста односекторной экономики с механизмом кредитования. Описывается синтез оптимальных траекторий. Дается приближенная формула времени роста экономики до контрольного состояния. Проводится сравнительный анализ скорости роста с классической моделью Брока–Мирмана. Предлагается вычислительный алгоритм расчета оптимальных политик модели.

ВВЕДЕНИЕ

Среди многочисленных исследований по теории экономического роста существенное место занимает анализ оптимизационных динамических моделей в дискретном или непрерывном времени, в которых в качестве основной фазовой переменной выступает накопленный капитал, а управления – поток инвестиций. Обычно внимание уделяется выяснению условий существования стационарных траекторий, их свойств, и в первую очередь глобальной устойчивости. Известны разнообразные обобщения классических моделей [1, 2], позволяющие включать экзогенные случайные шоки технологических характеристик модели, ослаблять классические условия выпуклости технологических множеств и т.п. [3–6]. В 1980-х годах не менее интенсивно развивалось исследование моделей, в которых выбор управляющих переменных комбинируется с формированием портфеля условных финансовых требований, т.е. портфеля ценных бумаг, циркулирующих на финансовых рынках [7]. Однако и здесь главным образом анализируются состояния равновесия, существование которых, как правило, обеспечивается вводимыми предположениями об эффективности рыночных механизмов. Методы динамического программирования – принципы максимума Беллмана и Понтрягина – используются лишь как теоретические конструкции, позволяющие изучать общие качественные свойства стационарных решений.

Исследуемая в настоящей статье модель представляет собой простое обобщение классической модели Брока–Мирмана [1], в которой агент, управляющий потоком инвестиций, может привлекать извне заемные средства по экзогенно заданной процентной ставке. Цель статьи представить синтез оптимальных траекторий в двумерном фазовом пространстве "капитал–задолженность" и провести сравнительный анализ скоростей роста в модели, допускающей заем средств, и в классической, исключающей эту возможность.

В разд. 1 содержится общая постановка задачи и обсуждаются ограничения на управляющие переменные, позволяющие исключить неограниченную задолженность и заменяющие традиционные условия трансверсальности. В разд. 2 показана сводимость задачи к одномерной и сформулированы основные свойства оптимальных политик. На основе этого в разд. 3 дается синтез оптимальных траекторий. Разд. 4 посвящен оценке с помощью метода обратной динамики времени достижения контрольного состояния экономики и сравнительному анализу двух моделей роста. В Приложении кратко описаны реализованные алгоритмы и результаты тестовых расчетов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дискретную динамическую модель экономики в следующей постановке

$$\max_{\{(i_t, l_t)\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t),$$

$$c_t + i_t = f(k_t) - Qb_t + l_t,$$

$$k_{t+1} = i_t, \quad b_{t+1} = l_t, \tag{1}$$

$$i_t \geq 0, \quad l_t \in [0, D], \quad c_t \geq 0,$$

$$t = 0, 1, \dots,$$

$$k_0 = s \geq 0, \quad b_0 = 0,$$

где k_t – запас капитала в момент времени t , позволяющий произвести $f(k_t)$ продукции в единицах капитала; Qb_t – размер долга на момент t с экзогенно заданным валовым процентом по займам Q ; c_t – текущее потребление; $u(c)$ – функция полезности; $\beta \in (0, 1)$ – дисконтирующий множитель. Управлением является размер инвестиций i_t и привлекаемых извне заемных средств l_t , ограничиваемых экзогенно заданной величиной $D \geq 0$.

Модель (1) обобщает детерминированный вариант известной модели Брока–Мирмана [1], который описывается уравнениями (1) при $D = 0$. В дальнейшем будем придерживаться интерпретации (1) как модели репрезентативного простого хозяйства, в котором заемные средства не используются для модернизации технологии.

Сделаем несколько замечаний относительно экзогенных параметров D и Q . Можно было бы рассмотреть валовый процент по займам Q , зависящий от размера займа. Тогда уравнение баланса в нашей модели выглядело бы так: $c_t + i_t = f(k_t) - Q(b_t) b_t + l_t$. Однако при обычных ограничениях на функцию $Q(b)$ (гладкость, постоянство знака второй производной) такая зависимость качественно не изменит поведения модели.

Ограничение на размер займов D выбрано в виде константы из соображений простоты и естественности. Как при постоянном Q , так и в случае $Q = Q(b)$ необходимо условие, отсекающее траектории с бесконечно растущим размером займа. Ограничение размера единовременно привлекаемых извне средств константой D является вполне подходящей формой такого условия. Как будет показано ниже, при достаточно большом D оптимальные траектории задачи не зависят от его конкретного значения.

Будем считать, что выполнено условие $\beta Q > 1$. Из естественных экономических рассуждений следует, что $1/\beta$ и Q , представляющие внутреннюю долгосрочную ставку процента и краткосрочный процент по займам, должны быть согласованы. При $Q < 1/\beta$ агенту всегда выгоднее привлекать средства извне, нежели развивать производство за счет собственных вложений.

2. СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ ПОЛИТИК

Предполагается, что функция полезности $u(c)$ и технология $f(k)$ – достаточно гладкие и выполнены условия: $u(c)$ – монотонно возрастает и строго вогнута; $f(k)$ – монотонно возрастает и строго вогнута; существуют числа m и M , $0 < m < M < +\infty$, такие, что верно включение $\{f'(k): k \in [m, M]\} \supseteq [1/\beta, Q]$; $f(0) = 0^*$.

* Вообще говоря, это условие не является обязательным. Однако для упрощения некоторых формул и рассуждений, будем считать, что оно выполнено.

Запишем функциональное уравнение Беллмана для (1)

$$W(k, b) = \max_{\substack{i \geq 0 \\ l \in [0, D] \\ f(k) - Qb + l - i \geq 0}} \{u[f(k) - Qb + l - i] + \beta W(i, l)\}. \quad (2)$$

Легко видеть, что для всех пар (k, b) , задающих одинаковое значение $f(k) - Qb$, выбор управления i и l совпадает. Действительно, определяющим фактором в (1) является лишь величина чистого дохода агента. Это позволяет перейти от пары фазовых переменных k и b к одной, задаваемой соотношением $p = f(k) - Qb$, и заменить (2) на

$$V(p) = \max_{\substack{i \geq 0 \\ l \in [0, D] \\ p + l - i \geq 0}} \{u[p + l - i] + \beta V[f(i) - Ql]\}. \quad (2')$$

В наших предположениях функция $V(p)$ – достаточно гладкая (см. [8], где доказана дифференцируемость $V(p)$); кроме того, легко показать, что она – вогнутая.

