

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ ДОХОДА С ВПОЛНЕ МОНОТОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© 1994 Поманский А.Б.

(Москва)

Описывается класс функций полезности (ФП), производная которых представима в виде преобразования Лапласа. Формулируются основные свойства для ФП, принадлежащих описываемому классу. Рассматривается проблема стохастического доминирования, изучаются предельные свойства показателей абсолютной и относительной несклонности к риску.

ВВЕДЕНИЕ

Современная финансовая теория базируется на аксиоматических предпосылках о поведении индивидуальных инвесторов при совершении операций на финансовых рынках. Их поведение предполагается рациональным и описывается в простейших ситуациях максимизацией ожидаемого значения ФП дохода. В большинстве случаев представительный инвестор считается несклонным к риску, что соответствует вогнутости индивидуальной ФП. Решения, принимаемые инвестором, в первую очередь определяются его отношением как к самому доходу, так и к сопряженному с ним риску и, следовательно, конкретными свойствами ФП.

В настоящей работе описывается класс вогнутых ФП (определяемый в дальнейшем как класс $\mathcal{L}$), для которых производные по доходу последовательно меняют знаки. Целесообразность выделения ФП из всей совокупности обусловлена по крайней мере двумя соображениями. Во-первых, этот класс включает в себя практически все традиционно используемые при описании поведения инвесторов ФП. Во-вторых, что, пожалуй, самое важное, каждая функция из $\mathcal{L}$ представима приближенно в виде суммы с положительными коэффициентами экспоненциальных ФП. Это следует из классической теоремы Бернштейна, известной в теории вероятностей, о представимости так называемых вполне монотонных функций в виде преобразования Лапласа положительной меры. Данный факт позволяет использовать мощные аналитические методы при решении специфических вопросов, важных с точки зрения финансовой теории. Основное внимание здесь сосредоточено лишь на двух. Первый – задача усиления и ослабления рисков, когда несклонному к риску инвестору приходится решить, что лучше: подвергнуть свой доход участию в двух рискованных проектах или вообще отказаться от риска, либо участвовать только в одном из проектов? Второй аспект освещает поведение показателей абсолютной и относительной несклонности к риску. С точки зрения теории, принципиальное значение имеет их поведение при изменении дохода. Используя специфические свойства класса $\mathcal{L}$, можно получить определенные точные утверждения.

Класс $\mathcal{L}$ в связи с задачей усиления и ослабления рисков рассматривался в [1]. В настоящей работе дается более полное интегральное представление функций, при-

надлежащих L , и, кроме того, систематическое описание класса; формулируется теорема в терминах предпочтения лотерей, полностью характеризующая класс.

В разд. 1 кратко представлены основные математические понятия и свойства вполне монотонных функций, которые необходимы для формального описания и исследования вводимого класса. Разд. 2 содержит точное определение класса ФП, характеристику основных свойств и теорему о необходимых и достаточных условиях принадлежности ФП изучаемому классу.

В разд. 3 рассматривается вопрос стохастического доминирования на вводимом классе, приводятся соответствующие критерии доминирования. Полученные выводы используются далее в разд. 4 в связи с задачей усиления или ослабления риска при одновременном воздействии независимых случайных факторов на доход инвестора. И, наконец, разд. 5 посвящен изучению асимптотических свойств показателей абсолютной и относительной несклонности к риску для функций полезности из введенного класса. Завершается статья обсуждением вопросов, требующих, с точки зрения автора, дальнейшего и более глубокого изучения.

В приложении даны доказательства двух лемм, формулируемых в разд. 1.

1. ВПОЛНЕ МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА

Рассмотрим необходимые свойства класса функций, заданных на $(0, \infty)$ и названных С.Н. Бернштейном вполне монотонными. Изложение использует результаты, приведенные в [2, 3].

Определение 1. Функция $\varphi(w)$, $w > 0$, называется вполне монотонной, если имеет производные всех порядков и $(-1)^n \varphi^{(n)}(w) \geq 0 \forall w > 0$. При $w \rightarrow 0$ $\varphi^{(n)}(w)$ может иметь конечный или бесконечный предел. Условимся считать, что $\varphi(w) = c > 0 \forall w \geq 0$ также является вполне монотонной. Наиболее важна для дальнейшего возможность представления вполне монотонных функций в виде преобразования Лапласа некоторой меры на $[0, \infty)$. Это следует из утверждения, принадлежащего С.Н. Бернштейну.

Теорема 1. Функция $\varphi(w)$ на $(0, \infty)$ — вполне монотонная тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\varphi(w) = \int_0^{\infty} e^{-sw} U(ds), \quad w > 0,$$

где U — (может быть, бесконечная) мера на $[0, \infty]$.

В дальнейшем удобно интерпретировать меру U в терминах "функции распределения" $F(s) = U\{0, s\}$, допуская, что $F(s)$ может быть и неограниченной на бесконечности, но конечной при каждом $s > 0$.

При наличии атома у меры U в нуле или при $F(0) > 0$ соответствующая $\varphi(w)$ будет иметь предел при $w \rightarrow \infty$, больший нуля.

Перечислим необходимые свойства вполне монотонных функций. Формулировки и доказательства приведены в [2, 3].

Свойство 1. $\varphi(w)$ интегрируема на $[0, 1]$ и $[1, \infty]$ тогда и только тогда, когда функция $1/s$ интегрируема относительно функции распределения $F(s)$ на $[1, \infty]$ и $[0, 1]$ соответственно.

Свойство 2. Если $\varphi_1(w)$ и $\varphi_2(w)$ вполне монотонны, то этим же свойством обладают $\varphi_1 + \varphi_2$ и $\varphi_1(w) \varphi_2(w)$. Первое получается формальным сложением мер, второе доказывается по индукции последовательным дифференцированием.

Свойство 3. Пусть для любой вполне монотонной $\varphi(w)$ сложная функция $\varphi(\psi(w))$ также вполне монотонна. Необходимое и достаточное условие справедливости включения состоит в том, что $\psi(w)$ — положительная функция с вполне монотонной производной. Достаточность следует из второй части свойства 2. Для доказательства

необходимости положим $\varphi(w) = e^{-\alpha w}$, где α – произвольный параметр. Последовательно дифференцируя $e^{-\alpha \varphi(w)}$ по w и устремляя α к нулю, показываем смену знаков у производных сложной функции.

