ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1994
Том 30, вып. 4

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ КОНКУРЕНТНОГО РАВНОВЕСИЯ С ПОМОЩЬЮ ФИНАНСОВОГО МЕХАНИЗМА*

© 1994 Сотсков А.И.

(*Москва*)

Производственная система экономики описывается в виде суммы технологических конусов производителей. Ее оптимальные траектории реализуются как траектории динамического равновесия, в котором в каждый момент времени производители обмениваются продукцией при бюджетных ограничениях так, чтобы в следующий момент времени получить максимальный доход. Рассматриваются варианты поведения производителей, обеспечивающие максимальный средний рост производства.

Пусть имеются производители $i = 1, ..., n$ с технологиями $Z^i \subset R_+^m \times R_+^m$, где Z^i – выпуклый замкнутый конус, обладающий теми свойствами, что $(0,y) \notin Z^i$ при $y \neq 0$, $Pr_1 Z = R_+^m$. Суммарная технология

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z^i = \left\{ (x,y),\ x = \sum_i x^i,\ y = \sum_i y^i,\ (x^i, y^i) \in Z^i \right\}.$$

Мы предполагаем, что $Pr_2 Z \cap \operatorname{int} R_+^m \neq \phi$, т.е. все продукты в системе могут быть произведены. Максимальный темп роста системы $a = \max\limits_{(x,y)\in Z} \min\limits_{1\leqslant j\leqslant m} y_j / x_j > 0$. Здесь функция, которая стоит под знаком max, квазивогнутая; она достигает максимума в некоторой точке $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum (\bar{x}^i, \bar{y}^i) \in Z$. Значит существуют векторы p, q и числа

$$\lambda_j \geqslant 0,\ \sum_{j\in I} \lambda_i = 1,\ \text{ где } I = \{j, 1 \leqslant j \leqslant m,\ \bar{y}_j / \bar{x}_j = a\},$$

такие, что

$$p\bar{x}^i + q\bar{y}^i \geqslant px^i + qy^i \forall (x^i, y^i) \in Z^i,\ \ i = 1,...,n, \tag{1}$$

$$p_j = -\lambda_j \frac{\bar{y}_j}{\bar{x}_j^2},\ \ j \in I,\ \ p_j = 0,\ \ j \notin I, \tag{2}$$

$$q_j = \lambda_j / \bar{x}_j,\ \ j \in I,\ \ q_j = 0,\ \ j \notin I. \tag{3}$$

Умножим (2) и (3) на $\bar{x}_j$ и y_i соответственно. Сравнение полученных равенств даст $p = -aq$. Из (1) имеем $-aqx^i + qy^i \leqslant 0$ и $-aq\bar{x}^i + q\bar{y}^i = 0 \forall (x^i, y^i) \in Z^i$, $i = 1,...,n$. Простое рассуждение показывает, что вектор $(\bar{x}^i, \bar{y}^i)$ является решением задачи на

$$\max qy^i,\ qx^i \leqslant q\frac{1}{a}\bar{y}^i,\ (x^i, y^i) \in Z^i. \tag{4}$$

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-06-10356).

При этом имеют место материальный и финансовый балансы

$$\sum_i \bar{x}^i \leqslant \frac{1}{a} \sum_i \bar{y}^i, \tag{5}$$

где по продуктам $j \in I$ имеется равенство,

$$q \sum_i \bar{x}^i = q \frac{1}{a} \sum_i \bar{y}^i. \tag{6}$$

Таким образом, производственный процесс $(\bar{x}, \bar{y})$ максимального роста a в системе $Z = \sum Z^i$ реализуется в результате конкурентного равновесия производителей (4)–(6). Этот процесс может повторяться во времени с растущими темпом a выпусками производителей $\bar{y}^i$. (Некоторые выпуски $\bar{y}^i$ остаются равными нулю). Вообще говоря, такой процесс $(\bar{x}, \bar{y})$ не один, их целая грань в Z, так называемая неймановская грань N_a. В частности, все векторы $(\bar{x}^i, \bar{y}^i) \in N_a$. Помимо траекторий, растущих темпом a, имеется много других, которые растут "средним темпом" a. Для них $\overline{\lim_{t \to \infty}} a^{-t} x_j(t) > 0$ для некоторого $j \in I$. Все они стремятся к грани N_a (см. [1]). Нас будут интересовать способы конкурентной реализации таких траекторий.