Введение вспомогательной переменной $z = i - l$ позволяет переписать (2') в виде

$$V(p) = \max_{z \leq p} \psi(z, p), \quad (3)$$

где $\psi(z, p) = \max_{\substack{i \geq 0 \\ 0 \leq i - z \leq D}} \varphi(i, z, p);$

$$\varphi(i, z, p) = u(p - z) + \beta V[f(i) - Q(i - z)].$$

Приводимые ниже леммы дают возможность описать синтез оптимальных траекторий задачи (1).

Обозначим через \bar{k} решение уравнения $f(k) = Q$, которое существует и единственно в силу сделанных выше предположений.

Лемма 1. *Функция $\psi(z, p)$ имеет вид*

$$\psi(z, p) = u(p - z) + \beta \begin{cases} V[f(z)], & z > \bar{k}, \\ V[f(\bar{k}) - Q(\bar{k} - z)], & z \in [\bar{k} - D, \bar{k}], \\ V[f(D + z) - QD], & z \in (-D, \bar{k} - D). \end{cases}$$

Причем максимум $\varphi(i, z, p)$ достигается при $i = z > \bar{k}$, $l = 0$, если $z > \bar{k}$; $i = \bar{k}$, $l \in [0, D]$, если $z \in [\bar{k} - D, \bar{k}]$; $i \in [0, \bar{k}]$, $l = D$, если $z \in (-D, \bar{k} - D)$. При $z < -D$ значения функции $\psi(z, p)$ и соответствующие им i и l не определены.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $V(p)$ – достаточно гладкая, монотонно возрастающая, вогнутая функция, из определения $\varphi(i, z, p)$ следует, что ее максимум достигается на тех же i , что и максимум $f(i) - Q(i - z)$.

Вернемся к (3). Из условия первого порядка и уравнения Бенвенисте–Шенкмана [9] $V'(p) = u'(p - Z(p))$, где $Z(p)$ – оптимальная политика, получим

$$V'(p) = \beta \begin{cases} f'[Z(p)]V'[f(Z(p))], & Z(p) > \bar{k}, \\ QV'[f(\bar{k}) - Q(\bar{k} - Z(p))], & Z(p) \in [\bar{k} - D, \bar{k}], \\ f'[D + Z(p)]V'[f(D + Z(p)) - QD], & Z(p) \in (-D, \bar{k} - D). \end{cases} \quad (4)$$

В силу известной теоремы о промежуточных значениях производной дифференцируемой функции [10], выдвинем гипотезу о том, что кривые переключения управ-

ления задаются уравнениями

$$V'(p) = \beta QV'[f(\bar{k})] \quad (5)$$

для областей фазового пространства, в которых $i > \bar{k}$, $l = 0$ и $i = \bar{k}$, $l \in (0, D)$,

$$V'(p) = \beta QV'[f(\bar{k}) - QD] \quad (6)$$

для областей, где $i = \bar{k}$, $l \in (0, D)$ и $i \in (0, \bar{k})$, $l = D$.

Лемма 2. а) Уравнение (5) имеет единственное решение

$$p^* \in [\bar{k}, f(\bar{k})].$$

б) Уравнение (6) имеет единственное решение

$$p^{**} \in [\bar{k} - D, f(\bar{k}) - QD]^*.$$

Доказательство. Докажем лишь а), вторая часть доказывается аналогично.

а1. Пусть $p = f(\bar{k})$, тогда $-V'(p) + \beta QV'[f(\bar{k})] > 0$, так как $\beta Q > 1$.

а2. Пусть $p = \bar{k} - \varepsilon$, тогда из (3): $Z(p) < \bar{k}$. Из (4) следует $V'(p) = \beta QV'[f(\bar{k}) - Q(\bar{k} - Z(p))] > \beta QV'[f(\bar{k})]$. Для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ $-V'(p) + \beta QV'[f(\bar{k})] < 0$.

Из а1 и а2 вытекает утверждение леммы.

Теперь можно доказать, что (5) и (6) действительно задают кривые переключения управления.

Лемма 3. Если $Z(p)$ – оптимальная политика, доставляющая максимум функции $\psi(Z(p); p)$ в (3), то

$$Z(p) > \bar{k}, \quad p > p^*,$$

$$Z(p) \in [\bar{k} - D, \bar{k}], \quad p \in [p^{**}, p^*],$$

$$Z(p) \in (-D, \bar{k} - D), \quad p \in (-D, p^{**}).$$

Доказательство. 1) Пусть $p > p^*$. Рассуждая от противного, положим что $Z(p) \leq \bar{k}$. Тогда из (4) следует:

$$0 = -V'(p) + \beta QV'[f(\bar{k}) - Q(\bar{k} - Z(p))] \geq -V'(p) + \beta QV'[f(\bar{k})],$$

что противоречит неравенству, полученному в а2 доказательства леммы 2. Отсюда $Z(p) > \bar{k}$.

2) Пусть $p \in [p^{**}, p^*]$. Положим от противного, что $Z(p) > \bar{k}$. Из (4) следует:

$$0 = -V'(p) + \beta f'[Z(p)]V'[f(Z(p))] < -V'(p) + \beta QV'[f(\bar{k})],$$

что не согласуется с леммой 2.

Аналогичными рассуждениями лемма доказывается полностью.

3. ОПИСАНИЕ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Полученные результаты позволяют описать оптимальные политики и траектории системы (1). Введем для удобства записи преобразование $P(k, b) = f(k) - Qb$ и рассмотрим фазовую плоскость переменных k и b . Из уравнений перехода и ограничений

* Из (5) и (6) легко видеть, что $p^{**} < p^*$, так как функция $V(p)$ – вогнутая.

