ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1994
Том 30, вып. 4

МЕТОД ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГОНКИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ*

© 1994 Булавский В.А., Калашников В.В.

(*Москва, Сумы*)

Изучается общая модель рынка с однородным товаром, в рамки которой укладываются как частные случаи и модель Курно и модель Штакельберга – Нэша – Курно. При более слабых, чем обычно, предположениях об обратной функции спроса установлены условия существования и единственности равновесия в данной модели. В штакельберговском случае получены оценки изменения объема выпуска лидера. Наконец, приводится алгоритм численного нахождения точки равновесия.

Объектом изучения в данной статье является олигополистический рынок, в котором ограниченное число фирм производят однородный продукт без кооперации друг с другом. В обширной литературе, посвященной вопросам равновесия в моделях такого рода, главное место занимает модель Курно. Можно выделить несколько типов результатов. В первой группе работ допускают убывающую обратную функцию спроса достаточно общего вида, но при этом рассматривают модель, в которой все фирмы идентичны (см. [1–3]). Во второй группе показывают существование равновесия в рынках, где не обязательна идентичность всех фирм, но функция прибыли каждой из них вогнута. Иногда вогнутость функций прибыли выступает как явное требование (см. [4]), в других случаях используют предположения о свойствах обратной функции спроса и функций затрат, которые влекут эту вогнутость (например, в [5] обратная функция спроса предполагается вогнутой в области ее положительности, а все функции затрат выпуклыми).

В [6–9] не требуется вогнутость функции прибыли, но на промежутке, на котором обратная функция спроса $p = p(G)$ положительна, должно выполняться неравенство $p'(G) + p''(G)G \leqslant 0$. В этих же работах изучаются различные методы численного поиска равновесия, которые сводят исходную задачу о дополнительности к последовательности вспомогательных задач математического программирования.

В последние годы появилось много публикаций, в которых в дополнение к фирмам модели Курно вводится фирма, действующая по особым правилам. Особенность заключается в том, что она устанавливает свой уровень производства, максимизируя собственную прибыль при явном учете реакции остальных фирм на изменения ее выпуска. Остальные же фирмы, как и раньше, максимизируют свою прибыль, используя предположение Курно о неизменности производства других фирм. Первую фирму иногда называют лидером или фирмой Штакельберга, так как он первым рассмотрел такую стратегию поведения. В частности, в [9] предложен метод численного поиска решения подобных задач, который основан на использовании кусочно-линейной аппроксимации зависимости совокупного выпуска фирм, действующих по принципу Курно, от выпуска лидера. Для получения такой аппроксимации решаются задачи

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-012-842).

математического программирования с одним ограничением, зависящим от параметра, за счет выбора которого множитель Лагранжа обращается в нуль. В [10], как и в [9], рассматривается модель с лидером, которая сводится к двухуровневой задаче оптимизации на многогранном множестве. Последняя решается с помощью метода штрафных функций с использованием алгоритма симплициального разбиения.

В настоящей статье рассматривается более общая модель рынка с однородным товаром, в рамки которой укладываются как частные случаи и модель Курно и модель Штакельберга – Нэша – Курно.

Пусть имеются n фирм – производителей однородного продукта и один его внешний поставщик. Будем обозначать через q_i объемы выпуска фирмы i; Q – объем внешних поставок; G – суммарный объем продукта, т.е.

$$G = Q + \Sigma q_i. \tag{1}$$

Пусть кроме информации о своей функции затрат $f_i(q_i)$ и обратной функции спроса $p(G)$ каждая фирма располагает некоторой гипотезой о скорости изменения общего объема G в зависимости от изменения ее собственного объема производства q_i. В стандартном подходе Курно изменения в общем объеме G, вносимые другими участниками, игнорируются, т.е. каждый участник придерживается гипотезы $\partial G/\partial q_i = 1$. Мы же предположим, что эта гипотеза, вообще говоря, меняется с изменением общей ситуации и выражается функциями $w_i(G)$. Для случая Курно $w_i(G) \equiv 1$.

Заметим, что в некотором отношении более естественной может показаться зависимость w_i не от общего объема G, а от текущей цены p единицы товара. Однако p и G связаны взаимно однозначно, и технически удобнее в качестве аргумента рассматривать G.

