

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

НЕПРЕРЫВНЫЕ ИНДЕКСЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ

© 1944 г. Кошевой Г.А.

(Москва)

Сравнение по эффективности технологических способов производства заданной продукции — одна из задач экономической теории.

Существуют различные подходы к ее решению. Здесь рассматривается один из них, связанный с построением индексов технологической эффективности. Его особенность состоит в том, что мы не апеллируем к минимизации или максимизации какого-нибудь внешнего функционала, а строим функцию по "внутренним характеристикам" технологии, т.е. множеству эффективных точек и свойству свободного расходования. Такой подход к измерению технологической эффективности описан в [1–4]. Там предлагалось называть индексом технологической эффективности любую функцию, определенную на технологическом множестве, которая удовлетворяет свойствам строгой монотонности (при увеличении затрат и сохранении выпуска значение функции должно строго убывать), однородности при пропорциональном увеличении вектора затрат (при неизменном выпуске значение функции уменьшается в обратной пропорции) и ее значение во всех "эффективных точках" равняется единице. Точка (вектор затрат, обеспечивающий некоторый выпуск) называется эффективной [2], если невозможно, уменьшив затраты, сохранить выпуск.

Оказалось, что существование такой функции зависит от структуры множества эффективных точек (в [5] приведен пример технологического множества, для которого не существует таких индексов). Полное решение (необходимое и достаточное условие существования) было получено в [6, 7].

В [8] Р. Рассел поставил вопрос о непрерывности индексов как функции выпусков и затрат. Он показал, что если определять непрерывность по технологическим множествам (считать выпуски близкими, когда соответствующие им технологические множества близки в топологии замкнутой сходимости), то непрерывного индекса получить не удастся.

Вопрос о непрерывности индексов как функции затрат был решен в [7] (индексы непрерывны в $\text{int } \mathbb{R}_+^n$). Здесь изучается вопрос о непрерывности индексов как функции выпусков.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Производство описывается множеством затрат $L(u)$, обеспечивающих выпуск $u \in \mathbb{R}_+^m$. Будем считать, что для любого $u \in U$, где U — пространство выпусков, выполняются следующие свойства:

L1) $L(u)$ — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}_+^n$, $0 \notin L$;

L2) $L(u)$ выдерживает добавление $\mathbb{R}_+^n$, т.е. $L(u) + \mathbb{R}_+^n \subseteq L(u)$.

Вместе с $L(u)$ рассмотрим также два его подмножества: изокванту $\text{Isoq } L(u) = \{x \in L(u) : \forall \lambda < 1, \lambda x \notin L(u)\}$ и эффективное подмножество $\text{Eff } L(u) = \{x \in L(u) : (x' \leq x, x' \neq x) \rightarrow x' \notin L(u)\}$.

Точки из $\text{Eff } L(u)$ называются эффективными для $L(u)$. Другими словами точка $x \in L(u)$ называется эффективной, если $(x + \mathbb{R}_+^n) \cap L(u) = \{x\}$, т.е. в $L(u)$ нет точек $x' \leq x$, отличных от x . Отметим сразу следующие очевидные включения: $\text{Eff } L(u) \subset \text{Isoq } L(u)$, $L(u) = \text{Eff } L(u) + \mathbb{R}_+^n$.

Пусть $\text{con } L(u) = U_{\alpha > 0} \alpha L(u)$ – минимальный конус, содержащий $L(u)$. Легко видеть, что $\text{con } L(u) \supset \text{int } \mathbb{R}_+^n$.

Индексом эффективности использования затрат для множества выпусков U называется функция $[1-5]F(u, \cdot): \text{con } L(u) \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая свойствам: F1) для любого $F(u, x) \leq 1$; F2) $x \in \text{Eff } L(u) \Rightarrow F(u, x) = 1$; F3) для любого $x \in L(u)$, любого $\lambda > 0$ $F(u, \lambda x) = \lambda^{-1} F(u, x)$; F4), если $x' \leq x$, $x' \neq x$, то $F(u, x') > F(u, x)$.

Свойство F3 называется однородностью степени минус один, F4 – строгой монотонностью.

