

РАВНОВЕСНАЯ ДИНАМИКА ЗАМКНУТОГО РЫНКА МОНОПРОДУКТОВЫХ ПРОИЗВОДСТВ*

© 1994 Бельский В.З., Слаников А.Д.

(Москва)

Работа является шагом к построению формализованной общей схемы линейной теории экономического роста, аналогичной теории Неймана – Гейла, но для децентрализованной рыночной экономики, когда участники производства действуют как самостоятельные независимые субъекты. Рассмотрен случай экономики обмена монопродуктовых производств при двух способах формирования бюджетов участников, когда их доли в общем бюджете фиксированы и на основе принципа самокупаемости.

В теории экономического роста фундаментальную роль играет замкнутая линейная модель Дж. фон. Неймана – Д. Гейла [1, 2]. В ее рамках обычно ставятся оптимизационные задачи в предположении, что рассматриваемая экономическая система подчиняется централизованному управлению. При анализе рыночной (децентрализованной) экономики большую роль приобретают такие понятия, как цены, прибыль и равновесие; наиболее полные результаты изложены в [3]. Данный подход особенно актуален в связи с переходом России к свободному рынку.

Настоящую работу следует рассматривать как шаг к построению формализованной общей схемы линейной теории рыночной динамики, аналогичной теории Неймана – Гейла. Мы используем понятийный и математический аппарат, развитый в [4–12].

Исходным понятием является гейловская технология [4, с. 392], задающаяся точечно-множественным производственным отображением ω пространства продуктов R_+^n в себя; $y \in \omega(x)$ означает, что из вектора исходных продуктов (ресурсов) $x \in R_+^n$ за единицу времени может быть получен вектор конечных продуктов $y \in R_+^n$. Правило выбора, ставящее в соответствие каждому вектору x (интерпретируемому как состояние системы) вектор $y = \zeta(x) \in \omega(x)$, называется *стратегией управления*. Обычно стратегия ζ находится из решения динамической оптимизационной задачи, и для соответствующих *эффективных* траекторий имеют место результаты типа теоремы о магистралах (см. [6, 7]).

Мы будем рассматривать рыночную экономику, когда централизованное (оптимизационное) управление отсутствует и динамика системы определяется механизмом свободного обмена (exchange economy) в предположении, что цены равновесия устанавливаются быстро (в модели – мгновенно). Изучается простейший случай такой экономики, когда каждый продукт производится только одним участником и наоборот: каждый участник производит только один продукт. Цель исследования – выяснить, насколько механизм свободного обмена может быть близок по своей эффективности к совокупной технологии, порождаемой тем же составом участников, но действующей как коллективная (управляемая единым органом) система.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ проектов 93-012-842 и 93-06-10356).

Рассмотрены два способа формирования бюджетов участников: 1) каждый участник j получает некоторую фиксированную долю δ_j в общем бюджете системы; 2) бюджеты формируются на основе принципа самофинансирования (модель чистого обмена). Главные вопросы и результаты статьи представлены в разд. 4, при этом даны лишь частичные ответы на поставленные вопросы, см. комментарий на с. 127.

1. СОВОКУПНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ МОНОПРОДУКТОВЫХ ПРОИЗВОДСТВ

В описываемой модели система функционирует как совокупность товаропроизводителей $j = 1, \dots, n$; производитель j , и только он один, выпускает продукт вида j и полностью им распоряжается. Технологические возможности участников характеризуются набором производственных функций (ПФ) ψ_j , каждая из которых принадлежит классу W непрерывных положительно однородных, монотонных функций на R_+^n . Предполагается, кроме того, что ψ_j выпуклы вверх, соответствующий подкласс обозначается дополнительным значком " $\wedge$ ": $\psi_j \in \hat{W}$.

При векторе наличных ресурсов $x \in R_+^n$ производственное множество участника j

$$\omega_j(x) := \{y = se_j \mid 0 \leq s \leq \psi_j(x)\}, \quad (1)$$

где e_j — j -й орт в пространстве продуктов. Вступая в обменно-перераспределительные отношения, участники образуют *совокупную технологию* $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega}(x) := \left\{ y \in R_+^n \mid y = \sum_{j=1}^n y^j, \quad y^j \in \omega_j(x^j), \quad \sum_{j=1}^n x^j = x \right\}. \quad (2)$$

В (2) вектор исходных ресурсов x делится между участниками, затем каждый из них перерабатывает выделенный ему вектор-ресурс x^j в вектор-продукт (на самом деле в монопродукт y_j , но формально удобнее считать — в вектор-продукт) $y^j := y_j e_j$, после чего все складывается в "общий котел" и получается суммарный вектор конечного продукта y . В следующий момент времени y снова будет выступать как вектор ресурсов, подлежащий перераспределению. Поэтому динамика совокупной технологии полностью определяется *механизмом перераспределения* наличных ресурсов.

Из условия $\psi_j \in \hat{W} \forall j$ следует, что $\bar{\omega}$ — гейловская технология. Это дает возможность проводить на совокупных технологиях прямое сопоставление двух полярных механизмов перераспределения: с одной стороны, можно рассматривать их как монопродуктовый идеальный рынок (МИР, это понятие будет введено ниже), с другой — как обычные гейловские технологии, функционирующие в режиме централизованно управляемой системы (т.е. в рамках классической магистральной теории). В последнем случае будем использовать термин "кооперативная технология" (КОТ).

Сопоставление эффективностей МИР и КОТ — основной вопрос нашего исследования. Отметим предварительно, что, во-первых, не всякая гейловская технология представима как совокупная (в форме (1), (2)), во-вторых, МИР никогда не может быть эффективнее КОТ.

Рассмотрим основные примеры.

Пример 1 (простая модель Леонтьева). Пусть $a^j \in R_+^n$ — вектор затрат на единицу продукта j ; тогда $\psi_j = \Lambda_{a^j}$, где, по определению, при фиксированном векторе $a \in R_+^n$, $a \neq 0$

$$\Lambda_a(x) := \max\{s \mid sa \leq x\} = \min_i \frac{x_i}{a_i}, \quad x \in R_+^n, \quad (3)$$

где i — номер компоненты. Эта функция называется *функцией комплектности*

Канторовича с эталонным вектором a . Здесь, как легко видеть, совокупная технология (2) совпадает с леонтьевской

$$\omega(x) := \{y \in R_+^n \mid Ay \leq x\}, \quad x \in R_+^n, \quad (4)$$

где A – квадратная матрица прямых затрат, составленная из столбцов a^j ; это – основной случай, используемый в практических приложениях. Таким образом, леонтьевская технология представима как совокупная.