В такой общей постановке задача сводится к нахождению при заданном $Q \geqslant 0$ таких G и q_i, $i = 1, \ldots, n$, что выполнено равенство (1), и для каждого i при данном G величина q_i является решением следующей одномерной задачи с условием дополнительности

$$\begin{aligned} &\varphi_i(q_i) = f_i'(q_i) - q_i w_i(G) p'(G) - p(G) \geqslant 0, \\ &\varphi_i(q_i) = 0, \quad \text{если} \quad q_i > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Задача о дополнительности (2) означает, что при гипотезе $w_i(G)$ фирме нет смысла изменять свой объем выпуска q_i.

Случай Курно получается при $Q = 0$ и $w_i(G) \equiv 1$. Для модели же Штакельберга – Нэша – Курно дополнительно внешний поставщик из пассивного участника переводится в фирму, выбирающую объем производства Q, исходя из условия максимизации своей прибыли при полной информации о поведении остальных фирм.

1. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ

Начнем с вопроса о существовании решения в задаче (1)–(2). Будут использованы следующие предположения о функциях f_i, w_i и p.

А1. Каждая из функций $f_i(q_i)$ определена для $q_i \geqslant 0$, дважды непрерывно дифференцируема, неубывающая и выпуклая.

А2. Обратная функция спроса $p(G)$ дважды непрерывно дифференцируема, определена для положительных G, положительна и $p'(G) < 0$ при всех G.

А3. При каждом i существует $G_i > 0$, для которого

$$f_i'(G_i) = p(G_i). \tag{3}$$

А4. Каждая из функций $w_i(G)$ определена $G \geqslant 0$, непрерывна и неотрицательна.

A5. При достаточно малых G $\forall$ i

$$F_i(G) = f_i'(G) - \frac{1}{n} w_i(G) p'(G) G - p(G) < 0.$$

Заметим, что в случае ограниченности $p'(+0)$ условие A5 выполнено автоматически в силу A1 – A4. Также заметим, что требование (3) достаточно естественно. В самом деле, если оно нарушено для какой-либо фирмы i, то имеет место одно из двух:

а) либо $f_i'(0) \geqslant \lim\limits_{G \to +0} p(G)$, тогда эта фирма не функционирует, и ее можно исключить из рассмотрения;

б) либо $f_i'(G) < p(G) \forall G > 0$; если при этом $\lim\limits_{G \to +\infty} [p(G) - f_i'(G)] > 0$, то можно показать, что фирме i выгодно производить сколь угодно большое количество товара, и задача (2) становится неразрешимой. Когда $\lim\limits_{G \to +\infty} [p(G) - f_i'(G)] = 0$ и $\limsup\limits_{G \to +\infty} [-p'(G) / p''(G)] < +\infty$, задача может иметь решение, но этот крайний вариант рассматриваться не будет.

Теорема 1. *Пусть* $Q > 0$ *и выполнены предположения* A1–A4. *Тогда существует решение задачи* (1), (2). *Если дополнительно выполнено условие* A5, *то решение существует и при* $Q = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что для любых i, $\varepsilon > 0$ и $G > 0$ существует единственное решение $q_i = q_i(G, \varepsilon)$ одномерной задачи о дополнительности: найти $q_i \geqslant 0$, такое, что

$$\begin{aligned} &\psi_i(q_i, \varepsilon) = f_i'(q_i) - q_i \upsilon_i(G, \varepsilon) p'(G) - p(G) \geqslant 0, \\ &\psi_i(q_i, \varepsilon) = 0, \quad q_i > 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\upsilon_i(G, \varepsilon) = \max\{\varepsilon; w_i(G)\}$ – срезка функции w_i. В самом деле, если $\psi_i(0, \varepsilon) \geqslant 0$, то можно взять $q_i(G, \varepsilon) = 0$; в противном случае в качестве $q_i(G, \varepsilon)$ надлежит взять единственный положительный корень уравнения $\psi_i(q_i, \varepsilon) = 0$. В силу теоремы о неявной функции этот корень непрерывно зависит от G. Отметим, что если $G \geqslant G_i$, то $q_i(G, \varepsilon) < G_i$. При выполнении балансового равенства