Обозначим $E(u) = \text{Eff } L(u)$, $A(u) = E(u) + \mathbb{R}_+^n$, $\bar{A}(u)$ – замыкание множества $A(u)$. В [6, 7] доказано, что для существования функции F , удовлетворяющей F1–F4, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$L(u) \cap \bar{A}(u) = E(u) \quad \forall u \in U. \quad (1)$$

Задача, которую мы здесь решаем, состоит в следующем: можно ли определить непрерывность в пространстве множеств затрат так, чтобы существовал непрерывный по выпускам индекс эффективности.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ

Напомним, какие топологии имеются в пространстве замкнутых подмножеств метрического пространства. Это имеет непосредственное отношение к вопросу о том, в каком смысле понимать непрерывность по множествам затрат.

Рассмотрим метрическое пространство $(\mathbb{R}_+^n, d)$ -евклидова метрика). Обозначим $\mathcal{F}$ семейство всех его непустых замкнутых подмножеств. Напомним, что расстояние по Хаусдорфу $\delta(F, G)$ (относительно евклидовой метрики) $F, G \in \mathcal{F}$, задается так: $\delta(F, G) = \inf\{\varepsilon \in [0, +\infty) \mid F \subset B_\varepsilon(G) \text{ и } G \subset B_\varepsilon(F)\}$, где $B_\varepsilon(F)$ означает ε -окрестность множества F , т.е. $B_\varepsilon(F) = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \text{dist}(x, F) \leq \varepsilon\}$.

Метрика Хаусдорфа δ порождает топологию на $\mathcal{F}$; обозначим ее $(\mathcal{F}, T_\delta)$.

На $\mathcal{F}$ имеется еще одна хорошо известная топология замкнутой сходимости $(\mathcal{F}, T_c)$.

Нам понадобятся следующие определения.

Пусть $\{F_k\}$ – последовательность подмножеств $\mathbb{R}_+^n$.

Топологическим нижним пределом последовательности $\{F_k\}$ называется множество $\text{Li}(\{F_k\}) = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \forall \varepsilon > 0, \exists k', \text{ такое, что } U_\varepsilon(x) \cap F_k \neq \emptyset \forall k > k'\}$; топологическим верхним пределом – множество $\text{Ls}(\{F_k\}) = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \forall \varepsilon > 0; \exists \text{ бесконечно много } k, \text{ таких, что } U_\varepsilon(x) \cap F_k \neq \emptyset\}$.

Для каждой последовательности (F_k) множества $\text{Li}(F_k)$ и $\text{Ls}(F_k)$ замкнуты, и $\text{Li}(F_k) \subseteq \text{Ls}(F_k)$. Множество F называется замкнутым пределом последовательности (F_k) , если $\text{Li}(F_k) = F = \text{Ls}(F_k)$.

Это определение сходимости связано с топологией замкнутой сходимости [9], а именно в случае локально компактного сепарабельного метрического пространства, $(\mathbb{R}_+^n, d)$ является таковым, последовательность (F_k) сходится к F в $(\mathcal{F}, T_c)$, если и только если $F = \text{Li}(F_k) = \text{Ls}(F_k)$. Если пространство (M, d) компактно, тогда последовательность (F_k) сходится к F в $(\mathcal{F}, T_\delta)$, если и только если F является замкнутым пределом.

СВОЙСТВА ЭФФЕКТИВНОГО ПОДМНОЖЕСТВА

Начнем со следующих трех примеров.

1. Пусть $L = ((1, 1) + \mathbb{R}_+^2)$, $L_k = ((1, 1) + F_k) \cap \{(1 - 1/(k+1), 1 - 1/(k+1)) + \mathbb{R}_+^2\}$, где F_k – выпуклый конус, порожденный векторами $(0, 1) - (1/(k+1))(1, 1)$ и $(1, 0) - (1/(k+1))(1, 1)$. Последовательность $\{L_k\}$ сходится к L в топологии замкнутой сходимости и в топологии, порожденной метрикой Хаусдорфа, однако последовательность эффективных множеств

$\{\text{Eff } L_k = \{\text{Isoq}\{(1, 1) + F_k\} \cap \{(1 - 1/(k+1), 1 - 1/(k+1)) + \mathbb{R}_+^2\}\}$ не сходится к $\text{Eff } L = \{1, 1\}$ ни в топологии замкнутой сходимости, ни в топологии, порожденной метрикой Хаусдорфа.