Пример 2. Для аналитического исследования удобен частный случай совокупной технологии, задаваемый производственными функциями Кобба – Дугласа

$$\psi_i(x) := \gamma_i \prod_{j=1}^n x_j^{v_{ij}} \quad x = (x_j) \in R_+^n, \quad \gamma_i > 0, \quad (5)$$

где номер участника – i , а не j , как выше; предполагается, что неотрицательные показатели степеней удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^n v_{ij} = 1 \quad \forall i, \quad (6)$$

что обеспечивает включение $\psi_i \in \hat{W}$. Если обозначить квадратную матрицу (v_{ij}) через v , то (6) запишется в виде

$$ve = e, \quad e := (1, 1, \dots, 1) \in R_+^n. \quad (7)$$

2. РЫНОЧНЫЙ МЕХАНИЗМ, РАВНОВЕСИЕ

Рынок – это механизм, выполняющий функцию перераспределения ресурсов путем взаимобмена на основе цен с помощью денег (всеобщего эквивалента). Предполагается, что цены диктуются рынком в целом и едины для всех участников, т.е. не зависят от конкретных субъектов акта обмена. Описание рынка дается обычно в форме модели обмена, которую мы вкратце напомним.

2.1. Модель обмена. В пространстве продуктов R_+^n модель задается составом участников $j, j = 1, \dots, m$ ($m \geq 1$, причем в общем случае может быть $m \neq n$), каждый из которых характеризуется функцией полезности $\psi_j \in \hat{W}$ и вектором предложения (начальных запасов) $v_j \in R_+^n$. Для обозначения всей совокупности будем использовать обозначения $\Psi := \{\psi_j\}$, $V := \{v_j\}$; общее суммарное количество ресурсов

$$v := \sum_{j=1}^m v_j. \quad (8)$$

Замыкается описание указанием закона распределения бюджета, т.е. отображения $B: (V, p) \rightarrow (\beta_1, \dots, \beta_m)$; подразумевая V фиксированным, будем, как правило, писать $\beta_j(p)$ вместо полного $\beta_j(V; p)$. Функции $\beta_j(\cdot)$ задаются экзогенно, причем они должны удовлетворять условиям:

а) $\beta_j(\cdot)$ – непрерывные положительно однородные неотрицательные функции аргумента p ;

$$\text{б) } \sum_{j=1}^m \beta_j(p) \equiv pv. \quad (9)$$

При фиксированном p участники рынка решают задачи

$$\psi_j(x) \rightarrow \max,$$

$$px \leq \beta_j(p), \quad x \in R_+^n, \quad j = 1, \dots, m. \quad (10)$$

Множество $X^j(p)$ решений задачи (10) (обычно оно состоит из единственной точки, но в общем случае – это выпуклое множество) называется *индивидуальным спросом*; выпуклозначная вектор-функция

$$X(p) := \sum_{j=1}^m X^j(p) \quad (11)$$

называется *совокупным спросом*, а функция

$$\text{Res}(p) := v - X(p) \quad (12)$$

– *остаточным* (избыточным) предложением. Если

$$\exists r \in \text{Res}(p): r \geq 0, \quad (13)$$

то выполнено условие материального баланса; соответствующие цены называются *равновесными*. При произвольных ценах материальный баланс может нарушаться, но финансовый выполняется всегда

$$pr = 0 \quad \forall (p \in R_+^n, r \in \text{Res}(p)). \quad (14)$$

Это следует из того, что соответствующие равенства справедливы во всех индивидуальных задачах (10), так как $\psi_j \in \hat{W}$ – монотонна и положительно однородна; предполагается, конечно, что $\psi_j \neq 0$; тождество (14) называется *законом Валь-раса*.

2.2. Равновесие в замкнутом смысле. Вышесказанное корректно только тогда, когда решения задач (10) существуют, что гарантировано, лишь если все цены строго положительны, $p > 0$. В противном случае задача (10) может не иметь решения для какого-либо участника j . Это затруднение приводит к тому, что существование в описанной модели равновесных цен удастся доказать только, когда все бюджеты строго положительны

$$\beta_j(p) > 0 \quad \forall (j \in [1, m], p \in R_+^n, p \neq 0) \quad (15)$$

(см., например, [3, с. 39]), что для наших целей недостаточно. В связи с этим будем использовать близкое, но несколько иное понятие решения в задаче (10), в основе которого лежит лемма Полтеровича.

Лемма 1 ([3, с. 52]). Пусть $\Phi \in \hat{W}$, $p \in R_+^n$, $\beta > 0$. Тогда множества решений задачи условной максимизации

$$\Phi(x) \rightarrow \max,$$

$$px \leq \beta, \quad x \in R_+^n \quad (16)$$

и задачи безусловной максимизации

$$\beta \ln \Phi(x) - px \rightarrow \max_{x \in R_+^n} \quad (17)$$

совпадают (включая случай, когда оба они пусты).

Условие $\beta > 0$ существенно: при $\beta = 0$ задача (17) всегда имеет решение – им является множество

$$\Delta(p) := \{x \in R_+^n \mid px = 0\}, \quad (18)$$

в то время как задача (16) может не иметь решения. Так будет, если

$$\exists x \in \Delta(p): \Phi(x) > 0. \quad (19)$$

Таким образом, области существования решения в пространстве параметров p, β

$$R_+^{n+1} = \{p, \beta \mid p \in R_+^n, \beta \geq 0\} \quad (20)$$

в (16) и (17) принципиально различны: в (17) эта область замкнута, в (16) – незамкнута. В ситуации, когда β – функция от p , именно отсутствие замкнутости (см. (15)) является препятствием для полного анализа модели.