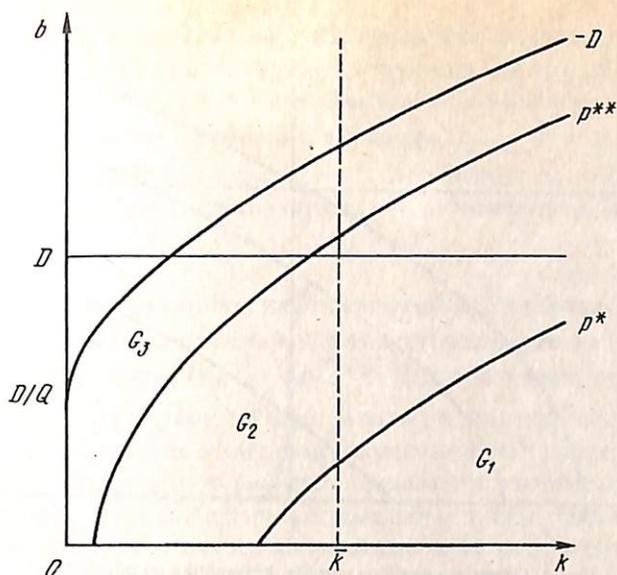


Рис. 1. Разбиение фазовой плоскости на области G_1 , G_2 и G_3

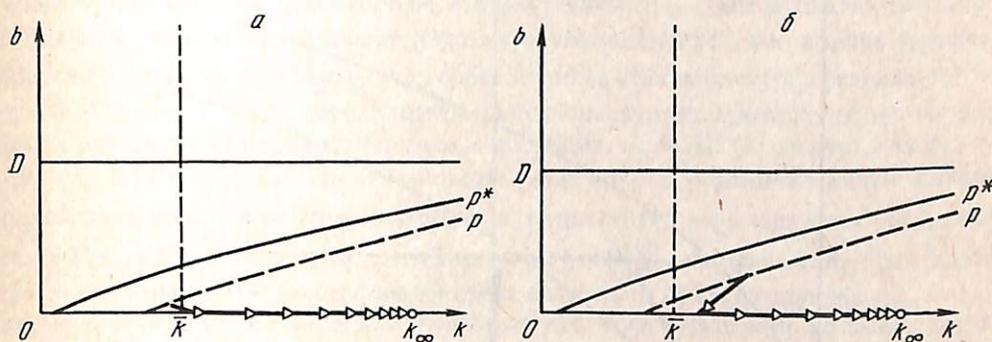


Рис. 2. а, б – оптимальные траектории, исходящие из области G_1

системы (1) следует, что траектории могут располагаться лишь в области

$$G = \{(k, b): k \geq 0, b \in [0, D], P(k, b) \geq -D\}.$$

Леммы 1 и 3 утверждают, что кривые $P(k, b) = p^*$ и $P(k, b) = p^{**}$ разбивают область G на три подмножества (см. рис. 1)

$$G_1 = \{(k, b): (k, b) \in G, P(k, b) > p^*\}.$$

$$G_2 = \{(k, b): (k, b) \in G, P(k, b) \in [p^{**}, p^*]\},$$

$$G_3 = \{(k, b): (k, b) \in G, P(k, b) \in [-D, p^{**}]\},$$

в которых оптимальные политики инвестиций $I(p)$ и займов $L(p)$ таковы

$$\left. \begin{array}{l} I(p) > \bar{k}, \quad L(p) = 0, \\ I(p) = \bar{k}, \quad L(p) \in [0, D], \\ I(p) < \bar{k}, \quad L(p) = D, \end{array} \right\} \begin{array}{l} G_1 \\ G_2 \\ G_3, \end{array}$$

причем легко убедиться, что $I(p)$ – неубывающая, а $L(p)$ – невозрастающая функции.

Исследование поведения оптимальных траекторий в G_1 , G_2 и G_3 проведем раздельно.

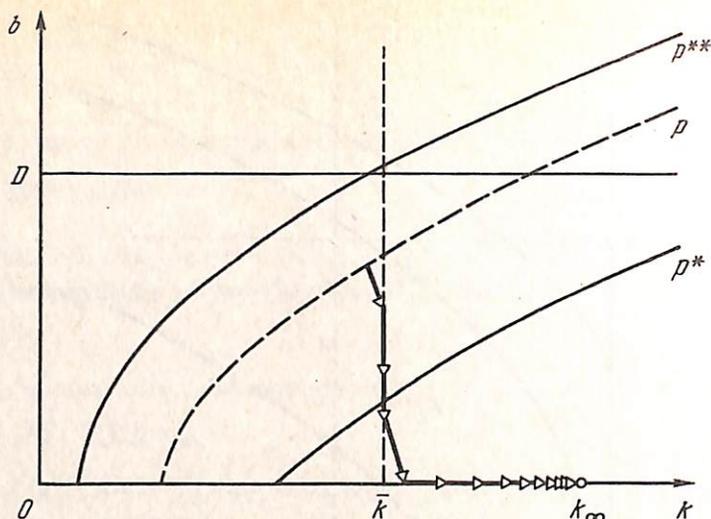


Рис. 3. Оптимальная траектория, исходящая из области G_2

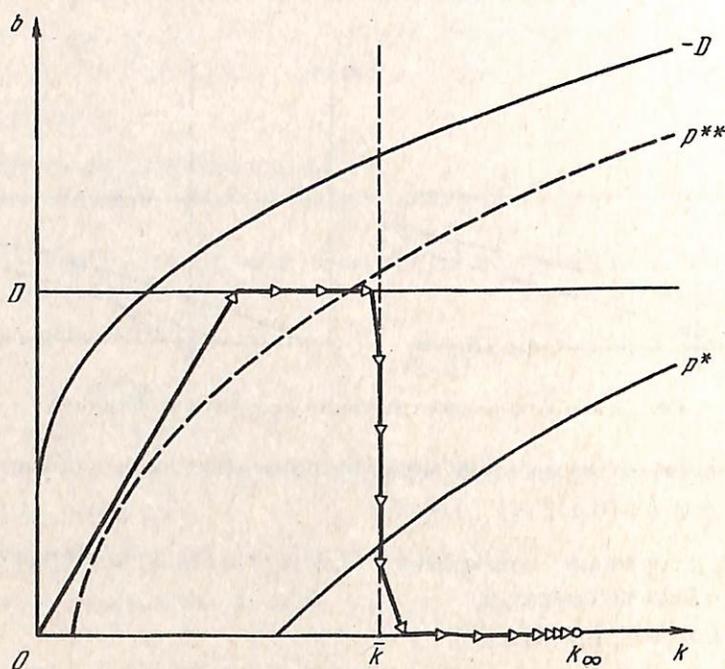


Рис. 4. Оптимальная траектория, исходящая из области G_3

1) В области G_1 оптимальная политика займов тождественно равна нулю. Задача (1) сводится к хорошо изученной задаче Брока–Мирмана, в которой все оптимальные траектории сходятся к устойчивой точке k_∞ – решению уравнения $f'(x) = 1/\beta$. Исследование (4) в этой области дает тот же результат. Таким образом, если точка (k_0, b_0) лежит в области G_1 , то оптимальная траектория на первом же шаге выходит на прямую $b = 0$, затем монотонно стремится вдоль нее к точке $(k_\infty, 0)$. Причем, начиная с (k_1, b_1) , оптимальные траектории задачи (1) и Брока–Мирмана (см. рис. 2, а и 2, б) совпадают.