$$G - Q = \Sigma q_i(G, \varepsilon) \tag{5}$$

точка $q(G, \varepsilon) = [q_1(G, \varepsilon), \dots, q_n(G, \varepsilon)]$ является решением задачи (1), (4). Зафиксируем $Q > 0$ и $\varepsilon > 0$. Положим $\tilde{G} = Q + \Sigma G_i$. Согласно сделанному выше замечанию, имеем: $\Sigma q_i(\tilde{G}, \varepsilon) < \Sigma G_i = \tilde{G} - Q$. Но при $G = Q$ выполнено соотношение $\Sigma q_i(G, \varepsilon) \geqslant 0 = G - Q$. И так как $\Sigma q_i(G, \varepsilon)$ непрерывна по G, то в силу теоремы Коши найдется $G = G(Q, \varepsilon)$

$$Q \leqslant G(Q, \varepsilon) < \tilde{G}, \tag{6}$$

при котором справедливо равенство (5). Далее, для каждого i при $\varepsilon \to 0$ функции $\upsilon_i(G, \varepsilon)$ сходятся к функции $w_i(G)$ равномерно по G на компакте $[Q; \tilde{G}]$. Поэтому любая предельная (при $\varepsilon \to 0$) точка $q(G(Q))$ величин $q(G(Q, \varepsilon), \varepsilon)$ является решением задачи (1), (2) при фиксированном $Q > 0$. При этом

$$G(Q) = Q + \Sigma q_i(G(Q)), \tag{7}$$

где $G(Q)$ – соответствующая предельная точка $G(Q, \varepsilon)$. Таким образом, утверждение теоремы доказано для $Q > 0$.

Устремим теперь Q к нулю. В силу (6) $Q \leqslant G(Q) \leqslant Q + \Sigma G_i$. Если показать, что при

$Q \to 0$ значения $G(Q)$ отделены от нуля, то, переходя к пределу в равенстве (7), получим балансовое равенство (1), а значит, покажем существование решения задачи (1), (2) и для $Q = 0$.

Пусть $G(Q)$ настолько мало, что для $G = G(Q)$ выполнены неравенства в A5 при всех i. Ввиду (7) найдется i, для которого

$$q_i = q_i(G(Q)) < \frac{1}{n} G(Q).$$

Для этого получаем i $F_i(G) \geqslant \varphi_i(q_i) \geqslant 0$, что противоречит предположению A5. Теорема доказана.

Для изучения вопроса о единственности решения задачи (1)–(2) сохраним предположения A1–A5 и добавим следующие.

A6. Для каждого i функция w_i принимает только положительные значения, не превосходящие единицы, дифференцируема и не убывает.

A7. Функция $\eta(G) = p(G)G$ вогнутая.

Теорема 2. *Если выполнены предположения* A1–A7, *и* $f_i''(G) > 0$ *для каждого* i *и любого* $G \geqslant 0$, *то решение задачи* (1)–(2) *единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду A1, A2 и A6 левые части в (2) строго монотонны по q_i и, следовательно, $q_i(G)$ для каждого G определено однозначно. Пусть $q = q(G)$ – совокупность решений одномерных задач (2). Положим $I(G) = \{i\colon q_i(G) > 0\}$. В силу предположений A1–A4 из $q_i(H) = 0$ следует, что $q_i(G) = 0$ при $G \geqslant H$. Таким образом, $I(G) \subseteq I(H)$ при $G \geqslant H$. Так как $\varphi_i(q_i) = 0$ для $i \in I(G)$, можно воспользоваться теоремой о неявной функции и выразить производную

$$q_i(G) = \frac{p' + (w_i p')' q_i}{f_i''(q_i) - w_i p'}, \quad i \in I(G). \tag{8}$$

Для простоты в правой части опущен аргумент G. Согласно A1, A2 и A6, знаменатель дроби в правой части (8) положителен. Следовательно, знак производной q_i определяется знаком числителя в (8). Положим

$$I^+(G) = \{i \in I(G)\colon\ p' + (w_i p')' q_i > 0\},$$

$$I^-(G) = \{i \in I(G)\colon\ p' + (w_i p')' q_i \leqslant 0\}.$$

В силу выпуклости функций f_i справедливы оценки

$$0 \leqslant q_i'(G) < -\frac{1}{w_i(G)} - q_i(G)\frac{(w_i p')'}{w_i p'}, \quad i \in I^+(G), \tag{9}$$

$$-\frac{1}{w_i(G)} - q_i(G)\frac{(w_i p')'}{w_i p'} \leqslant q_i'(G) \leqslant 0, \quad i \in I^-(G). \tag{10}$$