Наш подход состоит в том, что решение задачи (16) всегда на всем множестве (20), в том числе при $\beta = 0$ и/или даже при $p = 0$, понимается в смысле (17). Для формализации введем в рассмотрение каноническую (нормированную) задачу

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\rightarrow \max, & \Phi &\in \hat{W}, \\ px &\leq 1, & x &\in R_+^n, \end{aligned} \quad (21)$$

множество решений которой, как функция аргумента p , называется *функцией спроса*; ее значения, возможно равные ϕ , обозначаются через $\hat{X}(p)$. Тогда с учетом положительной однородности Φ в качестве замкнутого решения задачи (16) полагаем, по определению,

$$X(p) = X_\beta(p) := \begin{cases} \beta \hat{X}(p), & \beta > 0, \\ \Delta(p), & \beta = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Стандартными рассуждениями устанавливается справедливость следующей леммы.

Лемма 2. *Отображение $(p, \beta) \rightarrow X_\beta(p)$ замкнуто на R_+^{n+1} .*

Эта лемма дает оправдание понятию замкнутого решения с точки зрения математического аппарата, так как в обычном понимании множества $X(p)$ она не верна. Прокомментируем замкнутое решение с содержательной точки зрения.

Разделим участников рынка (10) на две категории: *активные* – те, которые обладают положительным бюджетом, обозначим их множество

$$J = J(p) := \{j \in [1, \dots, m] \mid \beta_j(p) > 0\} \quad (23)$$

и *пассивные* – участники с нулевым бюджетом $\beta_j = 0$. Ситуация (19) при $\Phi = \psi_j$ означает, что цены p льготны для участника j , так как множество (18) не пусто и содержит элемент, имеющий положительную для него полезность ψ_j . Если в этой ситуации он имеет ненулевой бюджет, то такое положение признается ненормальным и соответственно решение – отсутствующим; если же $\beta_j = 0$, то участник j может приобрести любой вектор $x \in \Delta(p)$. В таком контексте множество (18) можно назвать *благотворительным*: его вектор-ресурсы, имеющие нулевую рыночную стоимость,

могут выдаваться бесплатно только "нищим" участникам, бюджет которых равен нулю*.

Отметим еще, что ввиду монотонности функций ψ_j ясно, что если для активного участника $x \in X_j(p)$, то $x + z \in X_j(p) \quad \forall z \in \Delta(p)$, т.е.

$$X_j(p) \neq \emptyset \Rightarrow X_j(p) = X_j(p) + \Delta(p) \quad \forall j \in J(p). \quad (24)$$

Отсюда вытекает следующее.

Лемма 3. *Решение задачи (10) в целом существует в замкнутом смысле тогда и только тогда, когда для активных участников оно существует в обычном смысле. При этом замкнутый совокупный спрос всего рынка (11) совпадает с обычным совокупным спросом активной группы.*

Кратко содержание этой леммы можно выразить так: в формировании совокупного спроса "нищих" участников можно не учитывать.

В соответствии с изложенным подходом, дадим следующее определение понятию замкнутого равновесия.

Определение 1. Вектор цен $p \neq 0$ и набор векторов $\{x^j\}$ образуют равновесие в замкнутом смысле (при начальных запасах ресурсов V), если:

а) x^j – решение задачи (10) в замкнутом смысле;

б) $\sum_{j=1}^m x^j = v$ – условие материального баланса; его иногда удобно представить в

более подробной форме

$$\text{в) } r := v - \sum_{j \in J(p)} x^j \geq 0, \text{ г) } \sum_{j \in J(p)} x^j = r.$$

При равновесных ценах набор векторов $\{x^j\}$, указанных в определении 1, назовем сбалансированным решением.

Замечание 1. Если $v \in \Delta(p)$, то p – равновесные цены, ибо в силу (9,б) $\beta_j(p) = 0 \quad \forall j$ все участники пассивны и очевидным образом можно удовлетворить условие б), положив, например, $x^j = v/m \quad \forall j$. Это вырожденный тривиальный случай.

Замечание 2а. На рынке активных участников а), в) – условия обычного равновесия. Если оно существует, его всегда можно продолжить до полного замкнутого равновесия, взяв в качестве $x^j, j \notin J(p)$ любые векторы из (18), удовлетворяющие в сумме условию г) (благотворительная раздача остатков r).

Замечание 2б. Ввиду (24) остатки можно раздавать (в отличие от замечания 2а) не "нищим", а самим же активным участникам; поэтому, если цены p равновесны, то всегда можно добиться выполнения материального баланса на рынке активных участников

$$\sum_{j \in J(p)} x^j = v. \quad (25)$$

Замечание 3. Поскольку обе части (10) и (18) положительно однородны по p , равновесные цены определены с точностью до произвольного положительного множителя.

Обозначим

$$\sigma := \{p \in R_+^n \mid pe = 1\}.$$

Следующее положение является базовым для всего замысла работы.

Утверждение 1.** *Равновесные в замкнутом смысле цены p^0 (возможно, не единст-*

* В [8] рассмотрен механизм распределения остатков среди "нищих" участников как рынок второго (нижнего) порядка.

** Доказательство см. в Приложении.

венные) существуют при любом наборе начальных ресурсов V . Если обозначить через EQP (Equilibrium prices) множество равновесных цен, нормированных условием $p^0 \in \sigma$, то (при заданном законе распределения B) ценовое отображение $V \rightarrow p^0 = EQP(V)$ замкнуто.

2.3. Монопродуктовый идеальный рынок (МИР). Модель обмена при $m=n$ и функциях полезности ψ_j , являющихся ПФ участников, естественным образом вписывается в контекст понятия совокупной монопродуктовой технологии (2) как механизм перераспределения ресурсов. Возникающая при этом динамическая система обозначена МИР.

Опишем функционирование МИР во времени. Сначала отметим, что в силу монопродуктивности векторы предложения v_j направлены вдоль единичных ортов e_j и поэтому можно считать предложение v_j не вектором, а скаляром; совокупность V отождествляется с суммарным вектором $v \in R_+^n$. При таком соглашении схема $t \rightarrow (t+1)$ перехода имеет следующий вид:

вектор предложения в момент $t - v_t = \{y_j\}_t =: v \rightarrow$

закон распределения бюджета $B(v) \rightarrow$

равновесные цены $p = EQP(v) \rightarrow$

сбалансированное решение (перераспределение) $\{x^j\} \rightarrow$

вектор выпусков монопродукции $\{y_j = \psi_j(x^j)\} =: v_{t+1}$.

Идеализация, заложенная в этой схеме (буква И в аббревиатуре МИР), состоит в предположении, что равновесные цены устанавливаются на рынке достаточно быстро, в МИР – мгновенно, и при этом участники выбирают сбалансированные решения, что само по себе весьма проблематично.