2) В области G_2 оптимальная политика инвестиций равна константе \bar{k} и оптималь-

ные траектории проходят вдоль прямой $k = \bar{k}$ плоскости фазовых переменных (k, b) (см. рис. 3). Из (4) следует, что при движении по оптимальной траектории обобщенная фазовая координата p растет: $p_{t+1} > p_t$. Такое движение возможно не из всех точек G_2 . Подставим в условие баланса уравнение перехода: $c_{t+1} + \bar{k} = f(\bar{k}) - Ql_t + l_{t+1}$. Требуется, чтобы $P(\bar{k}, l_{t+1}) > P(\bar{k}, l_t)$, т.е. $l_{t+1} < l_t$. Это значит $c_{t+1} + Ql_t - [f(\bar{k}) - \bar{k}] < l_t$, откуда найдем предельно возможное (при $c_{t+1} \rightarrow 0+$) значение долга

$$b_{\infty}^* = (f(\bar{k}) - \bar{k}) / (Q - 1)^* \quad (7)$$

Соответствующее значение обобщенной переменной состояния $p_{\infty}^* = P(\bar{k}, b_{\infty}^*)$ характеризуется тем, что ни одна оптимальная траектория системы (1) не выходит из точек (k_0, b_0) области G_2 , если $P(k_0, b_0) < p_{\infty}^{***}$. Для тех точек, где $P(k_0, b_0) > p_{\infty}^{**}$, оптимальные траектории на первом же шаге выходят на вертикальную прямую $k = \bar{k}$, затем движение происходит вдоль этой прямой с уменьшением долга, пока траектория не войдет в область G_1 . Дальнейшее движение происходит в соответствии с п. 1).

3) Прежде чем рассмотреть поведение оптимальных траекторий системы (1) в области G_3 , необходимо заметить, что все приводимые ниже рассуждения верны лишь в случае $p^{**} > p_{\infty}^*$. Наличие в нашей модели двух экзогенных параметров Q и D может привести к тому, что это условие будет нарушено; тогда множество точек, принадлежащих оптимальным траекториям, в пересечении с G_3 будет пусто. Поскольку p_{∞}^* определяется только технологией $f(k)$ и параметром Q , а p^{**} , как корень уравнения (6), зависит и от D , то при некоторых соотношениях этих параметров условие $p^{**} > p_{\infty}^*$ будет выполнено. В этом случае оптимальные траектории проходят вдоль горизонтальной прямой $b = D$ плоскости фазовых координат (k, b) . Из (4) следует, что $p_{t+1} > p_t$, т.е. $k_{t+1} > k_t$. Как и в 2), это влечет существование кривой, ограничивающей множество допустимых начальных точек оптимальных траекторий неравенством $P(k_0, b_0) > p_{\infty}^{**}$, где $p_{\infty}^{**} = P(k_{\infty}^{**}, D)$, а k_{∞}^{**} определяется из $f(k) - k = D(Q - 1)$. Это уравнение, вообще говоря, может иметь неединственный корень либо вовсе не иметь корней.

Рассмотрим сначала, как более общий, случай, когда уравнение не имеет корней, таких, что $(k_{\infty}^{**}, D) \in G_3$. Тогда оптимальная траектория, исходящая из точки $(k_0, b_0) \in G_3$, на первом же шаге выходит на горизонтальную прямую $b = D$ и движется по ней с увеличением k , пока не попадает в G_2 . Дальнейшее поведение траектории совпадает с описанным в п. 2) (см. рис. 4).

Если уравнение $f(k) - k = D(Q - 1)$ имеет корни, такие, что $(k_{\infty}^{**}, D) \in G_3$, то нас интересует меньший из них. Построим с его помощью точку $p_{\infty}^{**} = P(k_{\infty}^{**}, D)$. Поведение оптимальных кривых изменится незначительно — область G_3 будет ограничиваться кривой $P(k, b) = p_{\infty}^{**}$.

4. СРАВНЕНИЕ СКОРОСТЕЙ РОСТА ЭКОНОМИК

Интересно сравнить скорость роста экономики, описываемой (1), со скоростью роста экономики Брока—Мирмана. Вопрос, на который мы попытаемся ответить, сформулируем так: какая из моделей позволяет достигнуть контрольного состояния экономики за меньшее количество шагов.

* Интересно, что величина (7) зависит только от технологии производства и условий кредитования и не связана с индивидуальными предпочтениями агента. Легко видеть, что при $Q \rightarrow \infty$ решение (1) стремится к решению соответствующей задачи Брока—Мирмана.

** Теперь становится очевидным замечание, что при достаточно большом ограничении займа $D > b_{\infty}^*$ оптимальные траектории не зависят от конкретного значения D .

Вспользуемся тем, что в области G_1 обе модели ведут себя одинаково. При достаточно большом D ни одна траектория (1) не проходит через точки (k, b) , такие, что $P(k, b) < p_\infty^*$. Следовательно, можно проводить сравнение только в области G_2 . Поскольку $0 \in [p_\infty^*, p^*]$, мы можем сузить область сравнения до отрезка $[0, p^*]^*$. Легко убедиться, что стартовая точка $p_0 = 0$ является для модели Брока–Мирмана стационарной, тогда как для (1) на основании уравнения (4) можно утверждать, что выходящая из нуля оптимальная траектория за конечное число шагов пересечет границу между областями G_1 и G_2 .

Рассмотрим частный случай, предполагая, что функция полезности $u(c) = \text{Ln}(c)$, а технология $f(k) = k^\alpha$. Это позволяет, зафиксировав контрольную точку, построить в обратной динамике последовательности предыдущих состояний экономик, которые можно будет сравнить.

