

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

К ВОПРОСУ ОБОСНОВАНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИНДЕКСА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОИЗВОДСТВА

© 1995 Клейнер Г.Б., Бровер В.В.

(Москва)

Предлагается аксиоматическое обоснование и не зависящая от цен экономическая интерпретация гиперболического индекса сравнительной технологической эффективности Фаррелла и некоторых его обобщений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача измерения сравнительной эффективности деятельности экономических объектов относится к числу классических. В отечественной и зарубежной литературе предложено множество показателей и алгоритмов такой оценки, в том числе с учетом отраслевой и предметной специфики, ситуации на рынках, народнохозяйственного уровня сравниваемых объектов и т.д. (см., например, [1, 2]).

Постановки задач и соответственно методов различаются, во-первых, объемом и составом исходной информации, используемой для описания деятельности сопоставляемых объектов; во-вторых, алгоритмами сравнения состояния ресурсов, технологии и других факторов хозяйственной деятельности; в-третьих, спецификой самой задачи (она касается либо технологии, либо распределения ресурсов, либо общей эффективности производства [3]). Спектр предлагаемых вариантов достаточно широк – от обширных перечней показателей, детально характеризующих состояние производства и влияние результатов деятельности на социально-экономическую и природную среду, до одиночных обобщенных индикаторов, таких, как разность между стоимостной оценкой результатов и затрат (в динамическом варианте – с учетом дисконта), соответствующая в микроэкономическом случае прибыли предприятия. Часто для описания технологии производства с целью измерения его эффективности используются производственные функции (ПФ) и производственные соответствия ([4–8]). Вместе с тем даже в рамках одного и того же информационного описания технологии возможно построение различных измерителей (индексов) технологической эффективности, отражающих те или иные аспекты ситуации и соответствующим тем или иным требованиям к показателям эффективности. Некоторые наиболее общие аксиомы, которым должны удовлетворять такие индексы, обсуждались в [3, 9].

Сфера практического применения расчетных показателей (при мультипликативном подходе – индексов) сравнительной эффективности технологий в российской экономике в настоящее время быстро расширяется. В условиях централизованного управления эти показатели использовались для обоснования технологических нововведений и служили базой финансового поощрения инновационных инициатив. В начале переходного периода их исключили из экономической практики, так как полагали достаточными такие чисто коммерческие показатели, как доход, балансовая или чистая прибыль и т.п. Однако при стремлении предприятий к привлечению средств инвесторов и

долгосрочному повышению общей эффективности хозяйствования требуется включение в экономический обиход целого ряда расчетных характеристик эффективности (внутренняя норма прибыли, различные коэффициенты эффективности инвестиций и финансовое состояние предприятия и т.д.). При этом в случаях, когда цены труднопредсказуемы, а использование стоимостных показателей эффективности ненадежно, должны подключаться индексы эффективности на базе натуральных измерителей. Обширную сферу практического применения индексов сравнительной эффективности представляет также факторный анализ эффективности работы предприятий и фирм, целью которого является исследование количественной статистической зависимости величин индексов от таких показателей, как размер фирмы, тип собственности, отраслевая принадлежность, конкурентная и управленческая стратегия и т.п. (обзор работ этого направления приведен в [3]).

Один из наиболее общих теоретических подходов к измерению сравнительной эффективности производства развит в [3]. В этой работе рассмотрен и исследован ряд количественных показателей сравнительной эффективности данной и иных возможных "производственных технологий", каждая из которых характеризуется вектором затрат и конечных результатов производства в натуральном выражении за один период. В качестве основного показателя предложен так называемый "гиперболический графовый" индекс технологической эффективности Фаррелла, определяемый в [3] как

$$F_g(x, u) = \inf\{\lambda \geq 0: (\lambda x, \lambda^{-1}u) \in G\}, \quad (1)$$

где x, u – векторы производственных затрат и результатов производства (технология); G – множество всех допустимых (сравниваемых) технологий. Мерой эффективности (точнее, неэффективности) базовой технологии $A = (x, u)$ здесь считается "длина" пути от точки A до границы множества сравниваемых технологий по гиперболической траектории, проходящей через A . Впоследствии функция (1) успешно применялась для расчетов сравнительной эффективности работы группы предприятий (с учетом нежелательных побочных результатов производства) [10].