Анализ описанной динамической системы дан в разд. 4 после необходимых предварительных сведений.

3. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Напомним необходимые факты, имеющиеся в научной литературе.

3.1. Операция сопряжения и связанные с ней понятия. С задачей (21) связана операция сопряжения, ставящая в соответствие функции $\Phi \in \hat{W}$ функцию Φ^* , аргументом которой являются цены p ; она определяется формулой

$$\Phi^*(p) := \min_{x \in R_+^n} \frac{px}{\Phi(x)} = \max\{s \mid s \Phi(x) \leq px \quad \forall x \in R_+^n\} =$$

$$= [\text{максимальное значение функционала задачи (21)}]^{-1}. \quad (27)$$

Лемма 4 ([9, с. 203; 10, с. 23]). Функция Φ^* – того же типа, что и Φ , т.е. $\Phi^* \in \hat{W}$, при этом $\Phi^{**} = \Phi$.

Обобщенным градиентом функции $\Phi \in \hat{W}$ в точке x^0 называется множество

$$\overline{\text{Grad}} \Phi(x^0) := \{p \in R_+^n \mid px^0 = \Phi(x^0), \quad px \geq \Phi(x) \forall x\} = \{p \in R_+^n \mid px^0 = \Phi(x^0),$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi^*(p) &= 1, & \Phi(x^0) &> 0 \\ \Phi^*(p) &\geq 1, & \Phi(x^0) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (28)$$

которое всегда не пусто, и если Φ дифференцируема в точке x^0 , то множество (28)

состоит из одной точки $\text{grad } \Phi(x^0)$. Логарифмическим градиентом называется множество

$$\begin{aligned} \overline{\text{Logr}} \Phi(x^0) &= \begin{cases} \frac{1}{\Phi(x^0)} \overline{\text{Grad}} \Phi(x^0), & \Phi(x^0) > 0 \\ \phi, & \Phi(x^0) = 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \{p \in R_+^n \mid px^0 = \Phi^*(p)\Phi(x^0) = 1\}, & \Phi(x^0) > 0, \\ \phi, & \Phi(x^0) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

Аналогичные понятия и обозначения (напомним, что $\hat{X}(p)$ – множество решений задачи (21)) применяются к двойственной функции $\Phi^* \in \hat{W}$.

Особо выделим условие, фигурирующее в (29). Скажем, что векторы $x^0, p^0 \in R_+^n$ взаимны (относительно функции Φ), если выполняется соотношение

$$p^0 x^0 = \Phi^*(p^0)\Phi(x^0) = 1. \quad (30)$$

Непосредственно из определений с учетом леммы 1 вытекает следующая лемма.

Лемма 5. При любых $x^0, p^0 \in R_+^n$ множества каждой из следующих двух серий совпадают (включая случаи, когда какие-то из них пусты)

$$\begin{aligned} \text{а) } \overline{\text{Logr}} \Phi(x^0) &= \hat{P}(x^0) = \text{Arg max}_{p \in R_+^n} (\ln \Phi^*(p) - px^0), \\ \text{б) } \overline{\text{Logr}} \Phi^*(p^0) &= \hat{X}(p^0) = \text{Arg max}_{x \in R_+^n} (\ln \Phi(x) - p^0 x). \end{aligned} \quad (31)$$

Если p^0 – элемент группы а), то x^0 – группы б) и наоборот, причем каждое из этих событий эквивалентно соотношению взаимности (30).

Проиллюстрируем введенные понятия применительно к ПФ ψ , на которых строятся два основных примера, рассмотренных в разд. 1.

Пример 1. ψ – функция комплектности Λ_a , ее сопряженной является линейный функционал $a \in \hat{W}$: $\Lambda_a^*(p) = pa$; функция спроса

$$\hat{X}(p) = \overline{\text{Logr}}(pa) = \frac{a}{pa}, \quad pa \neq 0. \quad (32)$$

$$\text{Пример 2. } \psi(x) = \gamma \prod_{j=1}^n x_j^{v_j}, \quad \sum v_j = 1, \quad (33)$$

$$\psi^*(p) = \gamma^* \prod_{j=1}^n p_j^{v_j}, \quad \gamma^* := \left[\gamma \prod_{j=1}^n v_j^{v_j} \right]^{-1}, \quad (34)$$

$$\hat{X}(p) = \left\{ x = (x_j) \mid x_j = \frac{v_j}{p_j} \right\}, \quad p_j \neq 0 \text{ при } v_j \neq 0.$$

3.2. Агрегированная функция полезности в модели обмена при фиксированных бюджетных долях участников. В модели обмена (п. 2.1) общий бюджет участников равен pv (см. 9,б). Введем в рассмотрение доли участников в общем бюджете $\delta := \{\delta_j(p), j = 1, \dots, m\}$; тогда, по определению

$$\text{а) } \beta_j(p) = \delta_j(p)pv, \quad \text{б) } \sum \delta_j(p) \stackrel{p}{=} 1. \quad (35)$$

Изучим в данном пункте важный частный случай – модель с фиксированными долями, т.е. с экзогенно заданными константами $\delta_j \geq 0$, подчиненными условию

$$\sum_{j=1}^m \delta_j = 1, \quad (36)$$

и соответствующую совокупность задач вида (10)

$$\begin{aligned} \psi_j(x) &\rightarrow \max, \quad \psi_j \in \hat{W}, \\ px &\leq \delta_j, \quad x \in R_+^n, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (37)$$

Определение 1 понятия замкнутого равновесия переносится на рынок с фиксированными долями без изменений. Следующие факты замыкают в смысле концепции п. 2.2 понятия и результаты [3].

Определение 2. Функция $S \in \hat{W}$ называется агрегированной функцией полезности для серии задач (37), (36), если при любом p их совокупный спрос $X(p)$ совпадает со спросом задачи

$$S(x) \rightarrow \max, \quad px \leq 1. \quad (38)$$

Замечание. Отличие от аналогичного определения [3] только в том, что термин "спрос" понимается в замкнутом смысле.