Свойство 4. Если $\varphi(w)$ вполне монотонная и не постоянная, то квадратичная форма $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi(w_i + w_j) \xi_i \xi_j$ положительно определена для всех натуральных n и наборов положительных чисел $(w_1, \dots, w_n)$ и легко проверяется подстановкой в квадратичную форму интегрального представления $\varphi(w)$.

Свойство 5. Вполне монотонные функции логарифмически выпуклые, т.е. $\ln \varphi(w)$ – выпуклая функция. Это непосредственно следует из (4). Достаточно положить $n = 2$ и применить критерий положительности квадратичной формы.

Свойство 6. При любых неотрицательных целых n и $h > 0$ для вполне монотонной $\varphi(w)$ справедливы неравенства

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \varphi(w + kh) > 0, \quad w > 0. \quad (1)$$

Если для произвольной $\varphi(w)$, заданной на $(0, \infty)$, функции выполнены (1), то $\varphi(w)$ вполне монотонна. В [3] указанное свойство доказывается для абсолютно монотонных функций, определенных на $(-\infty, 0]$, а в [2] – на $[0, 1]$. Неотрицательная функция называется абсолютно монотонной, если все ее производные существуют и неотрицательны. В первом случае вполне монотонные функции получаются из абсолютно монотонных сменой знака у аргумента; во втором – путем замены переменной $x = e^{-z}$. Точнее, если $\varphi(x)$ – абсолютно монотонная функция на отрезке $[0, 1]$, то $\tilde{\varphi}(z) = \varphi(e^{-z})$ вполне монотонная на $(0, \infty)$.

Неравенства (1) удобно записывать в терминах конечных разностей. Определим для $h > 0$ оператор $\Delta_h \varphi(w) = \varphi(w + h) - \varphi(w)$ и введем обозначения $\Delta_h^0 \varphi(w) = \varphi(w)$, $\Delta_h^1 = \Delta_h$, $\Delta_h^{n+1} = \Delta_h \Delta_h^n$. Тогда несложно показать по индукции, что (1) эквивалентны неравенствам

$$(-1)^n \Delta_h^n \varphi(w) \geq 0 \quad n \geq 0, \quad h > 0, \quad w \geq 0.$$

Определение 2. Класс $\mathcal{L}$ – совокупность положительных на $(0, \infty)$ функций $U(w)$, производная которых – вполне монотонная функция, и $U(0) = 0$.

Описание класса $\mathcal{L}$ дает принадлежащее Шенбергу [3] следующее утверждение.

Теорема 2. $U(w)$ принадлежит $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда $U(w)$ представима в виде

$$U(w) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-sw}}{s} dF(s) \quad \text{и} \quad \int_1^\infty \frac{dF(s)}{s} < \infty.$$

Кроме перечисленных выше теорем и фактов о вполне монотонных функциях в дальнейшем потребуются два несложных утверждения.

Лемма 1. Пусть для неотрицательной функции $U(w)$, $w \in [0, \infty]$, для всех целых неотрицательных n и всех $h > 0$ выполнены неравенства $(-1)^n \Delta_h^{n+1} U(w) \geq 0$, $U(0) = 0$ и $\varphi_a(w) = U(w + a) - U(w)$. Тогда для любого $a > 0$: $(-1)^n \Delta_h^n \varphi_a(w) \geq 0$.

Лемма 2. Пусть $U(0) = 0$, $U(w) > 0$ при $w > 0$. $U(w)$ принадлежит классу $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда для любого $h > 0$ $\varphi_h(w) = U(w + h) - U(w)$ – вполне монотонная функция по w и $\varphi_h(0) < \infty$.

Доказательства лемм даны в приложении.

2. ОПИСАНИЕ КЛАССА $\mathcal{L}$ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ

Будем рассматривать неубывающие ФП дохода w , равные нулю при $w = 0$. Определим класс $\mathcal{L}$ как совокупность ФП, имеющих вполне монотонную производную. Из предыдущего раздела следует, что любая $U(w) \in \mathcal{L}$ имеет интегральное представление (теорема Шенберга)*

$$U(w) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-sw}}{s} dF(s),$$

где $F(s)$ – некоторая функция распределения и $\int_1^{\infty} \frac{dF(s)}{s} < \infty$. ФП $U(w) \in \mathcal{L}$ можно рассматривать как агрегат элементарных ФП $(1 - e^{-sw})/s$ с одинаковой предельной полезностью в 0, в котором параметризация осуществляется по показателю несклонности к риску s . Функция распределения $F(s)$ задает веса, с которыми элементарные функции входят в агрегированную ФП.

Свойства функции распределения или соответственно веса при параметризации определяют и свойства агрегированной ФП. Если $\int_0^{\infty} \frac{dF(s)}{s} < \infty$, то $U(w)$ имеет конечный предел при $w \rightarrow \infty$ (свойство 1 разд. 1)). Поскольку предельная полезность $U'(w)$ – преобразование Лапласа меры $F(s)$, конечность меры влечет за собой существование и конечность предельной полезности в нуле. Существование производных более высокого порядка у ФП в нуле определяется моментами функции распределения: если $\int_0^{\infty} s^n dF(s) < \infty$, $n \geq 0$, то производная $(n + 1)$ -го порядка $U^{(n+1)}(0)$ определена и конечна.

Рассматриваемый класс $\mathcal{L}$ включает в себя обычно используемые при анализе моделей финансовых рынков ФП типа HARA. По определению, к ним относятся те функции, для которых предельная полезность имеет вид $U'(w) = \left(\frac{aw}{\gamma} + b \right)^{-\gamma}$.

Однако функции типа HARA не предполагаются, вообще говоря, определенными для всех w , поэтому для принадлежности функций указанного типа классу $\mathcal{L}$ необходима строгая положительность γ и неотрицательность a и b и положительность хотя бы одного из этих коэффициентов. Эти условия являются и достаточными, в чем легко убедиться, если в качестве функции распределения по показателю несклонности к риску взять гамма-распределение $F(s) = \int_0^s t^{\gamma-1} e^{-at} dt$. Действительно, преобразование

Лапласа гамма-распределения

$$\Phi(w) = \int_0^{\infty} e^{-sw} s^{\gamma-1} e^{-as} ds = \frac{1}{(a+w)^{\gamma}} \Gamma(\gamma).$$

Естественно, что часто используемая квадратичная ФП

$$U(x) = \begin{cases} x - \frac{cx^2}{2} & \text{для } x \leq 1/c, \\ 1/c & \text{для } x > 1/c \end{cases} \text{ не принадлежит классу } \mathcal{L}.$$

* В [1] приводится иное интегральное представление для

$$U(w) = \int_0^{\infty} [g(s) - e^{-sw}] dF(s).$$

Согласно свойству 2 и 3 (разд. 1), класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно операций суперпозиции: если $U_1(w)$ и $U_2(w)$ принадлежат $\mathcal{L}$, то $U_1(U_2(w)) \in \mathcal{L}$. Действительно, если $U(w) = U_1(U_2(w))$, то $U'(w) = U_1'(U_2(w))U_2'(w)$. Суперпозиция вполне монотонной функции и функции из класса $\mathcal{L}$ также вполне монотонна (свойство 3), и то же самое можно утверждать о произведении производных (свойство 2).