Вместе с тем предложенные в [3] конструктивные определения индекса технологической эффективности (1) (в частности, выбор гиперболической траектории) и некоторых других близких по назначению индексов не были подкреплены в [3] аксиоматическим обоснованием соответствующих формул. В [3, с. 111] утверждалось также, что функция (1) не имеет интерпретации в терминах сравнения прибылей от использования двух разных технологий. В результате вопрос об обоснованности применения (1) в качестве меры эффективности технологий и его экономической интерпретации оставался открытым.

Частным случаем задачи построения индекса для измерения эффективности технологии A в составе множества G является определение меры сравнения двух произвольных технологий A и Y . Если A и Y представлены точками в конечномерном пространстве, то в качестве скалярных критериев сравнения использовались такие функции, как евклидово расстояние, сумма модулей разностей одноименных координат, число несовпадающих элементов (когда координатами являются булевы переменные) и др. В большинстве случаев выбор той или иной меры представляет непростую задачу, от решения которой, однако, могут существенно зависеть результаты ранжирования сравниваемых объектов. Для облегчения такого выбора было бы полезно иметь для каждого из "кандидатов" на роль этой меры одну или несколько альтернативных систем аксиом, дающих адекватное описание таких критериев в терминах, допускающих предметную интерпретацию. В такой ситуации для выбора меры можно было бы использовать не только апостериорные данные о результатах ее применения, но и априорную информацию о предметно-целевой специфике решаемой задачи. Кроме того, наличие интерпретируемого аксиоматического описания различных функциональных конструкций для измерения сравнительной эффективности технологий или их множеств позволяет более точно сформулировать предпосылки, на базе которых строится модель, включающая эти ин-

дексы, и тем самым обеспечить более адекватное понимание полученных с помощью таких моделей результатов.

Характерной чертой индекса технологической эффективности Фаррелла (1) как меры неэффективности точки A по сравнению с другими точками является то, что результат сравнения зависит лишь от точек, расположенных на "гиперболе": $\Gamma = \{(y, v) \in G: (y, v) = (\lambda x, \lambda^{-1}u)\}$. Таким образом, точки множества G , не представимые в таком виде, не допускают сравнение с точкой A с помощью данного индекса, что ограничивает его практическую применимость в случаях, когда множество $G \cap \Gamma$ невелико по сравнению с G или вообще пусто. В связи с этим возникает вопрос о конструировании более гибких индексов технологической эффективности, подходящих для измерения степени эффективности данной точки A в составе произвольных множеств G , в том числе состоящих из небольшого числа отличных от A элементов.

Цель настоящей статьи – дать одно из возможных аксиоматических обоснований индекса технологической эффективности Фаррелла (1) и некоторых более общих мер сравнительной эффективности (в том числе для сопоставления двух технологий) и показать возможность чисто экономической интерпретации этих индексов через соизмерение размеров ожидаемой при реализации той или иной технологии прибыли.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем общую постановку и модельную схему задачи построения индекса сравнительного измерения технологической эффективности производства, уточняя и развивая подход, предложенный в [3, 11, 12].

Предполагается, что каждую конкретную ситуацию измерения сравнительной эффективности технологий определяют следующие компоненты: G – заданное множество анализируемых (сравниваемых) технологий; $A \in G$ – выделенная исходная (базовая) технология; $>$ – бинарное отношение сравнительной эффективности на множестве G : $Y > Z$, если $Y, Z \in G$, и технология Y более эффективна, чем технология Z .

Множество G , вообще говоря, может быть как конечным, так и бесконечным, включать как реальные, так и проектируемые технологии, иметь любую конфигурацию. Отношение $>$ должно быть определенным образом согласовано со структурой множества G в том смысле, что в нетривиальном случае множество сравнимых технологий охватывает значительную часть множества $G \times G$ (иначе описание исходной ситуации сравнения неадекватно постановке задачи).