Лемма 6 ([3, с. 51, теорема 3]). *Агрегированная функция полезности существует, именно*

$$S(x) = S_\delta(x) := \max \left\{ U(x^1, \dots, x^n) \mid x^j \in R_+^n, \sum_{j=1}^m x^j \leq x \right\}, \quad (39)$$

где

$$U(x^1, \dots, x^n) := \prod_{j=1}^m \psi_j^{\delta_j}(x^j). \quad (40)$$

Набор векторов $\{x^j\}$, доставляющих максимум в (39), назовем *оптимальным разбиением вектора x* . Отметим, что (36) необходимо для включения $S \in \hat{W}$ (однородность первой степени).

Утверждение 2 ([3, с. 51, теорема 4]). Пусть $v \in R_+^n$ таково, что $S(v) > 0$. Тогда множество $\overline{\text{Logr}} S(v)$ не пусто, каждый его вектор p^0 удовлетворяет условию $p^0 v = 1$ и является равновесным в замкнутом смысле вектором цен для рынка (37), (36); множество отвечающих ценам p^0 сбалансированных решений совпадает с множеством оптимальных разбиений вектора v .

Замечание. Если вместо вектора $p^0 \in \overline{\text{Logr}} S(v)$ взять $p = p^0/p^0 e$, получим при $S(v) > 0$ отображение $v \rightarrow p \in \sigma$; его замкнутое продолжение на весь ортант $v \in R_+^n$ и есть в данном случае ценовое отображение EQP (см. утверждение 1).

Утверждение 3 (доказательство опускаем). *Имеет место соотношение*

$$S^*(p) = \prod_{j=1}^m \left[\frac{\psi_j^*(p)}{\delta_j} \right]^{\delta_j} \quad p \in R_+^n, \quad (41)$$

где члены с $\delta_j = 0$ считаются равными единице.

3.3. Динамические характеристики регулярной гейловской технологии: неймановское равновесие, магистраль и базисный триплет. Данный пункт посвящен некоторым понятиям, связанным с описанием эффективных траекторий гейловской технологии; изложение и терминология следуют [11].

Главной характеристикой технологии является *неймановское равновесие* – тройка (α, h, π) , удовлетворяющая условиям

$$а) \alpha h \in \omega(h), \quad б) \pi y \leq \alpha \pi x \quad \forall (x, y) \in Z, \quad в) \pi h > 0, \quad (42)$$

где $h \in R_+^n$ – вектор стационарного сбалансированного роста; $\alpha > 0$ – темп этого роста, максимальный в ω ; $\pi \in R_+^n$ – вектор равновесных цен. Будем считать векторы h и π нормированными условиями

$$а) \pi \in \sigma, \quad б) \pi h = 1. \quad (43)$$

Последовательность $\{x_t, t = 0, 1, \dots, T\}, T \leq \infty$ называется *траекторией*, если $x_t \in \omega(x_{t-1}) \quad \forall t \geq 1$. Траектория называется *эффективной*, если при всех $t \geq 0$ x_t принадлежит границе Парето множества t -шаговой достижимости $\omega^t(x_0)$. Бесконечная эффективная траектория называется *оптимальной*.

Технология ω называется *регулярной*, если

$$а) h > 0, \quad б) \pi > 0, \quad (44)$$

причем неймановский луч $l := R_+ h = \{sh \mid s \geq 0\}$ единствен (т.е. условие (42,а) не выполняется ни при каком $h \notin l$) и является *магистралью*; последнее означает, что любая бесконечная траектория сходится (в угловом смысле) к лучу l . Мы будем рассматривать только регулярные технологии, не оговаривая это.

Оператором Беллмана технологии ω называется оператор $\Gamma: W \rightarrow W$, действующий на произвольную функцию $\Phi \in W$ по формуле

$$\Gamma\Phi(x) := \max_{y \in \omega(x)} \Phi(y), \quad x \in R_+^n. \quad (45)$$

Теорема 1 ([7, 10]). В регулярной технологии существует функция $G \in \hat{W}$, единственная при условии нормировки

$$G \in I, \quad I := \{\Phi \in W \mid \Phi(h) = 1\}, \quad (46)$$

такая, что: а) бесконечная траектория оптимальна тогда и только тогда, когда она генерируется стратегией управления

$$\zeta(x) := \text{Arg} \max_{y \in \omega(x)} G(y); \quad (47)$$

б) приведенная оптимальная траектория $\{\alpha^{-t}x_t\}$, выходящая из точки x , сходится к точке на луче l с координатой $G(x)$, (т.е. к точке $G(x)h$), причем эта координата является максимально достижимой для точки x ; в) оператор Γ имеет единственное собственное число, оно равно темпу роста α , при этом G – собственная функция (тоже единственная)

$$\Gamma G = \alpha G. \quad (48)$$

В силу этой теоремы функция G названа *потенциалом* технологии ω : значение $G(x)$ характеризует максимальные перспективные возможности системы, находящейся в исходном состоянии $x \in R_+^n$; одновременно, согласно утверждению а), потенциал яв-

ляется генератором оптимальных траекторий. Добавим, что из каждой точки $x \in R_+^n$ исходит по существу единственная оптимальная траектория. Неединственность связана только с возможной неоднозначностью правой части (47).

3.4. Сопряженная технология. Если Z – технологический конус (график отображения ω) данной гейловской технологии, то сопряженный (двойственный) конус определяется формулой

$$Z^* := \{p, q \in R_+^n \mid qy \leq px \quad \forall (x, y) \in Z\}. \quad (49)$$

Соответствующая сопряженная технология ω^* также является гейловской. Из определения ясно видно, что $Z^{**} = Z$; имеет место соотношение двойственности

$$(\alpha, h, \pi)^* = (\alpha^{-1}, \pi, h). \quad (50)$$

3.5. Некоторые дополнительные свойства совокупной технологии. Следующее утверждение дает полную характеристику класса совокупных технологий в множестве всех гейловских технологий.

Утверждение 4. Сопряженной к технологии (2) является технология

$$\bar{\omega}^*(p) = \{q \in R_+^n \mid q \leq \Psi^*(p)\}, \quad (51)$$

$$\Psi^*(p) := \{\psi_j^*(p), \quad j = [1, \dots, n]\} \in \hat{W}^n.$$

Обратно, каждая совокупная технология является сопряженной к некоторой технологии вида (51), заданной с помощью суперлинейной вектор-функции Ψ^* .