Полная характеристика ФП из класса $\mathcal{L}$ возможна в терминах предпочтений на лотереях. Рассмотрим две последовательности лотерей, конструируемых следующим образом. Правильная монета бросается n раз. Лотерея $L_n^e(h)$ называется четной, если выигрыш участника равен kh , где $k, 0 \leq k \leq n$, — число выпадения орлов при четном k и 0 — в противоположном случае. Аналогично лотерея $L_n^o(h)$ называется нечетной, если участник получает сумму kh только при нечетном k и 0 при четном.

Класс $\mathcal{L}$ характеризует следующее утверждение.

Теорема 2.1. *ФП $U(w)$ принадлежит классу $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда при всех $w \geq 0, h > 0$ и натуральных n нечетная лотерея предпочтительнее четной по критерию ожидаемой полезности, т.е.*

$$E_{L_n^o} U(kh + w) \geq E_{L_n^e} U(kh + w). \quad (2)$$

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, проиллюстрируем ее условия на конкретных значениях n . Для $n = 1$ выигрыш в четной лотерее равен нулю с вероятностью единица, а в нечетной — с вероятностью $1/2$. Предпочтительность нечетной лотереи приводит к неравенству $\frac{1}{2} U(w + h) + \frac{1}{2} U(w) \geq U(w)$, что равносильно монотонности $U(w)$. При $n = 2$ четная лотерея дает выигрыш $2h$ с вероятностью $1/4$, а нечетная — h с вероятностью $1/2$ и (2) принимает вид $\frac{3}{4} U(w) + \frac{1}{4} U(w + 2h) \leq \frac{1}{2} U(w) + \frac{1}{2} U(w + h)$, из чего следует вогнутость функции полезности. И, наконец, при $n = 3$ (2) принимает вид

$$\frac{5}{8} U(w) + \frac{3}{8} U(w + 2h) \leq \frac{1}{2} U(w) + \frac{3}{8} U(w + h) + \frac{1}{8} U(w + 3h)$$

или

$$U(w) + 3U(w + 2h) \leq 3U(w + h) + U(w + 3h),$$

что влечет за собой выпуклость предельной полезности или положительность так называемого показателя благоразумия, равного отношению третьей производной ФК ко второй, взятому со знаком минус.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем условия теоремы в виде неравенств, опуская множитель 2^{-n}

$$U(w) \sum_{k=1}^m C_{2m}^{2k-1} + \sum_{k=0}^m C_{2m}^{2k} U(w + 2kh) \leq U(w) \sum_{k=0}^m C_{2m}^{2k} + \sum_{k=1}^m C_{2m}^{2k-1} U[w + (2k-1)h], \quad n = 2m,$$

$$U(w) \sum_{k=1}^m C_{2m+1}^{2k+1} + \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^{2k} U[w + 2kh] \leq U(w) \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^{2k} + \sum_{k=1}^{m+1} C_{2m+1}^{2k-1} U[w + (2k-1)h],$$

$$n = 2m + 1.$$

Первые слагаемые в обеих частях неравенства соответствуют суммированию по всем неблагоприятным исходам в лотереях. Для лотерей L_n^e такими являются исходы с

нечетным числом выпадения орлов, для L_n^o – с четным. Суммарные вероятности этих исходов для обоих типов лотерей совпадают и соответствующие слагаемые могут быть опущены. Тогда неравенства (2) для произвольного $n \geq 1$ представимы в виде

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} C_n^k U[2+kh] \geq 0,$$

или, используя разностный оператор Δ_h ,

$$(-1)^{n-1} \Delta_h^n U(w) \geq 0. \quad (3)$$

Теперь для доказательства теоремы применим леммы 1 и 2 (разд. 1). В силу леммы 1 из (3) следует, что $(-1)^{n-1} \Delta_h^{n-1} \varphi_a(w) \geq 0$, где $\varphi_a(w) = U(w+a) - U(w)$. Если $U(w) \in \mathcal{L}$, то $\varphi_a(w)$ – вполне монотонная функция и по свойству 6 (разд. 1) необходимые условия выполнены. Обратно. Пусть $(-1)^{n-1} \Delta_h^{n-1} \varphi_a(w) \geq 0 \quad \forall a$ и $w > 0$ и $n \geq 1$. Тогда $\varphi_a(w)$ – вполне монотонная при любом $a > 0$ и, по лемме 2, $U(w)$ принадлежит классу $\mathcal{L}$.

Отметим, что лотереи L_n^e и L_n^o "трудно различимы", поскольку все первые $n-1$ моменты у них совпадают. При четном n момент n лотереи L_n^e и все последующие будут больше, чем соответствующие моменты лотереи L_n^o . При нечетном n ситуация противоположная, однако нечетная лотерея L_n^o оказывается предпочтительнее (в смысле ожидаемой полезности) четной лотереи L_n^e .

3. СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДОМИНИРОВАНИЕ В КЛАССЕ $\mathcal{L}$

В теории оптимального выбора портфеля ценных бумаг существенную роль играет понятие стохастического доминирования. Напомним общепринятое определение. Пусть M – некоторое множество ФП и ξ_1 и ξ_2 – две произвольные неотрицательные случайные величины, из которых первая стохастически доминирует ξ_2 , $\xi_1 > \xi_2$, если для любых $U(x) \in M$ выполнено неравенство

$$EU(\xi_1) \geq EU(\xi_2). \quad (4)$$

Особый интерес представляет случай, когда средние значения случайных величин совпадают. Для M , включающего в себя все неубывающие вогнутые функции (класс $\mathcal{C}$ на $[0, \infty)$), доминирование ξ_1 над ξ_2 , $E\xi_1 = E\xi_2$ имеет место тогда и только тогда, когда распределение ξ_2 совпадает с распределением случайной величины $\xi_1 + \varepsilon$. При этом ε является "белым шумом" относительно ξ_1 , т.е. при любом τ из области значений $\xi_1: E\varepsilon / \xi_1 = \tau = 0$ [4, 5].