Траекторией конкурентного равновесия в модели $Z = \Sigma Z^i$ с начальными запасами продуктов $(y_1^i)_{i=1}^n$ называется последовательность векторов затрат-выпусков $(x_t^i, y_{t+1}^i) \in Z^i$, $i = 1, \ldots, n$, и цен $q_t \in R_+^m$, $q_t \neq 0$, $t = 1, \ldots$, такая, что (x_t^i, y_{t+1}^i) являются решениями задач на

$$\max_{(x^i, y^i)} \; q_{t+1} y^i, \; q_t x^i \leqslant q_t y_t^i, \; (x^i, y^i) \in Z^i \tag{7}$$

и при этом имеют место материальный и финансовый балансы

$$\sum_i x_t^i \leqslant \sum_i y_t^i, \tag{8}$$

$$q_t \sum_i x_t^i = q_t \sum_i y_t^i. \tag{9}$$

Согласно определению, производители в каждый момент времени t продают на рынке произведенную продукцию y_t^i по ценам q_t. На вырученные деньги они закупают ресурсы x_t^i для следующего цикла с таким расчетом, чтобы получить максимальный доход от будущей продукции y_{t+1}^i по ценам q_{t+1}, причем предполагается, что они совершенно предвидят эти цены. Заметим, что производители максимизируют доход, а не прибыль (как обычно), потому что затраты окупаются от продажи прошлой продукции, а не будущей, кредит здесь отсутствует. Это случай чистой самоокупаемости. Такая модель была введена в [2].

Произвольная траектория (7)–(9), вообще говоря, имеет средний темп, меньший a. Самоокупаемость ограничивает развитие отраслей, определяющих рост в системе. Преодолевать этот недостаток можно централизованным и децентрализованным способами. Первый означает бюджетное регулирование.

Пусть начальные запасы всех продуктов в системе положительны, т.е. $y_1 = \sum y_1^i > 0$, и существует равновесие $(a, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{q})$ с положительными векторами $\bar{y}$ и $\bar{q}$. Возьмем траекторию $(y_t, y_{t+1}) \in Z$, начинающуюся в точке y_1 и допускающую характеристику $(q_t)_{t=1}^{\infty}$. По определению (см. [1]), для нее имеется последовательность неотрицательных векторов q_t, $t = 1, \ldots$, такая, что

$$q_t x \geqslant q_{t+1} y \, \forall (x, y) \in Z, \; q_t y_t = q_{t+1} y_{t+1} > 0. \tag{10}$$

Для такой траектории последовательность $a^t q_t$ ограничена (см. Предложение 13.2 в [1]). Значит, $a^t q_t \leqslant \beta\overline{q}$ для некоторого $\beta > 0$. Получаем $\beta a^{-t}\overline{q}y_t \geqslant q_t y_t = \text{const} > 0$. Отсюда следует, что траектория имеет средний темп роста a. Очевидно, существуют такие $(x_t^i, y_{t+1}^i) \in Z^i$, что $\sum x_t^i = y_t^i = y_t$ и для векторов (x_t^i, y_{t+1}^i) выполнены соотношения, аналогичные (10): $q_t x \geqslant q_{t+1} y$ для любых $(x, y) \in Z^i$ и $q_t x_t^i = q_{t+1} y_{t+1}^i$.

Положим $D_t^i = q_t x_t^i - q_t y_t^i$. Очевидно, $\sum_i D_t^i = 0$. Тогда последовательность векторов (x_t^i, y_{t+1}^i) является решением задачи на

$$\max_{(x^i, y^i)} q_{t+1} y^i \tag{11}$$

при ограничениях

$$q_t x^i \leqslant q_t y_t^i + D_t^i, \quad (x^i, y^i) \in Z^i$$

и при этом имеет место материальный баланс

$$\sum_i x_t^i = \sum_i y_t^i = y_t. \tag{12}$$

Назовем такую траекторию (11–12) *траекторией конкурентного равновесия с бюджетным регулированием.* Мы получили следующее утверждение.

Утверждение 1. *Из любого начального состояния с положительным суммарным вектором* $\sum_i y_1^i$ *исходят траектории конкурентного равновесия* (x_t^i, y_{t+1}^i) *с бюджетным регулированием* D_t^i, ((11), (12)), *имеющие средний темп роста а.*

Другой способ увеличить средний темп роста траекторий конкурентного равновесия (7)–(9) – открыть возможность переноса покупательной способности во времени и займа, т.е. ввести деньги.

Пусть векторы $(x_t^i, y_{t+1}^i, m_{t+1}^i)$ являются решением задачи на

$$\max_{(x^i, y^i, m^i)} [q_{t+1} y^i + m^i \ (1 + r_{t+1})] \tag{13}$$

при ограничениях $q_t x^i + m^i \leqslant q_t y_t^i + m_t^i \ (1 + r_t)$, $(x^i, y^i) \in Z^i$, и при этом имеют место балансы

$$\sum_i x_t^i = \sum_i y_t^i, \ \sum_i m_{t+1}^i = \sum_i m_t^i (1 + r_t). \tag{14}$$