Простая форма (51) технологии $\bar{\omega}^*$ позволяет получить дополнительную информацию о свойствах $\bar{\omega}$. В (51) неймановский темп α^* и вектор сбалансированного роста h^* – решение задачи на собственное значение

$$\Psi^*(h^*) = \alpha^* h^*,$$

или, в терминах самой технологии $\bar{\omega}$ (см. (50)),

$$\alpha \Psi^*(\pi) = \pi. \quad (52)$$

Это уравнение определяет темп $\bar{\alpha}$ и равновесные цены $\bar{\pi}$ совокупной технологии (1), (2), рассматриваемой в качестве кооперативной.

4. ДИНАМИКА МИР

Перейдем к основной теме – динамическим свойствам совокупной технологии, функционирующей в режиме монопродуктового идеального рынка (см. п. 2,3). МИР задается вектор-функцией $\Psi = \{\psi_j\} \in \hat{W}^n$ и законом распределения долей бюджета $\delta = \{\delta_j(v, p)\}$, $\text{МИР} = \{\Psi, \delta\}$. Динамическая система (26) реализует некоторую стратегию $\zeta_{\text{мир}}$, так что $v_{t+1} = \zeta_{\text{мир}}(v_t)$; персонифицируя рыночный механизм, можно представить себе мистического "демона", который "правит МИРом".

Интересующая нас проблема – в какой мере язык и аппарат "обычной" гейловской теории может быть перенесен на рыночную динамику. Главные вопросы, на которые хотелось бы получить ответы:

1. Существует ли в МИР луч стационарного роста и каков темп движения по нему?
2. Выводит ли на этот луч стратегия демона, т.е. является ли он рыночной магистралью?
3. Существует ли потенциал демона, т.е. функционал, генерирующий траектории МИР аналогично (47)?

4. Существует ли МИР, достигающий эффективности КОТ?

Определенный (положительный) ответ имеет только вопрос 4; на остальные удастся ответить лишь частично.

В данной статье динамика МИР рассматривается для двух вариантов: А) рынок с фиксированными долями (ср. п. 3.2): $\beta_j(v, p) = \delta_j p v$, где константы $\delta_j \geq 0$ связаны соотношением (36); Б) рынок самоокупаемых производств: $\beta_j(v, p) = p_j v_j$ – бюджет каждого участника равен стоимости начального запаса его продукции (модель чистого обмена).

4.1. Уравнение равновесных цен. Получим его, исходя из определения 1 разд. 2. Если x^j – решение задачи (10), то при $\beta_j(p) > 0$, т.е. $j \in J(p)$

$$x^j = \beta_j(p) \overline{\log} \psi_j^*(p) \quad (53)$$

(использована лемма 5); поэтому условие материального баланса в форме (25) имеет вид

$$\sum_{j \in J(p)} \beta_j(p) \overline{\log} \psi_j^*(p) = v \quad (54)$$

и представляет собой уравнение, определяющее равновесные цены.

4.2. Потенциал демона в случае А-МИР. При законе распределения бюджета А можно указать в явном виде функционал $D \in \hat{W}$, определяющий стратегию демона.

Утверждение 5. В А-МИР существует функционал $D \in \hat{W}$ такой, что

$$\zeta_{\text{МИР}}(v) = \text{Arg max}_{y \in \overline{W}(v)} D(y), \quad (55)$$

именно

$$D(x) := \prod_{i=1}^n x_i^{\delta_i}, \quad x = (x_i) \in R_+^n. \quad (56)$$

Доказательство. Согласно утверждению 2, задача поиска равновесия (в случае $S(v) > 0$) эквивалентна построению оптимального S -разбиения вектора v . В терминах совокупной технологии (2) определение (39), (40) функции S можно записать в виде

$$S(x) = \max_{y \in \overline{W}(v)} D(y). \quad (57)$$

Оптимальному S -разбиению вектора v соответствует максимизирующее значение вектора y в правой части (57). Этот вектор и является, согласно схеме (26), новым значением v , что и утверждается в (55).

На случай $S(v) = 0$ формула (55) продолжается в соответствии с концепцией замыкания (лемма 2, утверждение 1).

4.3. Стационарный рост в Б-МИР. Этот и следующие пункты посвящены первому из главных вопросов. Для А и Б МИР ответы положительны, хотя и существенно различны: в Б-МИР это луч совпадает с неймановским лучом совокупной технологии, в А-МИР не совпадает.

Утверждение 6. В регулярной модели Б-МИР существует луч сбалансированного стационарного роста. Этот луч единствен – им является магистраль $l = R_+ \bar{h}$ совокупной технологии $\overline{W}$; при этом темп стационарного роста и цены равновесия Б-МИР на луче l соответственно – неймановский темп $\bar{\alpha}$ и равновесные цены $\bar{\pi}^*$.

* Близкий результат получен А.И. Сотсковым.

Доказательство. Пусть $p \in R_+^n$ и β – некоторые строго положительные векторы цен и бюджетов, выбираемые независимо друг от друга. В этих условиях участник j закупает вектор ресурсов x^j , определяемый формулой (53), который мы запишем в виде

$$x^j = \beta_j \xi^j(p), \quad \xi^j(p) := \overline{\log \psi_j^*(p)},$$

и производит продукт j в количестве $y_j = \psi_j(x^j) = \beta_j / \psi_j^*(p)$. Таким образом, пара p, β порождает вектор требуемых ресурсов

$$v := \sum x^j = \sum \beta_j \xi^j(p) \quad (58)$$

и вектор конечного продукта

$$y = \left\{ \frac{\beta_j}{\psi_j^*(p)} \right\}.$$

Наша задача – подобрать пару p, β так, чтобы: а) $\exists \lambda > 0 : y = \lambda v$, б) $\beta_j = p_j v_j \quad \forall j$ (требование а) – условие сбалансированного роста); т.е. должно быть

$$\text{а) } v_j = \beta_j / p_j; \quad \text{б) } \beta_j / \psi_j^*(p) = y_j = \lambda v_j = \lambda (\beta_j / p_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (59)$$

Из (59) получаем (считая, что $\beta_j > 0$) необходимое условие: $\psi^*(p) = \lambda^{-1} p$; тем самым λ и вектор p вполне определены (в регулярном случае): $\lambda = \bar{\alpha}$, $p = \bar{\pi}$ – строго положительный собственный вектор оператора ψ^* . После этого вектор β находится из (58) и (59,а), в покомпонентной форме это дает систему уравнений (относительно β_j):

$$\frac{\beta_i}{p_i} = \sum_{j=1}^n \beta_j \xi_i^j(p) \Big|_{p=\bar{\pi}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (60)$$

Умножив (60) на p_i , приведем систему к виду

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \beta_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad c_{ij} := p_i \xi_i^j(p) \Big|_{p=\bar{\pi}}. \quad (61)$$

Заметим, что $C = (c_{ij})$ – неотрицательная матрица, левым собственным вектором которой является e

$$(eC)_j = \sum_{i=1}^n p_i \xi_i^j(p) = p \xi^j(p) = 1 \quad \forall j,$$

поэтому ее спектральный радиус равен единице. Система (61) означает, что β – правый собственный вектор матрицы C (в регулярном случае – строго положительный).