Решение модели Брока–Мирмана записывается в явном виде ([9]): оптимальная политика инвестирования $I(p) = \alpha\beta p$, потребления – $C(p) = (1 - \alpha\beta)p$. В обратной динамике уравнение перехода принимает вид

$$p_\tau = \frac{1}{\alpha\beta} (p_{\tau-1})^{1/\alpha}. \quad (8)$$

Символ τ означает, что мы изменили направление оси времени на противоположное. Зафиксировав контрольную точку \mathcal{P} , решим разностное уравнение, полученное логарифмированием (8), и найдем последовательность прообразов или предшествующих \mathcal{P} состояний экономики в модели Брока–Мирмана

$$p_\tau = \mathcal{P}^{\alpha^{-\tau}} \left(\frac{1}{\alpha\beta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}(\alpha^{-\tau}-1)}, \quad \tau = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Теперь рассмотрим модель (1). В области G_1 ее оптимальные политики совпадают с политиками модели Брока–Мирмана, а при движении в области G_2 вдоль магистрали $k = \bar{k}$ выполняется условие $c_{\tau+1} = (\beta Q)^{-1} c_\tau$. Зафиксировав контрольную точку \mathcal{P} в области G_1 в полуинтервале, примыкающем к границе области на глубину одного шага

модели Брока–Мирмана (т.е. $\mathcal{P} \in [p^*, P(I(p^*), 0)] = \left[\frac{\bar{k}}{\alpha\beta}, \frac{Q\bar{k}}{\alpha} \right]^{**}$), можно восстановить

последовательность предыдущих состояний экономики. Запишем уравнение перехода в обратной динамике

$$p_\tau = \frac{p_{\tau-1}}{Q} + c_{\mathcal{P}}(\beta Q)^{-\tau} + \bar{k} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right), \quad (10)$$

где $c_{\mathcal{P}} = (1 - \alpha\beta)\mathcal{P}$ – потребление в точке \mathcal{P} . Решая разностное уравнение (10), получим последовательность состояний для модели (1)

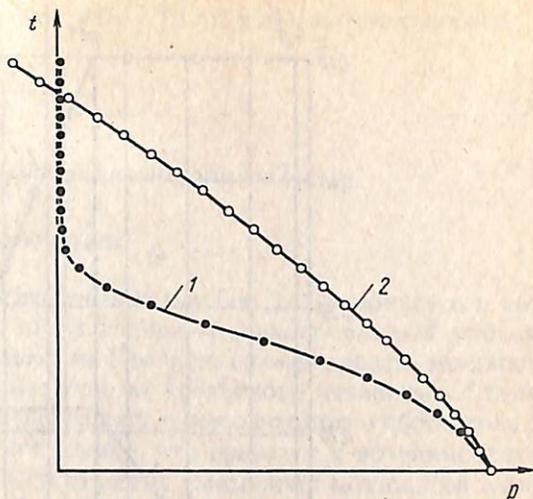
$$p_\tau = \bar{p} Q^{-\tau} + \frac{c_{\mathcal{P}} Q^{-\tau}}{1-\beta} (\beta^{-\tau} - 1) - \bar{k} \frac{Q}{Q-1} \frac{1-\alpha}{\alpha} (1 - Q^{-\tau}). \quad (11)$$

* Все траектории модели Брока–Мирмана лежат в положительной полуплоскости фазовых координат (k, b) .

** Любая оптимальная последовательность состояний модели (1), имеющая начальную точку вне области G_1 , имеет точку в этом полуинтервале.

*** Устремив $\tau \rightarrow +\infty$, из этой формулы можно попутно вычислить вторую границу области G_2 : $p_\infty^* = -\bar{k}Q(1-\alpha)/(\alpha(1-Q))$. Соответствующее ей предельно возможное значение займа $b_\infty^* = (f(\bar{k}) - \bar{k})/(Q-1)$.

Рис. 5. Графики зависимости времени t достижения контрольного состояния от начального состояния p : 1 – Брока–Мирмана; 2 – модель (1)



Формулы (9) и (11) позволяют получить выражения для времени достижения контрольной точки \mathcal{P} из начального состояния $p_0 \in (0, p^*]$:

для модели Брока–Мирмана время t выражается явно

$$t = \frac{1}{\ln(\alpha)} \ln \left(\frac{\ln(\mathcal{P}) - \ln(p_\infty)}{\ln(p_0) - \ln(p_\infty)} \right), \quad (12)$$

где $p_\infty = (\alpha\beta)^{\alpha/(1-\alpha)}$ – стационарное состояние;

для модели (1) время t задается уравнением

$$\mathcal{P}Q^{-t} \left[1 + \frac{1-\alpha\beta}{1-\beta} (\beta^{-t} - 1) \right] - \frac{\bar{k}Q(1-\alpha)}{\alpha(Q-1)} [1 - Q^{-t}] = p_0. \quad (13)$$

Зависимость времени достижения контрольного состояния \mathcal{P} от стартовой точки p_0 представлена на рис. 5. Экономика Брока–Мирмана растет быстрее экономики (1) для всех стартовых точек p_0 из $(0, \mathcal{P})$, за исключением достаточно близких к нулю*.

В рассмотренном выше частном случае, приняв $Q = 1 + q$ и $\beta = 1 - \varepsilon$, при малых q и ε можно получить линейное приближение для времени роста модели (1)

$$t \approx \frac{\mathcal{P} - p_0}{q \left(\mathcal{P} + \bar{k} \frac{Q}{Q-1} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) - \varepsilon \frac{1-\alpha\beta}{1-\beta} \mathcal{P}}. \quad (14)$$

Для произвольной функции $u(c)$ из класса *HARA* можно приближенно выразить время роста экономики (1) от стартового состояния p_0 до контрольного \mathcal{P} . Воспользуемся представлением производной функции полезности $u'(c) = 1/(a + bc)$. Из условий первого порядка следует, что $c_{t+1} = c_t + (\beta Q - 1) [c_t + a/b] = c_t + (\beta Q - 1)/r_a(c_t)**$, где $r_a(c)$ – показатель абсолютной несклонности к риску. Предполагая, что βQ близко к единице,

$$c_\tau \approx c_{\mathcal{P}} - \tau \frac{\beta Q - 1}{r_a(c_{\mathcal{P}})}.$$

Из уравнения баланса системы (1) получим разностное уравнение $p_\tau \approx \frac{p_{\tau-1}}{Q} +$

$$+ c_{\mathcal{P}} - \frac{f(\bar{k}) - Q\bar{k}}{Q} - \tau \frac{\beta Q - 1}{r_a(c_{\mathcal{P}})},$$

решение которого запишем в виде $Q^{-t} \approx \frac{\delta t + \Psi(p_0)}{\Psi(\mathcal{P})}$, где

$$\delta = - \frac{Q}{Q-1} \frac{\beta Q - 1}{r_a(c_{\mathcal{P}})};$$

$$\Psi(p) = \left[c_{\mathcal{P}} - \frac{f(\bar{k}) - Q\bar{k}}{Q} - \delta \right] \frac{Q}{Q-1} - p.$$

* Результаты расчетов большого числа тестовых примеров позволяют предполагать, что это утверждение верно и для других функций полезности и технологий, удовлетворяющих нашим ограничениям.

** Эта формула может быть приближенно получена для более широкого класса функций полезности в предположении, что βQ близко к единице.