2. Пусть $E_k = \{(1, 1 + 1/k), (k^2, 1 + 1/k^2)\}$, $E = \{(1, 1)\}$. Последовательность $\{E_k\}$ сходится к E в топологии замкнутой сходимости, но не сходится в топологии, порожденной метрикой Хаусдорфа. Последовательность $\{L_k = E_k + \mathbb{R}_+^2\}$ сходится к $L = E + \mathbb{R}_+^2$ в обеих топологиях. Последовательность $\{\bar{A}_k = E_k + \mathbb{R}_-^2\}$ сходится к $\bar{A} = E + \mathbb{R}_-^2$ в обеих топологиях. Последовательность $\{\bar{A}_k = E + \mathbb{R}_-^2\}$ не сходится к $\bar{A} = E + \mathbb{R}_-^2$ в обеих топологиях.

3. Пусть $A = \{(1, 1) + \mathbb{R}_+^2\}$, $A_k = \{(1, 1) - F_k\} \cap \mathbb{R}_+^2$. Последовательность $\{A_k\}$ сходится к A в обеих топологиях, однако последовательность $\{E_k\}$ не сходится к E в обеих топологиях.

Во всех примерах условие (1) выполнено для всех множеств, поэтому для них существуют индексы, однако не существует такой последовательности индексов $\{F_k\}$, которая сходилась бы к F (F_k — индекс для множества затрат, определенного по эффективному множеству, E_k , F — для E). Здесь сходимость понимается в обычном смысле $\{F_k(x)\} \rightarrow F(x) \forall x \in L$.

Следующие две леммы показывают, что дает условие сходимости последовательности эффективных множеств в топологии замкнутой сходимости и в топологии, порожденной метрикой Хаусдорфа.

Пусть $\mathcal{E}$ — подпространство $\mathcal{F}$, такое, что сходится к $L = E + \mathbb{R}_+^2$ в обеих топологиях. Последовательность $\{\bar{A}_k = E_k + \mathbb{R}_-^2\}$ если $E \in \mathcal{E}$, тогда для любых $x, y \in E$ справедливо $(x + \mathbb{R}_+^n) \cap (y + \mathbb{R}_-^n) = \emptyset$ и выполняется (1); Q — подпространство $\mathcal{E}$, такое, что для любого $Q \in \mathcal{Q}$ выполнено $Q = \text{Isoq}(Q + \mathbb{R}_+^n)$.

Лемма 1. Пусть последовательность (E^k) сходится в топологии замкнутой сходимости к E , т.е. $\text{Li}(E^k) = E = \text{Ls}(E^k)$, $(E^k), E \in \mathcal{E}$. Тогда $\text{Li}(E^k + \mathbb{R}_+^n) = E + \mathbb{R}_+^n = \text{Ls}(E^k + \mathbb{R}_+^n)$; $(E + \mathbb{R}_-^n) \subseteq \text{Li}(E^k + \mathbb{R}_-^n)$.

Доказательство. Пусть $x \in \text{Ls}(L^k)$, т.е. для любой окрестности $V(x)$ точки x существует подпоследовательность $\{k_i\}$, такая, что $V(x) \cap L^{k_i} = \emptyset$. Это означает, что существуют последовательности $\{e^{k_i} \in E^{k_i}\}$ и $\{v^{k_i} \in \mathbb{R}_+^n\}$, такие, что $\{e^{k_i} + v^{k_i}\} \in V(x)$. В силу компактности $(V(x) + \mathbb{R}_-^n) \cap \mathbb{R}_+^n$ без потери общности можем считать, что последовательности $\{e^{k_i}\}$ и $\{v^{k_i}\}$ сходятся. Пусть e и v — предельные точки. Имеем $e \in E$ (согласно $\text{Li}(E^k) = E = \text{Ls}(E^k)$), и, следовательно, $e + v \in L$. Откуда, в силу замкнутости L , получаем $x \in L$.

Пусть теперь $x \in L$, т.е. существуют $e \in E$ и $v \geq 0$, такие, что $x = e + v$. Рассмотрим ε -окрестность $V_\varepsilon(x)$ точки x . Очевидно, что $V_\varepsilon(x) = V_\varepsilon(e) + v$, откуда следует: $V_\varepsilon(x) \cap L^k \neq \emptyset$, начиная с некоторого k' . Это показывает, что $L \subseteq \text{Li}(L^k)$.