Ответ на вопрос, какая из двух технологий эффективнее, может зависеть от того, с каких позиций производится сравнение, в частности, какая точка в множестве технологий является исходной (базовой), поэтому в общем случае предусматривается зависимость отношения $>$ от точки A : $> = >_A$ и задача состоит в построении шкалы измерения (в смысле [13]) отношения технологической эффективности.

Конкретизируем структуру множества технологий G и отношение эффективности $>_A$. Начнем с множества G . Предполагается, что каждая технология $Y \in G$ однозначно характеризуется наборами затраченных (y) и произведенных (v) за определенный период товаров или услуг, $Y = (y, v)$. При этом существуют два непересекающихся конечных классификационных перечня, отражающие номенклатуру (виды) невзаимозаменяемых соответственно затраченных и произведенных продуктов по всем технологиям из множества G . Кроме того, считается заданной система количественных измерителей, позволяющая для каждой технологии указать объемы затраченных и произведенных продуктов по каждой номенклатурной позиции. Это дает возможность представлять наборы затрачиваемых и выпускаемых продуктов как элементы двух векторных пространств фиксированных размерностей. Операции сложения в каждом из этих пространств соответствуют объединению наборов, а умножения на поло-

жительное число – пропорциональному увеличению или уменьшению количества товаров в данном наборе. Таким образом, каждая технология $Y \in G$ представима в виде пары неотрицательных векторов $Y = (y, v)$, $y \in R_+^n$, $v \in R_+^m$, где n – число видов используемых, а m – производимых продуктов.

Предполагается, что множество анализируемых технологий G составлено из однородных в определенном смысле элементов: состав затрат и выпусков в различных технологиях считается одинаковым и представленным с помощью одних и тех же измерителей.

Уточним теперь свойства отношения сравнительной (технологической) эффективности $\succ_A$ и соответствующего ему нестрогого отношения эффективности. Технологии $Y, Z \in G$ допускают сравнение по степени эффективности только в тех случаях, когда они сравнимы с базовой технологией $A \in G$. При описании технологии производства в виде преобразования вектора затрат в вектор результатов следует учитывать порождаемую, как правило, ею на множествах затрат и результатов структуру определенных ("технологических") пропорций между объемами некоторых расходуемых ресурсов и выпускаемых продуктов (существование такой структуры и пропорций в затратах и результатах хорошо известно и отмечено, например, в [14]). В достаточно общем случае эта структура может быть задана с помощью двух бинарных отношений (η и θ) на множествах координат векторов затрат и векторов выпусков, а именно: пусть $(i_1, i_2) \in \eta$, если между координатами y_{i_1} и y_{i_2} векторов возможных затрат для данной технологии должно выполняться определенное соотношение. Аналогично $(j_1, j_2) \in \theta$, если объемы производства продукции видов j_1 и j_2 при данной технологии связаны также определенным соотношением.

Очевидно, η и θ являются отношениями эквивалентности на множествах $\{1, \dots, n\}$ и $\{1, \dots, m\}$ и разбивают их на непересекающиеся подмножества $\{1, \dots, n\} = N_1 \cup \dots \cup N_k$, $\{1, \dots, m\} = M_1 \cup \dots \cup M_l$, выражающие группы эквивалентных (с точки зрения η и θ) индексов. Теперь, если $i_1, i_2 \in N_t$ для некоторого t , $1 \leq t \leq k$, то для любых допустимых векторов затрат $y, y' \in R_+^n$: $y'_{i_1} : y'_{i_2} = y_{i_1} : y_{i_2}$. Если же $i_1, i_2, 1 \leq i_1, i_2 \leq n$, принадлежат различным множествам $N_t, N_{t'}$, то y_{i_1} и y_{i_2} функционально независимы. Обозначив через ω пару отношений эквивалентности $\omega = (\eta, \theta)$, будем рассматривать ω как бинарное отношение на множестве пар $(y, v) \in R_+^n \times R_+^m$. Отношение ω такого типа назовем *схемой технологических пропорций*. Технологические векторы $Y = (y, v)$ и $Z = (z, w)$ будем называть ω -параллельными, если $y_{i_1} : y_{i_2} = z_{i_1} : z_{i_2}$ $\forall (i_1, i_2) \in \eta$ и $v_{j_1} : v_{j_2} = w_{j_1} : w_{j_2}$ $\forall (j_1, j_2) \in \theta$. Для обозначения ω -параллельных векторов Y и Z используем запись $Y \parallel_\omega Z$.