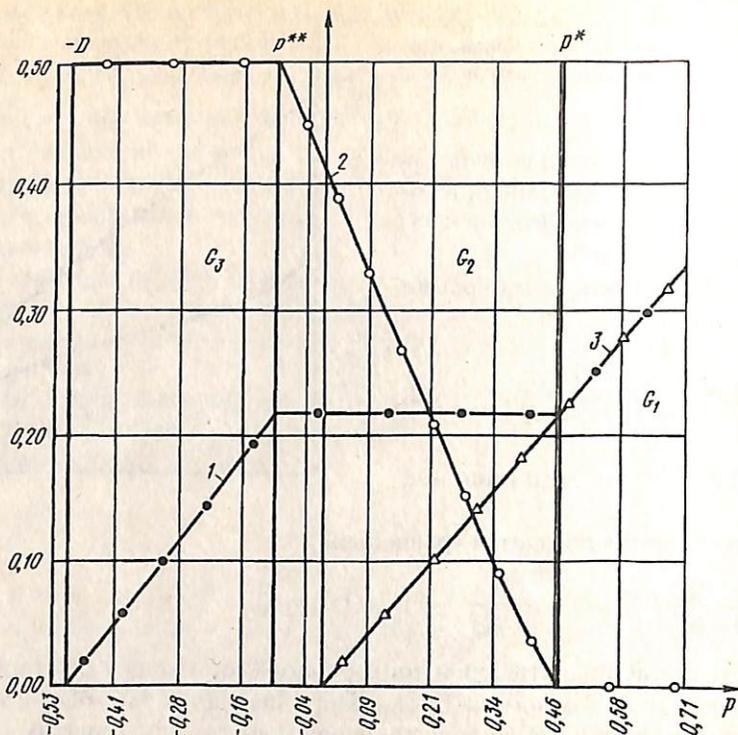


Рис. 6. Графики оптимальных политик: 1 – инвестиций $I(p)$ модели (1); 2 – займов $L(p)$ модели (1); 3 – инвестиций в модели Брока–Мирмана; вертикальные прямые p^* , p^{**} и $-D$ задают области G_1 , G_2 и G_3

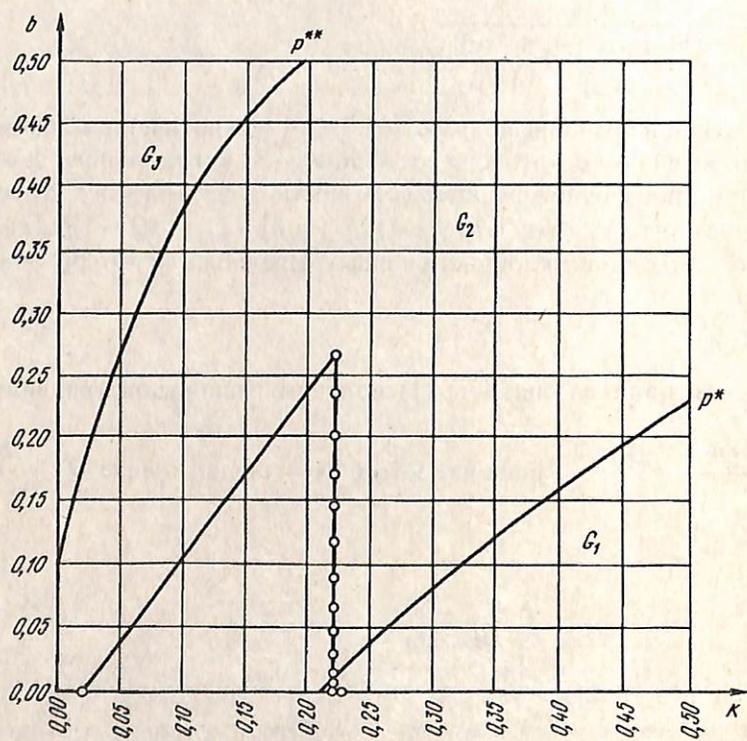


Рис. 7. Оптимальная траектория модели (1) в плоскости (k, b) . Числовые данные приведены в таблице. Линии уровня p^* , p^{**} и $-D$ задают области G_1 , G_2 и G_3

Обозначив Φ функцию, обратную к xe^x (т.е. $\Phi(a) = \{x: xe^x = a\}$), можно выразить

$$t \approx \frac{1}{\text{Ln}(c)} \Phi \left(\text{Ln}(Q) \frac{\Psi(P)}{\delta} Q^{\Psi(P_0)/\delta} \right) - \frac{\Psi(P_0)}{\delta}. \quad (15)$$

Чем ближе βQ к единице, тем точнее приближенная формула (15).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной качественный результат исследования модели (1) заключается в том, что, прибегнув к заемным средствам, агент выбирает фиксированный уровень мощности до полного погашения задолженности. После погашения уровень мощности монотонно стремится к стационарному без участия кредитного механизма. Ставка процента по кредиту предполагалась фиксированной, однако возможно обобщение за счет случайного варьирования процентной ставки, что приведет к возникновению режимов переключения и, вероятно, немонотонному изменению мощностей вдоль оптимальной траектории. Лемма 1 разд. 2 дает существенный выигрыш во времени при реализации вычислительных алгоритмов и может быть применена в случае выпукло-вогнутых технологий. Модель (1) и полученные результаты естественным образом переносятся на случай стохастических воздействий на производственную функцию.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для нахождения приближенных оптимальных политик задачи (1) использовалась адаптация обычного ([11, 12]) метода приближения в пространстве политик при итеративном решении функционального уравнения Беллмана.

Вогнутость производственной функции позволяет решать задачу максимизации не на всей области G , а лишь на прямоугольнике $[0, \hat{k}] \otimes [0, D]$ фазовой плоскости (k, b) , где \hat{k} – нетривиальное решение уравнения $f(k) = k$. С помощью преобразования $P(k, b) = f(k) - Qb$ перейдем к рассмотрению одномерного фазового пространства, в котором образом прямоугольника $[0, \hat{k}] \otimes [0, D]$ служит отрезок $[P_{\min}, P_{\max}]$, где $P_{\min} = P(0, D)$, $P_{\max} = P(\hat{k}, 0)$. Для поиска оптимальных политик алгоритм использует результаты леммы 1*. Алгоритм включает в себя три этапа.