Так как функция $\eta(G) = p(G)G$ вогнута, то ее вторая производная по G не положительна, т.е.

$$p''(G)G + 2p'(G) \leqslant 0. \tag{11}$$

Учитывая неубывание функции $w_i(G)$, получим

$$(w_i p')' / (w_i p') = w_i' / w_i + p'' / p' \geqslant -(2/G). \tag{12}$$

Заметим, что для $i \in I^+(G)$, очевидно, $(w_i p')' > 0$. Так как $w_i \leqslant 1$, то в силу (12) для $i \in I^+(G)$

$$q_i(G) > -(p' / (w_i p')') \geqslant -(w_i p' / (w_i p')') \geqslant G/2. \tag{13}$$

Используя (9) и (12), найдем, что для $i \in I^+(G)$ справедливы неравенства

$$q_i'(G) < -\frac{1}{w_i(G)} + \frac{2}{G} q_i(G) \leqslant -1 + \frac{2}{G} q_i(G).$$

Следовательно

$$\sum_{i \in I(G)} q_i'(G) \leqslant \sum_{i \in I^+(G)} q_i'(G) < -m^+(G) + \frac{2}{G} \sum_{i \in I^+(G)} q_i(G), \tag{14}$$

где $m^+(G)$ – число элементов множества $I^+(G)$. Из (13) получаем, что если $\sum_{i \in I(G)} q_i(G) \leqslant G$, то $m^+(G) \leqslant 1$. При этом если $m^+(G) = 0$, то $\sum_{i \in I(G)} q_i'(G) \leqslant 0$, если $m^+(G) = 1$, то из (14) имеем $\sum_{i \in I(G)} q_i'(G) < -1 + \frac{2}{G}(G - Q) = 1 - \frac{2Q}{G}$. В этих случаях, очевидно, можно сделать вывод о том, что если при каком-то $G > 0$ выполнено балансовое равенство (1), то правее этого G разность $G - \Sigma q_i$ строго возрастает и балансовое равенство уже выполняться не может. Последнее означает, что решение задачи (1)–(2) единственно. Теорема доказана.

Замечание. В частном случае, когда все $w_i \equiv 0$, для существования решения задачи (1)–(2) достаточно предположений A1–A3; для единственности также придется дополнительно потребовать монотонного возрастания f_i'.

2. РЫНОК С ЛИДЕРОМ

В частном случае, когда $w_i \equiv 1$ для $i = 1, \ldots, n$ и $Q = 0$, задача (1), (2) представляет собой модель Курно. Здесь рассмотрен случай, когда внешние поставки осуществляются фирмой-поставщиком, которой присвоен номер 0. Предполагаем, что эта фирма знает все параметры остальных производителей и поэтому может рассчитать их равновесные объемы производства для любого объема Q ее собственного выпуска. Другими словами, она может при максимизации своей прибыли воспользоваться решением $q(Q) = [q_1(Q), \ldots, q_n(Q)]$ задачи (1), (2). При выполнении предположений теоремы 2 это решение существует и единственно, и лидер решает задачу максимизации своей прибыли

$$\max\{\mu(Q) = p(G(Q))Q - f(Q) \mid Q \geqslant 0\}, \tag{15}$$

располагая ценой $p(G(Q))$ как функцией своего объема поставок Q. Здесь $f(Q)$ – функция затрат поставщика, для которой предполагается выполненным требование A1 и $f'' > 0$. Очевидно, (15) эквивалентна одномерной задаче о дополнительности: найти $Q \geqslant 0$, такое, что

$$\varphi_0(Q) = f'(Q) - p'(G(Q))G'(Q)Q - p(G(Q)) \geqslant 0,$$
$$\varphi_0(Q) = 0, \quad Q > 0. \tag{16}$$

При этом производную $G'(Q)$ (в тех точках, где она существует) можно найти, дифференцируя равенство (7) по параметру Q

$$G'(Q) = 1 + G'(Q)\Sigma q_i'(G(Q)). \tag{17}$$

Выражая G' из (17), получим

$$G'(Q) = \frac{1}{1 - \Sigma q_i'(G(Q))} = \frac{1}{1 - \sum_{i \in I(G(Q))} q_i'(G(Q))}. \tag{18}$$