Легко видеть, что если $Z = (z, w)$, где $z \neq 0, w \neq 0$, то для ω -параллельности векторов Y и Z необходимо и достаточно, чтобы существовали ненулевые числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$ такие, что $y_i = \lambda_i z_i, i = 1, \dots, n, v_j = \mu_j w_j, j = 1, \dots, m$, причем $\lambda_i = \lambda_{i'}$, если $i, i' \in N_t$ при некотором $t, 1 \leq t \leq k$, и $\mu_j = \mu_{j'}$, если $j, j' \in M_s$ при некотором $1 \leq s \leq l$. Наиболее "сильный" вариант ω -параллельности возникает, когда $\eta = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}, \theta = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, m\}$. В этом случае все координаты вектора затрат функционально зависимы, и все координаты вектора выпусков также, а любой ω -параллельный Z вектор имеет вид $Y = (y, v) = (\lambda z, \mu w)$, где $\lambda, \mu \neq 0$. В дальнейшем будем считать, что в качестве ω может фигурировать любая пара отношений (η, θ), удовлетворяющая следующему условию: если $x_i = 0$, то η содержит любую пару вида (i, k) , где $1 \leq k \leq n$, и если $u_j = 0$, то θ содержит любую пару вида (j, l) , где $1 \leq l \leq m$. Эти условия обеспечивают совпадение распределений нулевых координат базового вектора A и любых ω -параллельных ему векторов Y . Соответствующее отношение ω будет наиболее "слабым" вариантом ω -параллельности. Эти

два полярных варианта были использованы в [3] при конструировании индексов эффективности.

Таким образом, непосредственное сравнение по степени эффективности допускают лишь векторы, ω -параллельные друг другу и базовому вектору A . При этом либо структура ω задается априорно на основе информации о всем множестве анализируемых технологий, либо – в минимальном варианте – условие ω -параллельности гарантирует совпадение номеров нулевых координат сравниваемых векторов с номерами нулевых координат базового вектора A .

Если через Π_{ω}^A обозначить множество векторов $Y \in R_+^n \times R_+^m$, ω -параллельных вектору A , то сравнению по эффективности могут подвергаться лишь элементы из множества $G_{\omega}^A = G \cap \Pi_{\omega}^A$: $Y >_A Z \Rightarrow Y, Z \in G_{\omega}^A$.

В качестве базы для сопоставления элементов $Y, Z \in G_{\omega}^A$ по эффективности может, вообще говоря, быть использовано любое транзитивное бинарное отношение. В данной постановке строгое отношение эффективности $>$ мы определяем, следуя [3], на основе покоординатного сравнения технологических векторов: Y строго эффективнее Z , если $Y, Z \in G_{\omega}^A$ и

$$y_i < z_i, \text{ либо } y_i = z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$v_j > w_j, \text{ либо } v_j = w_j = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

(2)

(специфицированное таким образом отношение $>_A$ будет обозначать $>_{A\omega}$). Отсюда получается нестрогое предпочтение по эффективности, если считать, что $Y \geq_{A\omega} Z$, когда либо $Z = Y \in G_{\omega}^A$, либо $Y >_{A\omega} Z$. Отношение $>_{A\omega}$ является пересечением отношения покоординатного сравнения векторов с отношением принадлежности к множеству векторов, ω -параллельных A . Будем называть такое отношение отношением эффективности, связанным с технологией A и схемой технологической зависимости ω .