Докажем, что $\bar{A} = (E + \mathbb{R}_-^n) \subseteq \text{Li}(\bar{A}^k) = \text{Li}(E^k + \mathbb{R}_-^n)$. Пусть $x \in \bar{A}$. Рассмотрим окрестность $V(x)$ точки x . В ней имеется точка $x' \in A$. Рассмотрим ε -окрестность $V'_\varepsilon(x) \subseteq V(x)$. Существуют $e \in E$ и $v \leq 0$, такие, что $x = e + v$. Очевидно, что $V'_\varepsilon(x') = V'_\varepsilon(e) + v$, откуда следует: $V'_\varepsilon(x') \cap \bar{A}^k \neq \emptyset$, начиная с некоторого k' . Это показывает, что $\bar{A} \subseteq \text{Li}(\bar{A}^k)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Пусть последовательность (Q^k) сходится в топологии замкнутой сходимости к Q , $(Q^k), Q \in \mathcal{Q}$. Тогда $\text{Li}(Q^k + \mathbb{R}_+^n) = Q + \mathbb{R}_+^n = \text{Ls}(Q^k + \mathbb{R}_+^n)$, $\text{Li}(Q^k + \mathbb{R}_-^n) = Q + \mathbb{R}_-^n = \text{Ls}(Q^k + \mathbb{R}_-^n)$.

Доказательство. $\text{Li}(Q^k + \mathbb{R}_+^n) = Q + \mathbb{R}_+^n = \text{Ls}(Q^k + \mathbb{R}_+^n)$ следует из леммы 1. Докажем справедливость вложения $Q + \mathbb{R}_-^n \supseteq \text{Li}(Q^k + \mathbb{R}_-^n)$. Вложение $\text{Li}(Q^k + \mathbb{R}_-^n) \supseteq Q + \mathbb{R}_-^n$ следует из леммы 1. Пусть $x \in \text{Ls}(\bar{A}^k)$, т.е. для любой окрестности $V(x)$ точки x

существует подпоследовательность $\{k_i\}$, такая, что $V(x) \cap \bar{A}^{k_i} \neq \emptyset$. Рассмотрим точку $q \in Q$, лежащую на луче, проведенном из нуля через x . Покажем, что $x \leq q$. Предположим обратное: $x > q$, тогда $x \in Q + \mathbb{R}_+^n$ и, следовательно, согласно лемме, любая окрестность $V(x)$ точки x пересекается с $Q^k + \mathbb{R}_+^n$, начиная с некоторого $\bar{k}$. Если $V(x)$ содержит точки из $Q^k + \mathbb{R}_+^n$ и $Q^k + \mathbb{R}_+^n$, тогда $\exists q^k \in Q^k$, такая, что $q^k \in V(x)$. Таким образом, $x \in Q$, что противоречит $x > q$. Итак, $x \leq q$, т.е. $x \in Q + \mathbb{R}_+^n$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. Пусть последовательность (E^k) сходится к E в топологии, индуцированной метрикой Хаусдорфа, $(E^k), E \in \mathcal{E}$. Тогда (L^k) и $(\bar{A}^k)$ сходятся к L и $\bar{A}$, соответственно.

Доказательство. $B_e(L) \subseteq B_e(E) + \mathbb{R}_+^n$, $B_e(\bar{A}) \subseteq \overline{B_e(E) + \mathbb{R}_+^n}$, откуда и следует утверждение леммы, что и требовалось доказать.

Построим отображение $\Phi: \mathcal{E} \rightarrow Q$. Построим для каждого $E \in \mathcal{E}$ множество $R \subseteq \mathbb{R}_+^n$ со свойствами:

R1) R – замкнутое множество в $\mathbb{R}_+^n$;

R2) $R + \mathbb{R}_+^n \subset R$;

R3) $\text{Isoq } R = \text{Eff } R$;

R4) $E + \mathbb{R}_+^n \subseteq R$;

R5) $E \subseteq \text{Eff } R$.

Согласно свойству R3, $\text{Eff } R \in Q$.