Отметим, что формула (18) корректна, так как в наших условиях $\Sigma q_i'(G(Q)) < 1$. Заметим также, что при $w_i \equiv 1$ функции q_i являются кусочно-гладкими; точнее, для каждого i существует значение $H_i > 0$, такое что функция q_i непрерывно дифференцируема и положительна на интервале $(0; H_i)$ и $q_i(G) = 0$ при $G \geqslant H_i$. Отсюда следует, что функция $G(Q)$ тоже кусочно-гладкая. Точками ее излома будут те значения Q, в которых происходит изменение множества $I(G(Q))$. В этих точках существует не производная $G'(Q)$, а левая и правая производные

$$G'(Q \pm 0) = 1 \Bigg/ \left(1 - \sum_{i \in I(G(Q) \pm 0)} q_i'(G(Q) \pm 0)\right).$$

Целью дальнейших рассуждений является установление соотношений между Q^* – решением задачи (15), и $\hat{Q}$ – равновесным объемом поставок в случае, если фирма-поставщик включается в число участников модели Курно и пользуется, как и остальные, гипотезой $w(G) \equiv 1$. Кроме того, интерес представляет сравнение этих величин с $\overline{Q}$ – объемом поставок лидера в ситуации, когда он при максимизации своей прибыли игнорирует изменение цены товара, т.е. решает задачу о дополнительности: найти $\overline{Q} \geqslant 0$, такое, что

$$\begin{aligned} &\beta(\overline{Q}) = f'(\overline{Q}) - p(G(\overline{Q})) \geqslant 0, \\ &\beta(\overline{Q}) = 0, \quad \overline{Q} > 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы 2 для всех участников (включая лидера), то*

$$\max\{\hat{Q};\, Q^*\} \leqslant \overline{Q} \leqslant G_0, \tag{20}$$

где $G_0 > 0$ *такое, что* $f'(G_0) = p(G_0)$.

Доказательство. Чтобы установить неравенство $Q^* \leqslant \overline{Q}$, достаточно показать, что $\mu'(Q+0) < 0 \;\forall\; Q > \overline{Q}$. Условия А1, А2 и неравенство $G'(Q+0) > 0$ (которое вытекает из (18)) влекут оценку $\mu'(Q+0) = p'(G(Q))G'(Q+0)Q - \beta(Q) < -\beta(Q) \;\forall\; Q > 0$. Из определения $\overline{Q}$ имеем $\beta(\overline{Q}) \geqslant 0$. Таким образом, достаточно убедиться, что $\beta'(Q+0) > 0$ для всякого $Q > 0$. Но $\beta'(Q+0) = f''(Q) - p'(G(Q))G'(Q+0)$, и снова из предположений А1–А2 и свойства $G' > 0$ вытекает требуемое неравенство. Таким образом, оценка $Q^* \leqslant \overline{Q}$ установлена.

Для доказательства неравенства $\hat{Q} \leqslant \overline{Q}$ рассмотрим непрерывную функцию $\chi(Q) = p(G(Q)) + p'(G(Q))Q - f'(Q)$ и заметим, что в силу А2 имеет место неравенство $\chi(Q) \leqslant -\beta(Q) \forall Q \geqslant 0$. Далее, легко видеть, что $\chi(\hat{Q}) = 0$. Таким образом, чтобы доказать требуемое неравенство, достаточно убедиться, что $\chi'(Q+0) < 0 \;\forall\; 0 < Q < \hat{Q}$. Так как по условиям теоремы $f''(Q) > 0$, можем записать оценку

$$\begin{aligned} &\chi'(Q+0) = [p'(G(Q)) + p''(G(Q))Q]G'(Q+0) + p'(G(Q) - f''(Q) < \\ &< [p'(G(Q)) + p''(G(Q))Q]G'(Q+0) + p'(G(Q)) \end{aligned} \tag{21}$$

для всякого $Q > 0$. Для фиксированного $Q > 0$ возможны два случая:

(*i*) если $p''(G(Q)) \leqslant 0$, то из (21) и предположения А2 вытекает $\chi'(Q+0) < 0$;

(*ii*) если $p''(G(Q)) > 0$, то рассмотрим следующие две взаимоисключающие возможности:

а) при $G'(Q + 0) \leqslant 1$ перепишем оценку (21) в виде

$$\chi'(Q+0)<[2p'(G(Q))+p''(G(Q))Q]G'(Q+0)+[1-G'(Q+0)]p'(G(Q))\leqslant$$
$$\leqslant[2p'(G(Q))+p''(G(Q))G(Q)]G'(Q+0).$$

Но последнее выражение в этой цепочке неравенств неположительно для любых Q в силу (11), следовательно, в рассматриваемом случае $\chi'(Q + 0) < 0$;

б) если же $G'(Q + 0) > 1$, то из (18) имеем неравенство $\sum\limits_{i\in I(G(Q))} q_i'(G(Q))>0$. При доказательстве теоремы 2 было показано, что в этом случае $\sum\limits_{i\in I(G(Q))} q_i(G(Q))>G/2$, а значит, $Q < G/2$. Поэтому оценку (21) в силу А2 можно переписать в виде

$$\chi'(Q+0)<\left[p'(G(Q))+p''(G(Q))\frac{G}{2}\right]G'(Q+0).$$

Снова правая часть в последнем неравенстве неположительна в соответствии с (11), а значит, и в этом случае $\chi'(Q + 0) < 0$. Таким образом, показано, что $\chi'(Q + 0) < 0\ \forall\ 0 < Q < \hat{Q}$, откуда вытекает требуемое неравенство $\hat{Q}\leqslant\overline{Q}$.

Итак, левое неравенство в цепочке (20) установлено. Чтобы доказать правое неравенство в ней, заметим, что $f'(\overline{Q})\leqslant p(G(\overline{Q}))\leqslant p(\overline{Q})$ в силу (19) и монотонности функции p. Но из А1 – А3 вытекает, что $f'(Q) > p(Q)\ \forall\ G > G_0$. Следовательно, $\overline{Q}\leqslant G_0$, и теорема полностью доказана.

Отметим, что операция взятия максимума из двух величин $\hat{Q}$ и Q^* в оценке (20) – необходимая. Дело в том, что в отличие от [9], в которой установлена оценка $\hat{Q}\leqslant Q^*$, рассмотренные здесь более слабые условия на обратную функцию спроса $p(G)$ не позволяют в общем случае получить эту оценку. Более того, возможны случаи, когда назначение лидером слабого (в некотором смысле) участника приведет к снижению его (а значит, и общего) объема выпуска. Далее будет рассмотрен частный случай нашей задачи, в котором конкретизация предположений о функциях цены p и затрат f_i позволяет доказать строгую вогнутость функции прибыли лидера $\mu(Q)$. При этом становится возможным выяснить соотношение между $\hat{Q}$ и Q^*, используя лишь локальную информацию.

Именно предположим, что функция p трижды дифференцируема и удовлетворяет условию

$$\left(\frac{p''}{p'}\right)'\leqslant-\frac{1}{G}\frac{p''}{p'},\quad p''>0 \tag{22}$$

при любых $G > 0$. Кроме того, будем полагать, что функции затрат участников линейны, т.е. $f_i(q_i) = c_iq_i$, $i = 1, \dots, n$, и $f(Q) = cQ$. Нетрудно убедиться, что в этом случае

$$q_i(G(Q))=\frac{c_i-p(G(Q))}{p'(G(Q))},\quad i\in I=I(G(Q)),$$

откуда вытекает, что

$$q_i'(G(Q))=-1-\frac{q_i(G(Q))p''(G(Q))}{p'(G(Q))},\quad i\in I.$$

Таким образом, получаем равенство

$$\sum_{i\in I}q_i'(G(Q))=-|I|-\frac{p''}{p'}\sum_{i\in I}q_i(G(Q)).$$

Поэтому в тех точках Q, в которых производная $G'(Q)$ существует, она выражается формулой

$$G'(Q) = \frac{1}{1 - \sum_{i \in I} q_i'(G(Q))} = \frac{1}{1 + |I| + \frac{p''}{p'}(G - Q)}. \tag{23}$$

Из (23) вытекает оценка

$$G'(Q) \leqslant \frac{1}{|I| - 1 - (p''/p')Q} \leqslant \frac{p'}{-Qp''}. \tag{24}$$

Таким образом, $[-\varphi_0(Q)] = p(G(Q)) + p'(G(Q))G'(Q)Q - c$, а значит

$$[-\varphi_0'(Q)] = 2p'(G(Q))G'(Q) + p''(G(Q))[G'(Q)]^2 Q + p'(G(Q))G''(Q)Q. \tag{25}$$

Но $G''(Q) = -(G')^2 \left[\left(\frac{p''}{p'} \right)' (G - Q)G' + \frac{p''}{p'}(G' - 1) \right]$.