Таким образом, каждая конкретная ситуация измерения эффективности характеризуется с помощью набора $S = \langle G, A, \omega, >_{A\omega} \rangle$, где G – подмножество $R_+^n \times R_+^m$ (множество анализируемых технологий); A – выделенный элемент G (базовая технология); $\omega = (\eta, \theta)$ – совокупность двух отношений эквивалентности, $\eta \subset \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$, $\theta \subset \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, m\}$ (схемы технологических пропорций); $>_{A\omega}$ – транзитивное бинарное отношение на множестве G_{ω}^A вида (2), связанное с технологией A и схемой пропорций ω .

В этих условиях индексом сравнительной технологической эффективности базовой технологии A по отношению к тому или иному множеству технологий G будет функция F , определенная на множестве подмножеств $G \subset R_+^n \times R_+^m$, содержащих A , принимающая значения в множестве R_+ и отражающая в количественной шкале степень эффективности A (в смысле заданного отношения эффективности $>_{A\omega}$) по сравнению с остальными точками множества G .

Данная постановка задачи отражает достаточно часто встречающуюся в экономической практике ситуацию, в которой требуется построить систему текущих сравнительных оценок деятельности предприятия или иной производственно-хозяйственной системы (цеха, участка, отдела и т.п.) по отношению к деятельности других, сходных в том или ином смысле объектов (конкурирующих предприятий, цехов, участков). При этом для условий рыночной экономики в отличие от централизованно (иерархически) управляемой более характерна асимметричная постановка задачи, когда в анализе заинтересован не орган управления всей группой предприятий, а один из входящих в нее экономических субъектов (представленный базовой точкой A). Множество G в этом случае составляют технологические векторы предприятий данной группы. Сохраняется данная модель задачи и тогда, когда речь идет о количественном

сопоставлении технологий, допускающих реализацию (или реализованных ранее) на одном и том же объекте, а также об оценке эффективности инновационных мероприятий по переходу от одной технологии к другой, в частности о сравнительном анализе инвестиционных проектов.

3. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ИНДЕКСОВ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Рассмотрим требования, которым должна удовлетворять функция F для использования в качестве индекса технологической эффективности. Приводимая ниже их система включает две группы аксиом. В первую (аксиомы A1–A3, A6) входят требования, характеризующие общие и естественные для любого индекса технологической эффективности свойства (см. также [6–8]). Вторую группу (A4, A5, A7) составляют условия, отражающие поведение F относительно специфических операций и отношений на ее области определения. Обоснованность этих аксиом при составлении индекса технологической эффективности в конкретной ситуации не бесспорна, однако отказ от них означал бы необходимость перехода к другому, более сложному в определенном смысле индексу эффективности.

В соответствии с концепцией измерения как гомоморфизма двух реляционных систем [13] для задания шкалы измерения необходимо определить, во-первых, носители эмпирической и измеряющей систем и, во-вторых, множество отношений на этих носителях, учитываемых при построении гомоморфизма. Носители реляционных систем определены в аксиоме A1, а множество отношений включает одно унарное отношение (выделенная точка A) и четыре бинарных (отношения эффективности и пропорциональности технологий, а также теоретико-множественного включения и доминирования по эффективности сравниваемых технологических множеств).

1. **Область определения и область значений функции F .** Обозначим через $B^A(R_+^n \times R_+^m)$ множество всех подмножеств $G \subset R_+^n \times R_+^m$, содержащих точку $A \in R_+^n \times R_+^m$. Функция F в общем случае зависит от A , определена на $B^A(R_+^n \times R_+^m)$ и принимает значения от 0 до 1.

$$A1. \quad F = F_A : B^A(R_+^n \times R_+^m) \rightarrow (0, 1]. \quad (3)$$

2. **Значение F на одноэлементном множестве.** Поскольку $G \in B^A(R_+^n \times R_+^m)$, единственно возможным для одноэлементного множества G является случай $G = \{A\}$. Задание значения F_A при $G = \{A\}$ определяет единицу измерения и превращает количественную шкалу измерения эффективности в абсолютную. Естественно считать индекс эффективности технологии A по сравнению с ней самой равным единице.

$$A2. \quad F_A(\{A\}) = 1. \quad (4)$$

Обе аксиомы A1 и A2 относятся к конвенциональным, уточняют объект и характер измерений и не нуждаются в специальном обосновании. Условие $0 < F(G) \leq 1$ означает, что в приведенной постановке задачи каждое из анализируемых на эффективность множеств технологий G содержит "тестовую" точку A . Условие (4) отражает рефлексивность отношения нестрогой эффективности.