Доминирование в классе $\mathcal{L}$ естественным образом формулируется в терминах преобразований Лапласа.

Лемма 3.1. Случайная величина ξ_1 доминирует ξ_2 в классе $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда для всех $s \geq 0$

$$\int_0^\infty e^{-sx} dF_1(x) \leq \int_0^\infty e^{-sx} dF_2(x), \quad (5)$$

где $F_i(x)$ – функция распределения ξ_i .

Необходимость условий леммы очевидна. В качестве эталонных ФП достаточно взять $U(x) = 1 - e^{-sx}$ и записать условие доминирования. Не менее просто доказательство достаточности: Поскольку каждая $U(x) \in \mathcal{L}$ представима в виде предельной суммы эталонных ФП, взятых с положительными коэффициентами, (5) влечет за собой (4) для всех $U(x) \in \mathcal{L}$.

Так как изучаемый нами класс $\mathcal{L}$ вложен в класс всех неубывающих вогнутых функций на $[0, \infty)$, условие доминирования (5) – более слабое, чем представимость распределения ξ_2 в виде распределения $\xi_1 + \epsilon$. Проиллюстрируем это на следующем примере. Пусть ξ_1 принимает значения 2 и 4 с вероятностями $3/4$ и $1/4$ соответственно, а ξ_2 – равно 1 или 3 с вероятностями $1/4$ и $3/4$. Первая случайная величина доминирует вторую в классе $\mathcal{L}$. Действительно, (5) в данном примере принимает вид $3z^2 + z^4 \leq z + 3z^3$, где $z = e^{-s}$.

Последнее неравенство равносильно условию $(1 - z)^3 \geq 0$, справедливому для всех $z \in [0, 1]$. Несравнимость ξ_1 и ξ_2 в классе всех неубывающих вогнутых функций может быть проведена либо с помощью критерия Ротшильда – Стиглица [4], либо непосредственно предъявлением ФП $\bar{U}(x) \in \mathcal{C}$, для которой (4) не выполнено. Пусть

$$\bar{U}(x) = \begin{cases} x, & x \leq 3, \\ 3, & x > 3. \end{cases}$$

Тогда

$$E\bar{U}(\xi_2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot 3 = 2,5,$$

$$E\bar{U}(\xi_1) = 2 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2,3.$$

Следовательно, $E\bar{U}(\xi_1) < E\bar{U}(\xi_2)$ и ξ_1 не доминирует ξ_2 в классе $\mathcal{C}$.

Заметим, что при выводе критерия доминирования в классе $\mathcal{C}$ фактически используются в качестве эталонных функций вида $U(x) = \min(x, c)$, т.е. линейные для $x \leq c$ и постоянные при $x > c$. В классе $\mathcal{L}$ эталонными являются функции вида $1 - e^{-sx}$. Именно это определяет различия в формулировке условий стохастического доминирования.

Критерий (5) доминирования в классе $\mathcal{L}$ можно представить в другой эквивалентной форме. Обозначим через $P_i(s)$ преобразование Лапласа функций $F_i(x)$. Тогда в силу (5) $\psi(s) = P_2(s) - P_1(s)$ – неотрицательная функция. Применим к ней снова преобразование Лапласа и получим

$$\int_0^\infty e^{-sz} \psi(s) ds = \int_0^\infty P_2(s) e^{-sz} ds - \int_0^\infty P_1(s) e^{-sz} ds = \int_0^\infty \frac{dF_2(x)}{x+z} - \int_0^\infty \frac{dF_1(x)}{x+z} = \tilde{\psi}(z),$$

где $\tilde{\psi}(z)$ как преобразование Лапласа неотрицательной функции положительна и кроме того вполне монотонна. А отсюда все ее производные существуют и меняют последовательно знаки. Таким образом, нами получен критерий стохастического доминирования. Случайная величина ξ_1 с распределением $F_1(x)$ доминирует ξ_2 с распределением $F_2(x)$ тогда и только тогда, когда для всех натуральных n и положительных z выполнены неравенства

$$\int_0^\infty \frac{dF_1(x)}{(x+z)^n} \leq \int_0^\infty \frac{dF_2(x)}{(x+z)^n}. \quad (6)$$

В терминах моментов случайных величин критерий формулируется в следующем виде: ξ_1 доминирует ξ_2 , если все сдвинутые отрицательные моменты первой случайной величины не больше, чем второй.

Условия критерия можно получить, если в качестве эталонных ФП взять функции вида $U(w) = 1 - \frac{1}{(w+z)^n}$. Однако в этом случае мы достигли бы только необходимости

(6) для стохастического доминирования.

Критерий стохастического доминирования в терминах преобразования Лапласа (5) позволяет для класса $\mathcal{L}$ без труда исследовать феномен усиления или ослабления риска при сложении двух независимых случайных величин [1, 6]. Содержательно это можно объяснить так. Пусть доход инвестора в следующий от момента принятия решения – случайная величина $\tilde{w}$ и он может в момент 0 участвовать в двух взаимно независимых и независимых от $\tilde{w}$ лотереях (например, купить акции двух различных компаний). Предположим, что ему предложены на выбор две альтернативы: A_1 – с вероятностью $1/2$ принять участие в одной из лотерей; A_2 – с вероятностью $1/2$ принять одновременно участие в обеих лотереях или с той же вероятностью вообще не принимать на себя никакого риска. Вопрос состоит в том, какая альтернатива лучше. Формально речь идет о сравнении двух величин

$$A_1 = \frac{1}{2} Eu(\tilde{w} + x) + \frac{1}{2} Eu(\tilde{w} + y)$$

и

$$A_2 = \frac{1}{2} Eu(\tilde{w}) + \frac{1}{2} Eu(\tilde{w} + x + y).$$

Рассмотрим сначала ситуацию, когда обе случайные величины неотрицательны. Тогда нетрудно убедиться, что для $U(w) \in \mathcal{L}$ вторая величина всегда не больше первой.