Будем называть такую траекторию траекторией конкурентного равновесия с деньгами. Здесь производители могут сберегать или занимать деньги m^i на один период. У каждого производителя имеется счет в банке, который в период $(t, t + 1)$ дает процент r_{t+1}. В конце периода сумма сбережения или долга увеличивается на величину процента $r_{t+1} m^i$. В начале периода $(t, t + 1)$ производитель определяет закупки ресурсов, сбережения или заем так, чтобы максимизировать свой будущий счет в банке в момент $t + 1$. Теперь, когда он может покрывать издержки за счет будущих доходов, его задача эквивалентна максимизации прибыли. Действительно, подставим m^i из бюджетного ограничения в целевую функцию (13). Получим задачу на

$$\max_{(x^i, y^i) \in Z^i} [q_{t+1} y^i - (1 + r_{t+1}) q_t x^i + (1 + r_{t+1})(q_t y_t^i + m_t^i (1 + r_t))]$$

или

$$\max_{(x^i, y^i) \in Z^i} [q_{t+1} y^i - (1 + r_{t+1}) q_t x^i]. \tag{15}$$

Здесь затраты отнесены к моменту $t+1$. Из (15) следует, что траектория $(y_t)_{t=1}^{\infty}$, $(y_t, y_{t+1}) \in Z$, где $y_r = \sum_i x_t^i = \sum_i y_t^i$, удовлетворяет условию

$$q_{t+1}y_{t+1} - (1+r_{t+1})q_t y_t = \max_{(x,y)\in Z}[q_{t+1}y - (1+r_{t+1})q_t x] = 0. \tag{16}$$

Положим

$$p_t = (1+r_1)^{-1}...(1+r_{t-1})^{-1}q_t. \tag{17}$$

Легко видеть, что последовательность (p_t) является характеристикой для траектории (y_t), т.е. $p_{t+1}y_{t+1} - p_t y_t = \max_{(x,y)\in Z}[p_{t+1}y - p_t x] = 0$, $p_t y_t = \text{const} > 0$. Следовательно, траектория (y_t) имеет средний темп роста a. При этом, если доля i-го производителя $p_t y_t^i$ в $p_t y_t$ не стремится к нулю, то из ограниченности $a^t p_t$, как и выше (см. выкладку за формулой (10)), получаем, что выпуски y_t^i растут средним темпом, равным a.

Очевидно, что верно и обратное: если траектория (y_t) допускает некоторую характеристику (p_t), то последовательность цен (q_t), полученная из (17), удовлетворяет (16) и, следовательно, (15), т.е. траектория $(x_t^i, y_{t+1}^i, m_{t+1}^i)$, $i = 1,...,n$, является равновесной в смысле определения (13), (14). Мы получили следующее утверждение.

Утверждение 2. *Всякая траектория конкурентного равновесия с деньгами* (13), (14), *начинающаяся с положительных суммарных запасов ресурсов* $y_1 = \sum y_1^i > 0$, *имеет средний темп роста a. Каждая траектория в модели Z, допускающая характеристику, порождает траекторию конкурентного равновесия с деньгами.*

Для равновесной траектории характерен одинаковый для всех производителей экономический рост $q_{t+1}y_{t+1} / q_t x_t^i = r_{t+1}$. Процент r_t определяется темпом возрастания денежной массы и является параметром регулирования. В частности, когда равновесная траектория (y_t) стремится к лучу $\bar{x}, a\bar{x},...,a^t\bar{x},...$, то индекс цен $q_{T+1}\bar{x}:q_t\bar{x}$ стремится к последовательности $(1+r_t)a^{-1}$.

Итак, мы видели, что любая траектория (y_t), допускающая характеристику, может порождаться механизмом как бюджетного регулирования, так и денежного. Нетрудно установить связь между размерами дотаций (изъятий) и соответствующих им займов (сбережений). Если траектория (y_t) допускает характеристику (p_t), то дотации $D_t^i = p_t x_t^i - p_t x_t^i$ (см. (11)). С другой стороны, из (13) и (17) получаем $m_{t+1}^i = m_t^i(1+r_t) - D_t^i(1+r_1)\ldots(1+r_{t-1})$. В частности, если $r_t \equiv 0$ и $m_0^i = 0$ (допущение, которое устраняет различие в условиях задач (11) и (13)), то $m_{t+1}^i = m_t^i - D_{t_i}$, или $m_t^i = -\sum_{\tau=0}^{t-1} D_\tau^i$, т.е. на счету у предприятия в точности сумма дотаций (заем, если эта сумма положительна, или сбережение, если она отрицательна). Таким образом, денежный механизм позволяет децентрализованно реализовывать трансферты бюджетного регулирования.

Автор благодарит рецензента за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Макаров В.Л., Рубинов А.М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.
2. *Аркин В.И., Сластников А.Д.* Равновесная модель перехода от централизованной экономики к конкурентному рынку // Экономика и мат. методы. 1994. Т. 30. Вып. 3.

Поступила в редакцию
30 XI 1993