Наконец, при найденных p, β вектор v определяется из (59а). Таким образом, существование луча сбалансированного роста доказано, причем темп роста $\lambda = \bar{\alpha}$. Поскольку темп $\bar{\alpha}$ достигим в $\bar{\omega}$ только на магистрали l , то луч роста обязан совпадать с l , т.е. $v = \bar{h}$.

4.4. Стационарный рост в А-МИР. Как уже было установлено (см. утверждение 2), равновесные распределения $\{x^j\}$ в А-МИР можно получить как оптимальное разбиение вектора v начальных запасов участников (при $S(v) > 0$), т.е. как решение задачи

$$\sum_{j=1}^n \delta_j \log \psi_j(x^j) \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^n x^j \leq v. \quad (62)$$

Предположим, что ПФ активных участников логарифмически строго вогнуты, т.е. $\log \psi_j(x)$ строго вогнуты. Тогда, очевидно, максимум в (62) достигается при единственных значениях x^j . Стандартными рассуждениями нетрудно показать, что $x^j(v)$ как функция от v будут непрерывны и положительно однородны. Продолжая $x^j(v)$ по непрерывности на границу ортанта R_+^n , получим в соответствии с предложенной концепцией замыкания (применяя утверждение 1 и лемму 2), что замкнутые сбалансированные распределения $x^j(v)$ – суперлинейные функции, определенные на R_+^n . Порожденные ими функции выпусков $y_j = \varphi_j(v) := \psi_j(x^j(v))$ также будут суперлинейны на R_+^n . Следовательно, оператор $v \rightarrow \Phi(v) := \{\varphi_j(v)\}$ непрерывен и положительно однороден. Согласно результату о существовании собственного значения нелинейного оператора (см., например, [12, с. 248–249]), получаем следующее утверждение.

Утверждение 7. Пусть активные участники имеют логарифмически строго вогнутые производственные функции. Тогда в А-МИР существует луч стационарного роста $\hat{l} = R_+ v^*$.

К сожалению, не всегда можно гарантировать положительность темпа роста вдоль луча $\hat{l}$. Для этого приходится налагать дополнительные условия типа "регулярности", например $v^* > 0$ или $\Sigma \varphi_j(v) > 0 \quad \forall v \neq 0$.

Ниже будет показано, что для частного случая МИР (модели Кобба – Дугласа) темп стационарного роста можно выписать в явном виде.

4.5. Модель Кобба – Дугласа. Совокупная технология Кобба – Дугласа (пример 2, разд. 1) задается функциями (5). В этом примере удастся получить ответы на все вопросы в исчерпывающей форме. Опуская утомительные выкладки, сформулируем только результаты.

В силу (7) спектральный радиус матрицы степеней v равен единице. Обозначим через $\theta \in R_+^n$ нормированный левый собственный вектор, т.е. решение уравнения $\theta v = \theta$, $\theta e = 1$. Некоторые координаты вектора θ могут быть нулевыми.

1) В рынках А и Б оптимальные цены p_j как функции начальных ресурсов v_j обратно пропорциональны им, т.е.

$$p_j = c_j / v_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad v > 0, \quad (63)$$

где

$$c_j = \begin{cases} (\delta v)_j & \text{в случае А,} \\ \theta_j & \text{в случае Б.} \end{cases}$$

2) В силу (63) Б-МИР – частный случай А-МИР (так как $p_j v_j = c_j = \text{const}$, не зависящий от p, v), отвечающий долям бюджета, задаваемым компонентами вектора θ , $\delta = \theta$.

3) Потенциалом совокупной технологии является потенциалами вектора θ , $\delta = \theta$. Это означает, согласно утверждению 5, что стратегия А-демона при $\delta = \theta$, т.е. стратегия Б-демона, совпадает с оптимальной кооперативной стратегией. Таким образом, в модели Кобба – Дугласа Б-рынок является наиболее эффективным среди всех рынков и достигает эффективности кооперативной технологии, более того, тождествен ей (в режиме ее оптимального функционирования).

Эта модель дает ответ на главный вопрос 4.

Для модели Кобба – Дугласа можно явно выписать уравнение динамической системы (26) и найти луч стационарного роста и соответствующий ему темп для случаев А и Б.

Уравнение динамики

$$v_{t+1} = \Phi(v_t), \quad (64)$$

где компоненты оператора $\Phi = \{\varphi_i\} \in \hat{W}^n$ определяются как

$$\Phi_i(v) = d_i \prod_{j=1}^n (v_{ij} / c_j)^{v_{ij}} \psi_i(v),$$

$\psi_i(v)$ берется из (5), а $d_i = \begin{cases} \delta_i, & \text{в случае А,} \\ \theta_i, & \text{в случае Б.} \end{cases}$

Вектор стационарного роста $v^* = \{v_i^*, i = 1, \dots, n\}$ и соответствующий темп λ^* будут, очевидно, собственным вектором и собственным числом оператора Φ . Если матрица v неразложима, то они – единственны и положительны, причем

$$\lambda^* = \prod_{i=1}^n (\gamma_i d_i / c_i)^{\theta_i} \prod_{i,j} (v_{ij})^{v_{ij} \theta_i},$$

а вектор $z^* := \{\log v_i^*, i = 1, \dots, n\}$ – решение линейной системы $vz = z + f$, где

$$f := \{f_i, i = 1, \dots, n\}, \quad f_i := \log \lambda^* - \log d_i \gamma_i - \sum_j v_{ij} \log(v_{ij} / c_j).$$

Если предположить, что матрица v является примитивной (т.е. $v^k > 0$ при некотором $k \geq 1$), то траектории динамической системы (64), начинающиеся из произвольного начального состояния $v_0 > 0$, будут асимптотически сходиться к лучу $R_+ v^*$ в том смысле, что $(\lambda^*)^{-\mu} v_t \rightarrow \mu v^*$, где $\mu > 0$.