Для построения множества R понадобятся вспомогательные конусы $K(\theta)$ следующего вида: $K(\theta)$ – выпуклый конус, порожденный векторами $-e_i + \theta 1, i = 1, \dots, n$, где e_i – базисный вектор i ; $1 = (1, \dots, 1)$ – единичный вектор; $\theta \in [0, 1/n]$. Пусть $K'(\theta) = \mathbb{R}^n - K(\theta)$ – дополнение к $K(\theta)$. Эти конусы обладают следующими очевидными свойствами:

K1) для любого $\theta \geq 0$ $K(\theta) + \mathbb{R}_+^n \subset K(\theta)$; K2) для любого $\theta \geq 0$ $K'(\theta) + \mathbb{R}_+^n \subset K'(\theta)$; K3) если $\theta \geq 0$, $u \in K(\theta)$, $v \geq 0, \neq 0$, то $u - v \in \text{int } K(\theta)$; K4), если $\theta > 0$, то $\text{int } K(\theta) \supset \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.

Рассмотрим функцию $\gamma(x) = (n(1+|x|^2))^{-1}$.

Обозначим $A_0 = (E + \mathbb{R}_+^n) \cap \mathbb{R}_+^n$. Для каждой точки $a \in \bar{A}_0$ сделаем следующее. Обозначим θ_a максимальное среди всех $\theta \in [0, \gamma(a)]$, таких, что $\text{int}(a + K(\theta)) \cap L = \emptyset$. Из замкнутости L и непрерывности $K(\theta)$ следует, что максимум достигается, поэтому θ_a определено корректно.

Положим $K_a = K(\theta_a)$, $z_a = a + K_a$, $R_a = \mathbb{R}_+^n \setminus \text{int } z_a$.

Полагаем $D = \bigcup_{a \in A_0} \text{int } z_a$, $R = \mathbb{R}_+^n \setminus D = \bigcap_{a \in A} R_a$.

В [7] доказано, что если условие (1) выполняется, тогда множество R , построенное выше, удовлетворяет свойствам R1–R5, а функция $F(x) = \mu_R(x) = \min\{\lambda: \lambda x \in R\}$ – свойствам F1–F4.

Определим $\Phi(E) = \text{Eff } R$.

Теорема 1. Пусть последовательность $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ такова, что $\{E_n\}$ и $\{\bar{A}_n\}$ сходятся в топологии замкнутой сходимости к $E \in \mathcal{E}$ и $\bar{A} = (E + \mathbb{R}_+^n)$. Тогда $\Phi(E)$ – замкнутый предел последовательности $\{\Phi(E_n)\}_{n=1}^\infty$.

Доказательство. Согласно лемме 1, имеем $Ls(L^k) \subseteq L \subseteq Li(L^k)$. Покажем, что $Li(\text{Eff } R^k) = \text{Eff } R = Ls(\text{Eff } R^k)$, где $R^k = \bigcap_{a \in A_0^k} R_a$, $A_0^k = (E^k + \mathbb{R}_+^n) \cap \mathbb{R}_+^n$.

Покажем справедливость включения $Li(\text{Eff } R^k + \mathbb{R}_+^n) \supseteq \text{Eff } R + \mathbb{R}_+^n$.

Пусть $x \in \text{Eff } R + \mathbb{R}_-^n$. Если $x \in \bar{A}$, тогда все доказано. Рассмотрим $V_\varepsilon(x)$ — ε -окрестность x . Согласно лемме III.12 из [7], существует $a \in \bar{A}_0$ такая, что $x \in (a + K(\theta(a)))$, т.е. существует вектор $v \in K(\theta(a))$, такой, что $x = a + v$. Рассмотрим $V_{\varepsilon/2}(a)$. Покажем, что существует последовательность $a^k \in \bar{A}_0^k$, такая, что $a^k \in V_{\varepsilon/2}(a)$, и $v \in K(a^k)$, начиная с некоторого номера k' . Отсюда $V_{\varepsilon/2}(a) + v$, а следовательно, и $V_\varepsilon(x)$ пересекаются с $\text{Eff } R^k + \mathbb{R}_-^n$, начиная с k' , т.е. $x \in \text{Li}(\text{Eff } R^k + \mathbb{R}_-^n)$. Для этого докажем, что для любого $a \in \bar{A}_0$ существует последовательность $a^k \in \bar{A}_0^k$ такая, что $a^k \rightarrow a$ и $\theta(a^k) \geq \theta(a)$.

Для любого $a \in \bar{A}_0$, существует последовательность $a^k \in \bar{A}_0^k$, такая, что $a^k \rightarrow a$. Исходя из последовательности a^k , построим новую последовательность $\hat{a}^k$, которая даст искомое неравенство. Последовательность строится пошагово.