Действительно, пусть $\omega_0(s)$, $\omega_x(s)$ и $\omega_y(s)$ – преобразования Лапласа случайных величин $\tilde{w}$, x и y соответственно. Первая альтернатива приводит к составной лотерее с преобразованием Лапласа $\omega_0(\omega_x + \omega_y)$, а вторая – к лотерее с преобразованием Лапласа $\omega_0(1 + \omega_x \omega_y) \geq \omega_0(\omega_x + \omega_y)$. Поскольку из условия положительности x и y имеем $\omega_x \leq 1$ и $\omega_y \leq 1$, $\omega_0(1 + \omega_x \omega_y) \geq \omega_0(\omega_x + \omega_y) \quad \forall s \geq 0$. Следовательно, A_2 всегда не больше A_1 , когда $U(w) \in \mathcal{L}$.

Наряду с неотрицательными рисками, т.е. неотрицательными случайными величинами x и y , часто рассматриваются так называемые нежелательные риски. Будем называть нежелательным риском случайную величину x с неположительным средним. С целью избежать ненужных сложностей также предположим, что x ограничена снизу с вероятностью единица. Определим преобразования Лапласа случайной величины x с распределением $F(x)$ как $\omega_x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dF(x)$ при $s \geq 0$. Поскольку

$\omega_x(0) = 1$ и $\omega'_x(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \geq 0$ по предположению и $\omega''_x(s) \geq 0 \quad \forall s \geq 0$, $\omega_x(s)$ – выпуклая функция на $[0, \infty)$ с минимумом в нуле.

Обратимся снова к задаче о выборе из двух альтернатив. Если обе случайные величины x и y – независимые нежелательные риски, т.е. $Ex \leq 0$ и $Ey \leq 0$, то $(1 - \omega_x(s))(1 - \omega_y(s)) \geq 0$ и альтернатива A_1 предпочтительнее A_2 , когда $U(w) \in \mathcal{L}$. Если же x – неотрицательная случайная величина, а y – независимый от $\tilde{w}$ и нежелательный риск, то ситуация меняется на противоположную: альтернатива A_2 оказывается предпочтительнее A_1 , поскольку $(1 - \omega_x(s))(1 - \omega_y(s)) \leq 0$. Это представляется вполне естественным. При выборе альтернативы A_2 благоприятный риск x взаимодействует с нежелательным – y . Инвестору в этом случае лучше принять на себя оба риска одновременно, чем с равными вероятностями – один из них.

Для иллюстрации рассмотрим два простых примера.

1. Пусть $\tilde{w} = w$, $x = \{0, h\}$ с вероятностями $1/2$ и $y = \{-h, 0, h\}$ с вероятностями $1/4$, $1/2$ и $1/4$ соответственно. Тогда $\omega_x = (1+z)/2$ и $\omega_y = (z^{-1} + 2 + z)/4$, где $z = e^{-sh}$. Подсчитаем произведение $(1-\omega_x)(1-\omega_y)$, знак которого позволяет сравнивать альтернативы $1-\omega_x = (1-z)/2$, $1-\omega_y = (4z-1-2z-z^2)/4z = -(1-z)^2/4z$ и $(1-\omega_x)(1-\omega_y) = -(1-z)^3/8$. В терминах альтернатив неравенство $A_2 \geq A_1$ эквивалентно неравенству для третьих разностей $U(w)$, т.е. $U(w+3h) - 3U(w+2h) + 3U(w+h) - U(w) \geq 0$, что равносильно положительности третьей производной $U(w)$.

2. Пусть $\tilde{w} = w$, $x = y = \{-h, 0, h\}$ с вероятностями $1/4$, $1/2$ и $1/4$ соответственно. Тогда оба риска – нежелательные и $(1-\omega_x)(1-\omega_y) = \left[-\frac{(1-z)^2}{4z} \right] = \frac{(1-z)^4}{16z^2}$. Предпочтительность альтернативы A_1 по отношению к A_2 приводит к соответствующему неравенству для четвертых разностей.

Итог проведенных рассуждений подводит следующее утверждение.

Утверждение. Пусть ФП инвестора принадлежит классу $\mathcal{L}$ и $\tilde{w}$ – его случайный доход. Если x и y – не зависящие от $\tilde{w}$ и друг от друга, нежелательные риски, то A_1 предпочтительнее A_2 . Если x – неотрицательный риск, а y – нежелательный, то A_2 предпочтительнее A_1 .

Мы предполагаем, что верно и обратное: описанное правило предпочтения альтернатив для всех $\tilde{w}$, x и y означает, что $U(w) \in \mathcal{L}$. Однако на настоящий момент строгое доказательство нам неизвестно.

5. ПОКАЗАТЕЛИ АБСОЛЮТНОЙ И ОТНОСИТЕЛЬНОЙ НЕСКЛОННОСТИ К РИСКУ

Остановимся на изучении поведения показателей абсолютной и относительной несклонности к риску

$$A(w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)} \text{ и } R(w) = -\frac{wU''(w)}{U'(w)}$$

для ФП из класса $\mathcal{L}$. Во избежание ненужных усложнений будем предполагать, что $U'(0)$ и $U''(0)$ конечны. Первое условие, как уже отмечалось, соответствует ограниченности функции распределения $F(s)$, второе – существованию среднего $\int_0^\infty s dF(s)$. При этих предположениях $A(0) < \infty$ и $R(0) = 0$.

Типичным и естественным требованием, накладываемым на ФП, является невозрастание абсолютной несклонности к риску по мере роста дохода. Использование квадратичной ФП, не удовлетворяющей этому условию, обычно объясняется лишь техническими удобствами анализа. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. Для $U(w) \in \mathcal{L}$ $A(w)$ – невозрастающая функция w . Кроме того, если мера $F(s)$ не сосредоточена в одной точке, то $A(w)$ строго убывает по w и $\lim_{w \rightarrow \infty} A(w) = s_0$, где $s_0 = \inf \{s : F(s) > 0\}$.

Первая часть теоремы следует из общих свойств вполне монотонных функций. Согласно свойству 5 (разд. 1), вполне монотонные функции логарифмически выпуклы. Поскольку $A(w) = -[\ln U'(w)]'$, это равносильно невозрастанию $A(w)$ по w . Если функция распределения $F(s)$ имеет по крайней мере две точки роста, то легко показать положительную определенность квадратичной формы $\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 U'(w_i + w_j) \xi_i \xi_j$ при

$w_1 \neq w_2$. Следовательно, $U'(w)$ строго логарифмически выпукла и $A(w)$ строго убывает по w .