Таким образом, модель Кобба – Дугласа дает положительный ответ и на вопрос 2 (теорема о магистрали).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приводимые ниже доказательства не следуют порядку изложения в основной части работы, а выстроены в цепочку логически связанных результатов.

1. Доказательство леммы 6. Участники с ненулевыми бюджетами влияют на S и, согласно лемме 3, также и на совокупный спрос. Поэтому можно применительно к рынку активных участников воспользоваться теоремой* [3, с. 51], из которой следует, что S – агрегированная функция полезности. Включение $S \in \hat{W}$ вытекает из представления S в форме (57).

2. Доказательство утверждения 2. Так как $S(v) > 0$, то множество $\text{Logr } S(v)$ не пусто. Покажем, что любой его элемент p^0 является равновесным вектором. Согласно лемме 5, имеем $p^0 \in \text{Logr } S(v) \rightarrow v \in \hat{X}(p^0)$, т.е. v – вектор спроса для функции S при ценах p^0 . Но поскольку S – функция агрегированного спроса, существуют $x^j \in X^j(p^0)$, такие, что $\sum x^j = v$. Это означает, что $(p^0, \{x^j\})$ – равновесие и $\{x^j\}$ – сбалансированное решение. Остальное доказано в теореме из [3].

3. Доказательство утверждения 1. Фиксируем совокупность начальных ресурсов V , причем предполагаем пока, что $v > 0$. Пусть $\sigma(v) := \{p \in R_+^n \mid pv = 1\}$. Для каждого $p \in \sigma(v)$ положим $\delta := \{\beta_j(p)\}$ – соответствующие бюджеты, определенные в (9), и $S = S_\delta$ – агрегированная функция полезности (см. п. 3.2). Рассмотрим точечно-множественное отображение Q симплекса $\sigma(v)$ в себя: $Q(p) := \text{Logr } S(v)$, где Logr берется по аргументу v , а зависимость S от p – параметри-

* В цитируемой теореме условие $\delta_j > 0$ не оговорено, но подразумевается, так как доказательство опирается на лемму 1, в которой оно существенно.

ческая через δ . Легко убедиться (стандартным образом), что при любом $p \in \sigma(v)$ множество $Q(p)$ не пусто и выпукло, а отображение Q замкнуто. По теореме Какутани Q имеет неподвижную точку $q \in \sigma(v)$. В силу утверждения 2, q – равновесные цены.

Итак, для $v > 0$ соответствие $V \rightarrow q(V)$ построено. Чтобы продолжить его на весь неотрицательный ортант можно, ввиду замечания 3 к определению 1, вместо вектора $q \in \sigma(v)$ взять пропорциональный ему вектор $p^0 \in \sigma$, где σ – введенный ранее стандартный симплекс, и рассмотреть отображение $V \rightarrow p^0 \in \sigma$. Опять-таки стандартным образом можно убедиться, что это отображение замкнуто в $\text{int } R_+^n$ (и множество $p^0(v)$, $v \in \text{int } R_+^n$ не пусты, как уже доказано). Поэтому это отображение может быть продолжено как замкнутое на все R_+^n .

Убедимся, что равновесность цен сохранится и для граничных точек v . Могут быть два случая:

1) $p^0 v > 0$. Тогда все условия, требуемые равновесием, выполняясь в окрестности точки v , будут выполняться и в самой этой точке (для всех близких к v точек состав активных участников рынка – один и тот же, $= J(p^0)$). Допустим прямой предельный переход.

2) $p^0 v = 0$. Это – тривиальное равновесие (см. замечание 1 к определению 1).

4. Доказательство утверждения 4. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{Z}^* &= \{(p, q) \mid qy \leq px \quad \forall (x, y) \in \bar{Z}\} = \left\{ (p, q) \mid \sum_j (q_j \psi_j(x^j) - px^j) \leq 0 \quad \forall x^j \in R_+^n \right\} = \\ &= \{(p, q) \mid \forall j: q_j \psi_j(x) - px \leq 0 \quad \forall x \in R_+^n\} = \left\{ (p, q) \mid \forall j: q_j \leq \frac{px}{\psi_j(x)} \quad \forall x \in R_+^n \right\} = \\ &= \{(p, q) \mid q \leq \Psi^*(p)\}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

* * *

Полученные в данной работе ответы на поставленные главные вопросы нельзя считать полными. Сейчас авторам уже ясно, что гораздо более полные ответы могут быть получены с использованием понятия "функция общественного благосостояния" (social welfare function) Бергсона и результатов [13, 14].

Авторы признательны А.А. Шананину за содержательные беседы, в которых выявились эти возможности, и надеются на дальнейшее продвижение в данном направлении. Мы выражаем благодарность также В.И. Аркину; именно он привлек наше внимание к задаче анализа динамических свойств рыночной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. v. Neumann J. Über ein ökonomisches Gleichungssystem und ein Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktzatzes // Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums. Vienna, 1937. № 8.
2. Гейл Д. Замкнутая линейная модель производства // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Полтерович В.М. Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. М.: Наука, 1990.
4. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.

5. Романовский И.В. Асимптотическое поведение дискретного детерминированного процесса с непрерывным множеством состояний // Оптимальное планирование. 1967. № 8.
6. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.
7. Рубинов А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. Л.: Наука, 1980.
8. Danilov V.I., Sotskov A.I. A Generalized Economic Equilibrium // J. Math. Econ. 1990. V. 19.
9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
10. Беленький В.З. Стационарные модели экономической динамики. М.: ЦЭМИ РАН, 1981.
11. Беленький В.З. Экономическая динамика: обобщающая "бюджетная" факторизация гейловской технологии // Экономика и мат. методы. 1990. Т. 26. Вып. 1.
12. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост. М.: Наука, 1972.
13. J. Chipman, J. Moore. On Social Welfare Functions and the Aggregation of Preferences // J. of Econ. Theory. 1979. V. 21. № 1.
14. Шананин А.А. Исследование условий агрегируемости экономических показателей. Дисс. докт. физ.-мат. наук. М.: ВЦ РАН, 1992.

Поступила в редакцию
14 XII 1993