На первом шаге выберем $\delta > 0$ и рассмотрим $\hat{a}^1 = a - \delta \mathbf{1}$. Так как $a^k \rightarrow a$, то, начиная с некоторого k_1 , имеем $\forall k \geq k_1 \quad \hat{a}^1 \in \bar{A}_0^k$ и выполняется $(\hat{a}^1 + K(\theta(a))) \cap L^k = \emptyset$. Действительно, пусть существует бесконечно много k , таких, что $(\hat{a}^1 + K(\theta(a))) \cap L^k \neq \emptyset$. Рассмотрим последовательность $\{x_k\}$, $x_k \in (\hat{a}^1 + K(\theta(a))) \cap L^k$. Тогда, в силу компактности $(\hat{a}^1 + K(\theta(a))) \cap \mathbb{R}_+^n$, существует $x \in L$, являющаяся пределом $\{x_k\}$. Следовательно, $x \in (\hat{a}^1 + K(\theta(a)))$, что противоречит определению $\theta(a)$ ($(a + K(\theta(a))) \cap L = \emptyset$).

Положим $\hat{a}^{k_1} = \hat{a}^1$, $\tilde{a}^k = a^k$ для $k < k_1$.

На шаге i рассмотрим $\hat{a}^i = a - (\delta/2^i) \mathbf{1}$ и определим k_i согласно процедуре шага 1. Положим $\tilde{a}^{k_i} = \hat{a}^i$, $\tilde{a}^k = \hat{a}^{i-1}$ для $k_{i-1} < k < k_i$.

По построению имеем $\theta(\tilde{a}^k) \geq \theta(a)$.

Докажем $\text{Eff } R + \mathbb{R}_-^n \supseteq \text{Ls}(\text{Eff } R^k + \mathbb{R}_-^n)$. Пусть $x \in \text{Ls}(\text{Eff } R^k + \mathbb{R}_-^n)$, т.е. для любой окрестности $V(x)$ существуют последовательности $\{a^k \in \bar{A}^k\}$ и $\{v^k \in K(a^k)\}$, такие, что $\{a^k + v^k\} \in V(x)$. Если $x \in \bar{A}$, тогда все доказано. Если $x \notin \bar{A}$, тогда $x \notin \bar{A}^k$, начиная с некоторого номера k . Таким образом, последовательности $\{a^k\}$ и $\{v^k\}$ ограничены согласно выбору функции $\gamma(x)$, следовательно, $\lim a^k + \lim v^k = a + v = x \in \text{Eff } R + \mathbb{R}_-^n$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. Пусть последовательность $\{E_n\}_{n=1}^\infty$, $E_n \in \mathcal{E}$, сходится в топологии, индуцированной метрикой Хаусдорфа, к $E \in \mathcal{E}$. Тогда $\{\Phi(E_n)\}_{n=1}^\infty$ сходится к $\Phi(E) \in Q$ в $(\mathcal{F}, T_\delta)$.

Следствие 3. Пусть K — компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$, последовательность $\{E_n\}_{n=1}^\infty$, $E_n \in \mathcal{E}$, $E_n \in K$, сходится в топологии замкнутой сходимости к $E \in \mathcal{E}$. Тогда $\{\Phi(E_n)\}_{n=1}^\infty$ сходится к $\Phi(E) \in Q$ в $(\mathcal{F}, T_c)$.

Теорема 2. Пусть Q_0 — замкнутый предел последовательности $\{Q_v\}$, $Q_0, \{Q_v\} \in Q$. Тогда $\mu_{Q_v}(x_v) \rightarrow \mu_{Q_0}(x_0)$ ($\mu_Q(x) = \min\{\lambda: \lambda x \in Q + \mathbb{R}_+^n\}$), если $x_v \rightarrow x_0$, $x_v \in \text{con } Q_v$.

До к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\mu_v = \mu_{Q_v}(x_v)$. Покажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists v'$ такое, что $\mu_0 < \mu_v + \varepsilon \forall v \geq v'$. От противного предположим, что $\mu_0 \geq \mu_v + \varepsilon$ для бесконечно многих номеров v . Последовательность $\{\mu_v\}$ ограничена из-за ограниченности последовательности $\{x_v\}$. Следовательно, существует сходящаяся подпоследовательность $\{\mu_{v_i}\} \rightarrow \mu'$. Отсюда $\mu_{v_i} x_{v_i} \rightarrow \mu' x_0 < \mu_0 x_0$, противоречие, так как $\mu_{v_i} x_{v_i} \in Q_{v_i}$, а $\mu' x_0 \in Q_0$.

Покажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists v'$, такое, что $\mu_v < \mu_0 + \varepsilon \forall v \geq v'$. Предположим противное $\mu_v \geq \mu_0 + \varepsilon$ для бесконечно многих номеров v . Тогда существует сходящаяся

подпоследовательность $\{\mu_{v_l}\} \rightarrow \mu'$, такая, что $\mu_{v_l} x_{v_l} \rightarrow \mu' x_0 > \mu_0 x_0$. Это – противоречие, так как $\mu_{v_l} x_{v_l} \in \text{Isoq } Q_{v_l}$, а $\mu' x_0 \notin \text{int } Q_0$.

Осталось заметить, что если $x^k \in \text{con } Q(u^k)$, $x^k \rightarrow x^0$, тогда $x^0 \in \text{con } Q(u^0)$. Это вытекает из следствия 1, что и требовалось доказать.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ИНДЕКСОВ

Вернемся теперь к индексам и посмотрим, какие следствия дают теоремы 1 и 2 в этой ситуации.

Определение 1. Функция $F: U \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной по Хаусдорфу, если для любой последовательности $\{(u^k, x^k)\}$, такой, что $\{\text{Eff}(L(u^k))\}$ сходится в топологии, индуцированной метрикой Хаусдорфа, к $\text{Eff}(L(u^0))$, $u^0 \in U$; $x^k \in \text{con } L(u^k)$, $x^k \rightarrow x^0$ выполняется $\lim_k F(u^k, x^k) = F(u^0, x^0)$.

Предложение 1. Пусть множество U таково, что $L(u)$ удовлетворяет условию (1) для любого $u \in U$. Тогда существует непрерывный по Хаусдорфу индекс технологической эффективности.

Доказательство. Согласно следствию 2 и теореме 2, функция $\mu_F(\text{Eff}(u))$ – непрерывный по Хаусдорфу индекс, что и требовалось доказать.

Определение 2. Функция $F: U \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной в замкнутом смысле, если для любой последовательности $\{(u^k, x^k)\}$, такой, что существует $u^0 \in U$, для которого множества $\text{Eff} L(u^0)$ и $\bar{A}(u^0)$ являются замкнутыми пределами $\{\text{Eff}(L(u^k))\}$ и $\{\bar{A}(u^k)\}$; $x^k \in \text{con } L(u^k)$, $x^k \rightarrow x^0$ выполняется $\lim_k F(u^k, x^k) = F(u^0, x^0)$.

Предложение 2. Пусть множество U таково, что $L(u)$ удовлетворяет условию (1) для любого $u \in U$. Тогда существует непрерывный в замкнутом смысле индекс технологической эффективности.

Доказательство. Согласно теоремам 1 и 2, функция $\mu_F(\text{Eff}(u))$ – непрерывный в замкнутом смысле индекс, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Debreu G. The Coefficient of Resource Utilization // *Econometrica*. 1951. V. 19. № 2.
2. Koopmans T.C. Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities // *Activity Analysis of Production and Allocation* / Ed. T.C. Koopmans. N.Y.: Wiley, 1951.
3. Farrell M.J. The Measurement of Productive Efficiency // *J. Roy. Statist. Soc. Ser. A*. 1950. № 2.
4. Fare R., Lovell C.A.K. Measurement of Technical Efficiency of Production // *J. Econ. Theory*. V. 19. № 1.
5. Bol G. Technical Efficiency Measures: A Remark // *J. Econ. Theory*. 1986. V. 38. № 2.
6. Дмитрук А.В., Кошевой Г.А. О существовании функции, оценивающей эффективность производственных затрат // *Экономика и мат. методы*. 1989. Т. 24. Вып. 1.
7. Dmitruk A.V., Koshevoy G.A. On the Existence of a Technical Efficiency Criterion // *J. Econ. Theory*. 1991. V. 55. № 1.
8. Russell R. Continuity of Measures of Technical Efficiency // *J. Econ. Theory*. 1990. V. 51. № 2.
9. Гильденбранд В. Ядро и равновесие в большой экономике. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию
13 XII 1993