Отсюда сразу следует, что показатель благоразумия $P(w) = -\frac{U'''(w)}{U''(w)}$ для $U(w) \in \mathcal{L}$

– также невозрастающая функция. Если $U'(0) = c$, то $\tilde{U}(w) = c - U'(w)$ принадлежит $\mathcal{L}$. Но показатель Эрроу – Пратта для $\tilde{U}(w)$ совпадает с показателем $P(w)$ для $U(w)$.

Идея доказательства второй части теоремы сводится к замене функции распределения $F(s)$ на кусочно-постоянную $\tilde{F}$.

Пусть $s_0 < s_1, \dots, < s_N$ – точки роста $\tilde{F}$ и $a_k, k = 0, \dots, N$ – соответствующая масса, сосредоточенная в точке s_k . Тогда при достаточно близком приближении $\tilde{F}(s)$ к $F(s)$:

$$A(w) \approx \sum_{i=0}^N s_i e^{-s_i w} a_i / \sum_{i=0}^N e^{-s_i w} a_i. \text{ Главными членами в числителе и знаменателе при}$$

$w \rightarrow \infty$ будут соответственно $s_0 e^{-s_0 w} a_0$ и $e^{-s_0 w} a_0$. Следовательно, при больших w $A(w) \approx s_0$.

Когда $s_0 = 0$, $A(w) \rightarrow 0$ при $w \rightarrow \infty$. Однако характер стремления $A(w)$ к нулю зависит от поведения в нуле функции распределения $F(s)$. Это затрудняет получение общих асимптотических оценок при больших значениях дохода. Но при вполне естественном предположении о поведении функции распределения в нуле точные асимптотические точки оценки достижимы. Будем предполагать, что $F(s)$ – правильно меняющаяся в нуле функция.

Определение. Функция распределения $F(s)$ называется правильно меняющейся в нуле, если $F(0) = 0$ и при всех $t > 0$ существует $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(ts)}{F(s)} = \psi(t) \leq \infty$.

Несложно показать [2, с. 335], что если $F(s)$ правильно меняется в нуле, то $\psi(t) = t^\rho$, где $-\infty \leq \rho \leq \infty$. Ниже мы ограничимся случаем, когда $0 < \rho < \infty$.

Дальнейшие построения основаны на одном из вариантов так называемой тауберовой теоремы [2, с. 509].

Теорема 5.2. Пусть $\phi(w)$ – преобразование Лапласа правильно меняющейся в нуле функции распределения $F(s)$ с показателем ρ ($0 < \rho < \infty$) и $ws = 1$. Тогда при $w \rightarrow \infty$ (соответственно $s \rightarrow 0$) имеет место асимптотическое соотношение $\phi(w) \sim \sim F(s) \Gamma(\rho + 1)$.

Для нахождения асимптотического поведения $A(w)$ необходимо иметь оценки для $U'(w)$ и $U''(w)$. Предположения относительно функции распределения для $U'(w)$ уже сделаны. Вторая производная – $U''(w)$, взятая со знаком минус, также является

преобразованием Лапласа функции распределения $F_1(s) = \int_0^s \tau dF(\tau)$. Поведение $F_1(s)$ в

нуле характеризует следующее утверждение.

Лемма 5.1. Пусть $F(s)$ правильно меняется в нуле с показателем ρ , $0 < \rho < \infty$. Тогда $F_1(s)$ правильно меняется в нуле с показателем $\rho + 1$. При этом существует

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F_1(s)}{sF(s)} = \frac{\rho}{\rho + 1}.$$

Рассмотрим

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\int_0^{ts} \tau dF(\tau)}{\int_0^s \tau dF(\tau)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{tsF(ts) - \int_0^{ts} F(\tau) d\tau}{sF(s) - \int_0^s F(\tau) d\tau} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{t \frac{F(ts)}{F(s)} - \int_0^{ts} F(\tau) d\tau / sF(s)}{1 - \int_0^s F(\tau) d\tau / sF(s)}. \quad (7)$$

Первое слагаемое в числителе по предположению имеет предел t^{p+1} . Вторые слагаемые в числителе и знаменателе имеют соответственно пределы $t^{p+1}/(p+1)$ и $1/(p+1)$. Для доказательства можно использовать те же аргументы, что в [2, с. 512] при выводе леммы об асимптотическом поведении плотности правильно меняющейся функции распределения $F(s)$. Подстановка пределов переменных величин в (7) завершает доказательство первой части леммы. Интегрируя по частям и применяя те же рассуждения, вычисляем

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F_1(s)}{sF(s)} = \frac{\int_0^s \tau dF(\tau)}{sF(s)} = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{F(us)}{F(s)} du = 1 - \int_0^1 u^p du = \frac{p}{p+1}.$$

Теперь воспользуемся теоремой 5.2

$$\left. \begin{aligned} U'(w) &\sim F(s)\Gamma(p+1) \\ -U''(w) &\sim F(s)\Gamma(p+2) \end{aligned} \right\} ws = 1, \quad w \rightarrow \infty,$$

а также соотношением $F_1(s)/F(s) \sim s p/(p+1)$ при $s \rightarrow 0$, из чего следует

$$A(w) \sim \frac{F_1(s)}{F(s)} \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(p+1)} \sim ps = \frac{p}{w}.$$

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 5.3. Если $U(w) \in \mathcal{L}$ и соответствующая ей функция распределения правильно меняется в нуле с показателем p , $0 < p < \infty$, то показатель абсолютной несклонности к риску асимптотически ведет себя, как p/w при $w \rightarrow \infty$.

Заметим, что для ФП вида $U(w) = w^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, асимптотические оценки обращаются в строгие равенства при $p = 1 - \alpha$.

Существенность условий сформулированной теоремы можно проиллюстрировать на конкретных примерах. Пусть $\varphi(w) = \exp(-w/(1+w))$. Показатель степени с точностью до знака — функция, принадлежащая классу $\mathcal{L}$. Следовательно, $\varphi(w)$ — вполне монотонная функция (свойство 3, разд. 1) и ее первообразная $U(w) \in \mathcal{L}$. Показатель абсолютной несклонности к риску $A(w) = 1/(1+w)^2$ имеет более быструю сходимость к нулю. Возможна и противоположная ситуация. Если $F(s)$ — устойчивое распределение с параметром α , $0 < \alpha < 1$, то преобразование Лапласа $\varphi(w) = e^{-w^\alpha}$ [2] и показатель несклонности к риску $A(w) = \alpha w^{\alpha-1}$ убывают, но достаточно медленно. В обоих случаях соответствующие функции распределения ведут себя правильно в нуле, но показатель p в первом равен бесконечности, во втором — нулю.