Поэтому из (25) получаем

$$\mu''(Q) = p'G' \left\{ 2 + 2Q\frac{p''}{p'}G' - Q\left[\frac{p''}{p'} + \left(\frac{p''}{p'} \right)' (G - Q) \right] (G')^2 \right\}.$$

Так как $(p''/p') + (p''/p')'(G - Q) < 0$ (последнее вытекает из (22)), то выражение в фигурной скобке принимает положительное значение (а значит, $\mu''(Q) < 0$), если $G' \leqslant 1/[Q(-p''/p')]$. Но это – в точности неравенство (24), которое выполнено при всяком $Q > 0$, таком, что $G'(Q)$ существует. Если же в точке Q существуют лишь односторонние производные функции G (а значит, и функции μ), то покажем, что $\mu'(Q - 0) > \mu'(Q + 0)$. В самом деле, если $i \in I(G - 0)$ и $i \notin I(G + 0)$, то очевидно, что $q_i(G - 0) < 0$ и $q_i(G + 0) = 0$. Из (18) и непрерывности функции $G(Q)$ следует, что $G'(Q - 0) < G'(Q + 0)$. Теперь, используя $\mu'(Q - 0) = p(G(Q)) + p'(G(Q))G'(Q - 0)Q - f''(Q)$, $\mu'(Q + 0) = p(G(Q)) + p'G(Q))G'(Q + 0)Q - f''(Q)$ и строгое убывание функции p, получим $\mu'(Q - 0) > \mu'(Q + 0)$ $\forall\, Q > 0$, в котором не существует производной μ'. Таким образом, функция μ – строго вогнутая. Следовательно, классификация случаев становится полной и вытекает из локальных правил:

(*i*) если $G'(\hat{Q} + 0) \geqslant 1$, а $G'(\hat{Q} - 0) \leqslant 1$, то $Q^* = \hat{Q}$, $G(Q^*) = G(\hat{Q}) = \hat{G}$;

(*ii*) если $G'(\hat{Q} + 0) < 1$, то $Q^* > \hat{Q}$, $G(Q^*) > G(\hat{Q}) = \hat{G}$;

(*iii*) если $G'(\hat{Q} - 0) > 1$, то $Q^* < \hat{Q}$, $G(Q^*) < G(\hat{Q}) = \hat{G}$.

Так, например, если $n = 1$ и $q_1'(\hat{G}) < 0$, то $Q^* > \hat{Q}$, а следовательно $G(Q^*) > G(\hat{Q})$. Если же $Q'(\hat{G}) < 0$, а $q_1'(\hat{G}) > 0$, то $Q^* < \hat{Q}$ и, значит, $G(Q^*) < G(\hat{Q})$ (т.е. если в ситуации равновесия по Нэшу – Курно фирма 1 производила больше половины общего выпуска продукта, то назначение лидером более слабой фирмы (с номером 0) приводит к уменьшению как ее собственного, так и совокупного выпуска продукта).

3. МЕТОД ПРОГОНКИ

Для численного решения задачи (1)–(2) при фиксированном $Q > 0$ рассмотрим динамическую систему, задаваемую дифференциальным уравнением

$$\dot{G} = -G + Q + \sum_{i \in I(G)} q_i(G) = T(G), \quad G(0) = Q. \tag{26}$$

Легко видеть, что решение $G = G(Q)$ уравнения (7) является стационарной точкой динамической системы (26); устойчивость этой точки зависит от знака производной dT/dG правой части (26) в рассматриваемой точке. Дифференцируя $T(G)$ по G, получим

$$\frac{dT}{dG} = -1 + \sum_{i \in I(G)} q_i'(G). \tag{27}$$

Как было установлено в конце разд. 1, при выполнении неравенства $\sum_{i \in I(G)} q_i(G) \leqslant G$ имеет место оценка $\sum_{i \in I(G)} q_i'(G) < 1$. Тогда из (27) очевидно, что при фиксированном объеме внешних поставок Q решение $q(Q)$ задачи (1)–(2) будет устойчивой стационарной точкой динамической системы (26).