1. Построение равномерной сетки на отрезке $[P_{\min}, P_{\max}]$

$$\Gamma = \{p_i: p_i = P_{\min} + i(P_{\max} - P_{\min})/N, i = 0 \dots N\}.$$

2. Построение функции Беллмана при помощи рекурсии. Введем функцию

$$\hat{u}(c) = \begin{cases} u(c), & c \geq 0, ** \\ -N_{\infty}, & c < 0, \end{cases}$$

$$V_0(p_i) = \hat{u}(p_i), \quad p_i \in \Gamma,$$

$$V_n(p_i) = \max_{\tilde{p} \in \Gamma} \{\hat{u}(p_i - Z(\tilde{p})) + \beta V_{n-1}(\tilde{p})\}, \quad (16)$$

* Использование этой леммы позволяет уменьшить размерность фазового пространства и значительно сократить объем вычислений. Однако недостатком является необходимость задания функции, обратной к производственной.

** Число N_{∞} в расчетах выполняет роль бесконечности. Было выбрано достаточно большое число, по отношению к которому операции сложения и умножения подчинялись правилам: $x + N_{\infty} = N_{\infty}$, $xN_{\infty} = \text{sign}(x)N_{\infty}$.

Траектория моделей (1) и Брока-Мирмана с одинаковыми параметрами и начальными условиями

Шаг	Траектории модели (1)				Траектории модели Брока-Мирмана			Накопленная полезность $\sum \beta^t u(c_t)$	
	p_t	i_t	l_t	c_t	p_t	i_t	c_t	(1)	(Б-М)
0	0,148	0,222	0,270	0,196	0,148	0,071	0,077	- 1,630	- 2,566
1	0,185	0,222	0,238	0,200	0,267	0,128	0,138	- 3,174	- 4,465
2	0,220	0,222	0,205	0,202	0,358	0,172	0,186	- 4,647	- 6,016
3	0,254	0,222	0,175	0,207	0,415	0,200	0,215	- 6,042	- 7,376
4	0,286	0,222	0,147	0,211	0,447	0,216	0,231	- 7,365	- 8,619
5	0,316	0,222	0,119	0,212	0,465	0,223	0,242	- 8,628	- 9,776
6	0,346	0,222	0,093	0,216	0,472	0,228	0,245	- 9,826	- 10,879
7	0,373	0,222	0,070	0,220	0,477	0,230	0,247	- 10,963	- 11,929
8	0,398	0,222	0,049	0,224	0,479	0,230	0,250	- 12,043	- 12,930
9	0,420	0,222	0,032	0,230	0,479	0,230	0,250	- 13,060	- 13,892
10	0,437	0,222	0,018	0,233	0,479	0,230	0,250	- 14,028	- 14,814
11	0,452	0,222	0,007	0,236	0,479	0,230	0,250	- 14,949	- 15,700
12	0,465	0,223	0,000	0,242	0,479	0,230	0,250	- 15,818	- 16,551
13	0,472	0,228	0,000	0,245	0,479	0,230	0,250	- 16,647	- 17,367
14	0,477	0,230	0,000	0,247	0,479	0,230	0,250	- 17,436	- 18,151
15	0,479	0,230	0,000	0,250	0,479	0,230	0,250	- 18,189	- 18,903
50	0,479	0,230	0,000	0,250	0,479	0,230	0,250	- 31,920	- 32,634
100	0,479	0,230	0,000	0,250	0,479	0,230	0,250	- 35,684	- 36,399
10000	0,479	0,230	0,000	0,250	0,479	0,230	0,250	- 36,246	- 36,961

Примечание. Выделенные клетки соответствуют прохождению контрольного состояния $p = p^*$ и достижению области G_1 .

где

$$Z(p) = \begin{cases} \varphi(p), & p > f(\bar{k}), \\ \frac{p - f(\bar{k})}{Q} + \bar{k}, & p \in [f(\bar{k}) - QD, f(\bar{k})], \\ \varphi(p + QD) - D, & p < f(\bar{k}) - QD \end{cases}$$

и $\varphi(p)$ – функция, обратная к технологии $f(k)$.

3. Нахождение приближенных оптимальных политик. Обозначим за p_i^* узел \bar{p} сетки Γ , на котором правая часть (16) достигает максимума. Политики инвестиций и займов определяются по правилам

$$I_n(p_i) = \begin{cases} \mathbf{I}[Z(p_i^*)], & V_n(p_i) > -N_\infty, \\ 0, & V_n(p_i) = -N_\infty, \end{cases}$$

$$L_n(p_i) = \begin{cases} \mathbf{L}[Z(p_i^*)], & V_n(p_i) > -N_\infty, \\ 0, & V_n(p_i) = -N_\infty, \end{cases}$$

где $\mathbf{L}(z) = \mathbf{I}(z) - z$; $\mathbf{I}(z) = \begin{cases} z, & z > \bar{k}, \\ \bar{k}, & z \in [\bar{k} - D, \bar{k}], \\ z + D, & z < \bar{k} - D. \end{cases}$

В наших предположениях описанный таким образом итерационный процесс при максимизации на непрерывном множестве сходится монотонно в среднеквадратичной норме и продолжается до тех пор, пока политики не стабилизируются. Однако при макси-

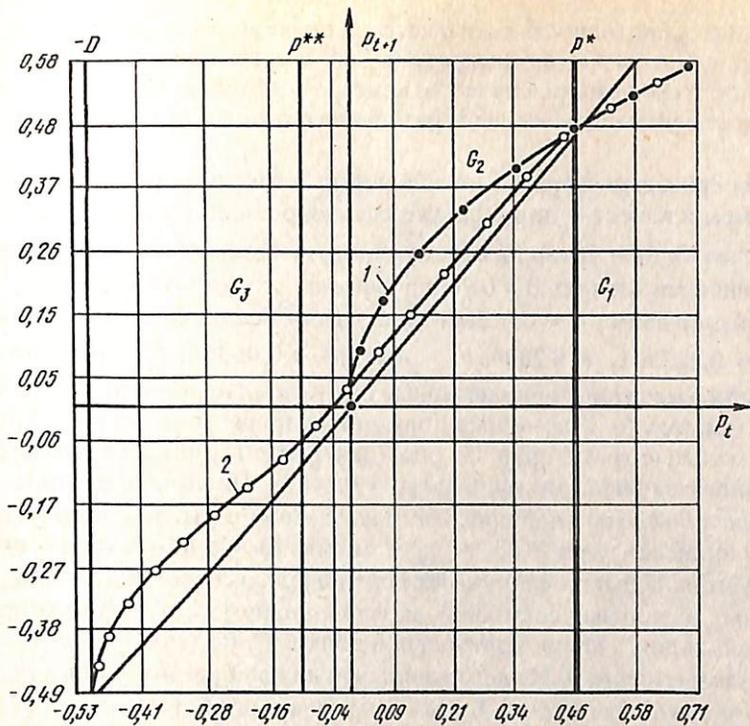


Рис. 8. Графики зависимости p_{t+1} от состояния на предыдущем шаге p_t : 1 – модель Брока–Мирмана; 2 – (1); наклонная прямая – биссектриса