Перейдем к исследованию поведения показателя относительной несклонности к риску $R(w)$ для функций полезности из класса $\mathcal{L}$. Весьма часто при анализе влияния различных факторов на поведение инвесторов или потребителей оказываются полезными или необходимыми оценки на максимальное значение $R(w)$ [7, 8].

В качестве примера рассмотрим простейшую модель финансового рынка — рынок ценных бумаг Эрроу — Дебре. Предположим, что имеется два момента времени: 0 и 1. В момент 1 реализуется m состояний, каждому из которых соответствует "ценная бумага" i , $1 \leq i \leq m$, с отдачей $p_i > 0$; вероятность реализации состояния i равна $\pi_i > 0$; и $\sum \pi_i = 1$. При реализации состояния i выплаты производятся только по ценной бумаге, соответствующей ему. Несмотря на простоту описанной модели, к ней при определенных предположениях сводятся достаточно общие конструкции финансовых рынков. Пусть w_0 — начальный капитал и z_i — объем инвестиций в ценную бумагу i , т.е.

$$\sum_{i=1}^m z_i \leq w_0. \quad (8)$$

Тогда задача выбора портфеля ценных бумаг состоит в определении $(z_1, \dots, z_m)$, таких, что

$$EU = \sum \pi_i U(z_i p_i) \quad (9)$$

достигает максимума при выполнении бюджетного ограничения (8).

Предположим, что выплаты по ценной бумаге k увеличиваются при неизменности вероятностей наступления всех событий и выплат по остальным ценным бумагам. Интуитивно ясно, что агент, достаточно толерантный к риску, в этих условиях должен увеличить инвестиции в актив при росте отдачи p_k . Формально это соответствует неравенству $\partial z_k / \partial p_k > 0$.

Реализация этого условия тесно связана с поведением показателя относительной несклонности к риску. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ – оптимальное решение задачи (8), (9), удовлетворяющее условиям первого порядка $\pi_i p_i U'(\bar{z}_i p_i) = \lambda$, $\partial \bar{z}_k / \partial p_k > 0$ и $\partial \bar{z}_i / \partial p_k \leq 0$, $i \neq k$, тогда и только тогда, когда $R(w_k) = (-w_k U''(w_k) / U'(w_k)) < 1$, где $w_k = \bar{z}_k p_k$.

Для доказательства достаточно продифференцировать левые и правые части условий первого порядка по p_k и произвести необходимые преобразования, приводящие к равенствам

$$\lambda'_k \sum_{i=1}^m \frac{1}{\pi_i p_i^2 U'_k} = \frac{U'_k + z_k p_k U''_k}{p_k^2 U''_k}, \quad (10)$$

$$\bar{z}'_i = \frac{\lambda'_k}{\pi_i p_i^k U'_i}, \quad i \neq k, \quad \bar{z}'_k = - \sum_{i \neq k} \bar{z}'_i.$$

Здесь использованы обозначения $\lambda'_k = \partial \lambda / \partial p_k$, $U'_i = U''(\bar{z}_i p_i)$ и $U'_k = U'(\bar{z}_k p_k)$. Если числитель в правой части (10) положителен, то и λ'_k положительно. Следовательно, $\bar{z}'_i < 0 \quad \forall i \neq k$, что, в свою очередь, определяет положительность $\bar{z}'_k$. Положительность $U'_k + z_k p_k U''_k$ равносильна сформулированному в утверждении условию на $R(w)$.

Таким образом, если при всех $\bar{w}$ значение $R(w) < 1$, то увеличение выплат в каком-нибудь состоянии влечет за собой рост инвестиций в соответствующий вид ценных бумаг при одновременном их снижении в остальные.

Для проверки выполнения неравенства $R(w) < 1$ удобно воспользоваться эквивалентным условием: $\phi(w) = w U'(w)$ монотонно возрастает по w . Очевидно, что если носитель меры $F(s)$ отделен от нуля, например расположен правее единицы, то $\phi(w) = w \int_1^\infty e^{-sw} f(s) ds < w e^{-w}$ и $\phi(w)$ будет стремиться к нулю при $w \rightarrow \infty$.

Правильное изменение $F(s)$ в нуле также не гарантирует выполнения неравенства $R(w) < 1$. Необходимое условие – показатель $\rho \leq 1$, что в определенной степени (см. [2, с. 512]) равносильно убыванию плотности распределения в нуле. Предположим, что плотность распределения $f(s)$ существует при всех $s \geq 0$ и непрерывно

дифференцируема. Тогда, интегрируя по частям, получаем $\phi'(w) = - \int_0^\infty s f'(s) e^{-sw} ds$. Не-

положительность $f'(s) \forall s$ влечет за собой возрастание $\phi(w)$. Допустим теперь, что $f'(0) > 0$. Тогда при достаточно больших w $\phi'(w)$ будет отрицательным, а при $w = 0$ $\phi'(0) = 1$. Следовательно, $\phi(w)$ – не монотонно возрастающая функция. Объединяя приведенные выше рассуждения, получаем следующее утверждение.

Утверждение. Пусть функция распределения $F(s)$ для $U(w) \in \mathcal{L}$ такова, что существует непрерывная плотность $f(s)$. Если $f(s)$ монотонно убывает, то $R(w) < 1$. Если $f'(s)$ строго положительна в окрестности нуля, то $\max_{w \in (0, \infty)} R(w) > 1$.

В заключение остановимся на ряде вопросов, возникающих в связи с исследованием свойств класса $\mathcal{L}$.

1. Наиболее важен, с нашей точки зрения, вопрос о структуре множества эффективных портфелей. К настоящему моменту нам известно полное описание множества для полных рынков с тремя состояниями. В общем случае проблема описания структуры множества эффективных портфелей связана с задачей интерполяции вполне монотонных функций.

2. Известно, что для произвольных полных рынков с безрисковым активом любой эффективный портфель – линейная комбинация некоторого рискованного портфеля с безрисковым только для ФП типа HARA, принадлежащих $\mathcal{L}$. Позволяет ли ослабление ограничения на произвольность отдач и вероятностей событий расширить класс функций, для которых множество эффективных портфелей имеет аналогичную структуру?