Интегрирование системы (26) может быть осуществлено, например в рамках итерационного процесса

$$G^{k+1} = G^k - \alpha_k \left[G^k - Q - \sum_{i \in I(G^k)} q_i(G^k) \right], \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$G^0 = Q, \quad \alpha_k > 0. \tag{28}$$

Для изучения вопроса о сходимости процесса (28) к $\overline{G} = G(Q)$ дополнительно предположим, что функция p выпукла, а w_i – положительные постоянные, $i = 1, \ldots, n$. Тогда из (10) имеем

$$\sum_{i \in I(G)} q_i'(G) \geqslant -\sum_{i \in I(G)} \frac{1}{w_i} \geqslant -\sum \frac{1}{w_i}. \tag{29}$$

Далее используем тот факт, что $\overline{G}$ – неподвижная точка отображения, записанного в правой части (28). Поэтому

$$G^{k+1} - \overline{G} = G^k - \overline{G} - \alpha_k \left[\left(G^k - \overline{G}\right) - \sum_{i \in I(G^k)} q_i(G^k) + \sum_{i \in I(\overline{G})} q_i(\overline{G}) \right] =$$
$$= (1 - \alpha_k)(G^k - \overline{G}) + \alpha_k \left[\sum_{i \in I(G^k)} q_i(G^k) - \sum_{i \in I(\overline{G})} q_i(\overline{G}) \right]. \tag{30}$$

Если точка $\overline{G}$ неособенная, т.е. $I(\overline{G} - 0) = I(\overline{G} + 0)$, и если G^k достаточно близко к $\overline{G}$ в том смысле, что $I(G^k) = I(\overline{G})$, то из (30) вытекает

$$G^{k+1} - \overline{G} = (1 - \alpha_k)(G^k - \overline{G}) + \alpha_k \sum_{i \in I(G_m)} q_i'(G_m)(G^k - \overline{G}) =$$
$$= \left\{ 1 - \alpha_k \left[1 - \sum_{i \in I(G_m)} q_i'(G_m) \right] \right\} (G^k - \overline{G}),$$

где G_m – некоторая промежуточная точка между G^k и $\overline{G}$. Следовательно, выбирая $0 < \overline{\alpha} \leqslant \alpha_k \leqslant \sigma = 1 / \left(1 + \sum \frac{1}{w_i} \right)$, $k = 0, 1, \ldots$, как это видно из (29), можно ожидать локальную линейную сходимость G^k сверху к $\overline{G} = G(Q)$.

Наконец, оптимальный объем производства Q внешнего участника (лидера) возможно определять методами одномерной максимизации его функции прибыли $\mu(Q)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *McManus M.* Numbers and Size in Cournot Oligopoly // Yorkshire Bulletin Social and Economic Research. 1962. V. 14.
2. *McManus M.* Equilibrium, Numbers and Size in Cournot Oligopoly // Yorkshire Bulletin Social and Economic Research. 1964. V. 16.
3. *Roberts J., Sonnenschein H.* On the Existence of Cournot Equilibrium Without Concave Profit Functions // J. Economic Theory. 1976. V. 13.
4. *Frank C.R., Jr., Quandt R.E.* On the Existence of Cournot Equilibrium // Intern. Economic Rev. 1963. V. 5.
5. *Szidarovszky F., Yakowitz S.* A New Proof of the Existence and Uniqueness of the Cournot Equilibrium // Intern. Economic Rev. 1977. V. 18.
6. *Novshek W.* On the Existence of Cournot Equilibrium // Rev. Econ. Studies. 1985. V. 52(1). № 168.
7. *Ruffin R.J.* Cournot Oligopoly and Competitive Behaviour // Rev. Econ. Studies. 1971. V. 38.
8. *Okuguchi K.* Quasi-competitiveness and Cournot Oligopoly // Rev. Econ. Studies. 1973. V. 40.
9. *Sherali H.D., Soyster A.L., Murphy F.H.* Stackelberg-Nash-Cournot Equilibria: Characterizations and Computations // Oper. Research. 1983. V. 31. № 2.
10. *Harker P.T., Choi S.-C.* A Penalty Function Approach for Mathematical Programs with Variational Inequality Constraints // Information and Decision Technologies. 1991. V. 17.

Поступила в редакцию
14 XII 1993