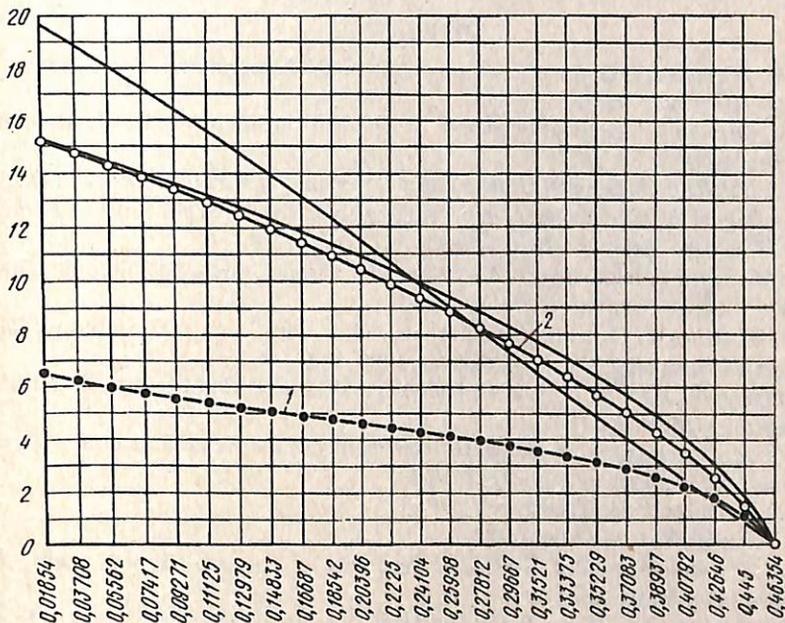


Рис. 9. Графики времени достижения контрольного состояния. По вертикальной оси отложено время в шагах модели, по горизонтальной – начальное состояние p_0 . В качестве контрольного состояния выбрано $p = p^*$; 1 – модель Брока–Мирмана; 2 – модель (1). Два других графика принадлежат линейному (14) и нелинейному (15) приближениям зависимости времени от начального состояния в (1)

мизации на сетке монотонность сохраняется лишь на первом этапе, пока не станет существенной ошибка, вызванная дискретизацией. В расчетах мы использовали нарушение монотонности сходимости в качестве критерия останова. Количество необходимых итераций растет с уменьшением шага разбиения сетки и с приближением βQ к единице.

Результаты проведенных расчетов полностью согласуются с теоретической частью статьи. Возьмем в качестве примера уже рассмотренный случай с логарифмической функцией полезности и технологией \sqrt{k} со следующими числовыми параметрами: дисконтирующий множитель $\beta = 0,96$; процентная ставка по кредитам $Q = 1,06$; ограничение на размер займа $D = 0,5$. Для этой задачи основные показатели принимают значения: $\bar{k} \approx 0,2225$, $k_\infty = 0,2304$, $b_\infty^* \approx 4,15$, $p^* = 0,46354$. С помощью описанного алгоритма были рассчитаны приближенные оптимальные политики моделей (1) и Брока–Мирмана (см. рис. 6). С помощью полученных политик можно построить приближенные оптимальные траектории. На рис. 7 изображена одна из таких траекторий (1), соответствующая начальному условию $p_0 = 0,14833$. Числовые данные, полученные при симуляции, приведены в таблице. Они также могут быть получены итерированием одномерного процесса $p_{t+1} = P(I(p_t), L(p_t))$ (см. рис. 8). На нем хорошо видно, что модель Брока–Мирмана быстрее достигнет контрольного состояния в области G_1 из всех положительных начальных состояний, за исключением достаточно близких к нулю. Графики времени достижения контрольной точки p^* , полученные с помощью (12) и (13), представлены на рис. 9. Из него видно, что для выбранной точки p_0 время составит около пяти шагов для модели Брока–Мирмана и приблизительно 12 для (1). Данные таблицы полностью соответствуют этому утверждению.

Расчет велся на сетке Γ отрезка $[P(0, D), P(0,5, 0)]^*$ состоящей из 501 точки. Используются данные, полученные на 25-й итерации описанного алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brock W.A., Mirman L.J. Optimal Economic Growth and Uncertainty: The Discounted Case // J. Econ. Theory. 1972. V. 4. № 3.
2. Brock W.A., Mirman L.J. Optimal Economic Growth and Uncertainty: The No-Discounting Case // Int. Econ. Rev. 1973. V. 14. № 3.
3. Mirman L.J., Zilcha I. On Optimal Growth under Uncertainty // J. Econ. Theory. 1975. V. 11. № 3.
4. Cass D. On Capital Overaccumulation in the Aggregative, Neoclassical Model of Economic Growth: A Complete Characterization // J. Econ. Theory. 1972. V. 4. № 2.
5. Majumdar M., Mitra T. Intertemporal Allocation with a Non-Convex Technology: The Aggregative Framework // J. Econ. Theory. 1982. V. 27. № 1.
6. Majumdar M., Mitra T. Dynamic Optimization with a Non-Convex Technology: The Case of a Linear Objective Function // Rev. Econ. Studies. 1983. V. L., № 1.
7. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross Jr. S.A. An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices // Econometrica. 1985. V. 53. № 2.
8. Benveniste L.M., Scheinkman J.A. On the Differentiability of the Value Function in Dynamic Models of Economics // Econometrica. 1979. V. 47. № 3.
9. Sargent T.J. Macroeconomic Theory. N.Y., 1986.
10. Шварц Л. Анализ. Т. 1, М.: Мир, 1972.
11. Danthine J.-P., Donaldson J.B. Stochastic Properties of Fast vs. Slow Growing Economies // Econometrica. 1981. V. 49. № 4.
12. Donaldson J.B., Jonsen T., Mehra R. On The Term Structure of Interest Rates // J. Econ. Dynamics and Control. 1990. V. 14. № 3/4.

Поступила в редакцию
22 XI 1993

* Точка 0,5 выбрана в качестве \hat{k} с целью уменьшения шага сетки, так как заранее было известно, что $k_\infty = 0,2304 < 0,5$. Без этой информации нужно было бы предполагать $\hat{k} = 1$.