3. Свойства ФП в существенной мере зависят от типа соответствующего распределения по параметру несклонности к риску. По всей видимости, можно получить дополнительные результаты, предполагая это распределение безгранично-делимым. В этом случае показатель абсолютной несклонности к риску также является вполне монотонной функцией. Это следует из хорошо известного факта в теории преобразований Лапласа. Существует ли связь между соответствующими распределениями?

4. В разд. 4 приведены критерии стохастического доминирования в классе $\mathcal{L}$. Однако они недостаточно хорошо интерпретируемы экономически в противоположность критерию стохастического доминирования в классе всех вогнутых ФП. Представляется естественным вопрос о получении критерия в более конструктивной и содержательной форме.

5. При решении задачи отыскания оптимального портфеля обычно используются стандартные методы оптимизации (градиентный метод и т.п.). Известно, что при большой размерности задач (особенно динамических) время на поиск оптимума весьма значительно. Возможно, для ФП из класса $\mathcal{L}$ реализуемы вычислительные алгоритмы, использующие в явном виде их специфические свойства, которые позволят существенно сократить это время.

Автор признателен Голубовскому В.В. за полезные обсуждения в процессе работы над статьей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. При $n = 1$ имеем $U(w + h) - U(w) \geq 0$, из чего следует монотонность $U(w)$. При $n = 2$ из $U(w) + U(w + 2h) \leq 2U(w + h)$ при $h \rightarrow 0$ вытекает, что $U(w) \leq U(w + 0)$. Аналогично из $U(w - 2h) + U(w) \leq 2U(w - h)$ получаем $U(w) \geq U(w - 0)$. Таким образом, $U(w)$ – непрерывная функция. Непрерывны также по w , a и h функции $\varphi_a(w)$ и $\Delta_h^n \varphi_a(w)$. Пусть $a = kh$, где k – натуральное число. Тогда

$$\varphi_a(w) = \varphi_{kh}(w) = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta_h^1 U(w + ih) \text{ и } \Delta_h^n \varphi_a(w) = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta_h^{n+1} U(w + ih).$$

Далее, пусть $h_1 = mh_2$ (m – натуральное число). Тогда

$$\Delta_{h_1}^1 U(w) = \Delta_{mh_2}^1 U(w) = \sum_{j=0}^m \Delta_{h_2}^1 U(w).$$

Таким образом, если a и h рационально соизмеримы, то утверждение леммы выполнено. Из непрерывности $\Delta_h^n \varphi_a(w)$ по своим аргументам и всюду плотности множества рационально соизмеримых пар (a, h) следует справедливость леммы для их произвольных значений.

Доказательство леммы 2. Необходимость условий леммы очевидна. Пусть

$$\varphi_h(w) = U(w+h) - U(w). \quad (11)$$

Если $U(w) \in \mathcal{L}$ и $F(s)$ – функция распределения, то $dF_h^\#(s) = (1 - e^{-sh})dF(s)/s$ – подходящая мера для $\varphi_h(w)$. Покажем обратное. Пусть $\varphi_h(w)$ – вполне монотонная функция. Тогда для каждого $h > 0$ существует функция распределения $F_h(s)$, такая, что

$$\varphi_h(w) = \int_0^\infty e^{-sw} dF_h(s) \text{ и } \int_0^\infty dF_h(s) = U(h) < \infty.$$

Рассмотрим $\varphi_{h+a}(w) = U(w+h+a) - U(w) = [U(w+h+a) - U(w+h)] + [U(w+h) - U(w)] = \varphi_a(w+h) + \varphi_h(w)$.

Поскольку сумма двух вполне монотонных функций также вполне монотонна, в силу теоремы об однозначности определения функции распределения по его преобразованию Лапласа [6] имеем равенство для почти всех s : $dF_{h+a}(s) = e^{-sh}dF_a(s) + dF_h(s)$.

Рассмотрим функциональное уравнение

$$\psi(h+a) = \psi(a)e^{-sh} + \psi(h), \quad \psi(h) \geq 0, \quad a, h > 0. \quad (12)$$

Очевидно, что $\psi(h)$ монотонно возрастает и $\lim_{h \rightarrow 0} \psi(h) = 0$. Полагая, $a = h$, имеем

$$\psi(2h) = \psi(h)(1 + e^{-sh}). \text{ Продолжая, по индукции получаем } \psi(2^k h) = \psi(h) \prod_{i=0}^{k-1} (1 + e^{-2^i sh}).$$

При любом положительном h последовательность произведений сходится, что гарантирует равномерную ограниченность $\psi(h)$ на $(0, \infty)$ и существование $\lim_{a \rightarrow \infty} \psi(a) =$

$c < \infty$. Аналогично можно показать, что

$$\psi(na) = \psi(a) \sum_{k=0}^{n-1} e^{-sak}.$$

Переходя к пределу по n в обеих частях равенства, получаем $c = \psi(a)[1 - e^{-sa}]^{-1}$.

Следовательно, функциональное уравнение (12) имеет единственное с точностью до множителя, зависящего от s , решение и $dF_h(s) = (1 - e^{-sh})dF(s)$, где $F(s)$ – некоторая мера.

Устремим в (11) w к нулю. Тогда $\varphi_h(0) = U(h) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-sh}}{s} d\tilde{F}(s)$, где $d\tilde{F}(s) = sdF(s)$.

Поскольку $\int_1^\infty \frac{d\tilde{F}(s)}{s} = \int_1^\infty dF(s) < \infty$, согласно теореме Шенберга, $U(w) \in \mathcal{L}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pratt J.W., Zeckhauser R.J. Proper Risk Aversion // *Econometrica*. 1987. V. 55. № 1.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967.
3. Ахизер Н.И. Классическая проблема моментов. М.: Физматгиз, 1961.
4. Rothschild M., Stiglitz J. Increasing Risk / A. Definition // *J. Econ. Theory*. 1970. V. 2. № 2.
5. Ross S.A. Mutual Fund Separation in Financial Theory. The Separating Distributions // *J. Econ. Theory*. 1978. V. 17. № 2.
6. Kimball M.S. Standard Risk Aversion // *Econometrica*. 1993. V. 61. № 3.
7. Ingersoll J. Theory of Financial Decision Making. Dotowa, N.J., 1987.
8. Митюшин Н.Г., Полтерович В.М. Критерий монотонности функций спроса // *Экономика и мат. методы*. 1978. Т. 14. Вып. 1.

Поступила в редакцию
7 IV 1994