3. **Поведение функции F на двухэлементных множествах G .** Эта группа включает четыре условия, первые два из которых определяют монотонность индекса эффективности относительно сравнимых технологий, третье и четвертое – локальную однородность индекса, т.е. характер его поведения при пропорциональном (но ограниченном) изменении координат вектора технологии.

Условимся, что обратная к $F_A(\{Y, A\})$ величина при $Y \neq A$ показывает, во сколько раз технология Y более эффективна, чем A (если Y на самом деле эффективнее A , $Y \geq_{A\omega} A$), и что $F_A(\{Y, A\}) = 1$, если отношение $Y \geq_{A\omega} A$ не имеет места.

Первая из данной группы аксиом определяет, во-первых, "направление" измерения эффективности (значение индекса $F_A(\{Y, A\})$) тем меньше, чем более эффективной по сравнению с A является технология Y), во-вторых, непосредственную связь индекса эффективности с отношением эффективности (нестрогая монотонность индекса относительно отношения $\geq_{A\omega}$).

$$A3. F_A(\{Y, A\}) \leq F_A(\{Z, A\}), Y \geq_{A\omega} Z \in G. \quad (5)$$

Первое условие естественно согласуется с $A1$ и $A2$, второе является минимальным функциональным требованием к индексу эффективности.

Более сильные функциональные требования предъявляются к индексу при отражении результатов сравнения строго более эффективной технологии с базовой. Индекс сравнительной эффективности должен обладать достаточной "разрешающей способностью", чтобы однозначно отличать более эффективные, чем базовая, технологии.

$$A4. F_A(\{Y, A\}) < 1 \Leftrightarrow Y >_{A\omega} A. \quad (6)$$

В принципе выполнение данного требования не является абсолютно необходимым, однако при отказе от него "неразличимыми", с точки зрения индекса эффективности, могут стать слишком значительные части анализируемого множества технологий. Индекс технологической эффективности предполагается, таким образом, строго монотонным относительно строгой эффективности некоторой технологии по сравнению с базовой.

Аксиомы $A3$ и $A4$ характеризуют поведение функции F , касающееся бинарного отношения эффективности $>_{A\omega}$ на множестве сравниваемых технологий G . Поскольку эти технологии описываются парами векторов, на их множестве существует еще одно естественное для векторного пространства бинарное отношение, ассоциированное с операцией умножения вектора на число. Необходимо определить свойства понятия эффективности и, соответственно, индекса эффективности в связи с этим отношением.

Сначала заметим, что если $y, y' \in R_+^n$ – векторы затрат, причем $y' = \alpha y$, где $\alpha < 1$, то естественно считать, что y' "лучше" (в смысле эффективности), чем y в α^{-1} раз. Подобным образом, если $v, v' \in R_+^m$ – векторы выпусков, причем $v' = v/\alpha$, где $\alpha < 1$, то v' также "лучше" v в α^{-1} раз. Основным смыслом следующей аксиомы $A5$ состоит в том, что в этой ситуации технология $Y' = (y', v')$, составленная из векторов затрат y' и результатов v' , также должна быть "лучше" (или, в нашей терминологии, эффективней) технологии $Y = (y, v)$ в $\alpha^{-1} > 1$ раз. Это означает, что учет эффективности ведется, во-первых, по каждой координате технологического вектора и, во-вторых, что эквивпропорциональное "улучшение" всех координат в $\alpha^{-1} > 1$ раз приводит к "улучшению" всей технологии в такое же число раз. Отказ от этого предположения был бы правомерен в случае заведомой неравноправности координат технологического вектора или нелинейности зависимости результатов применения технологии от ее масштаба (интенсивности). Априорных оснований для таких гипотез нет.

Наконец, естественно предположить, что если технология Y эффективнее базовой в $\beta > 1$ раз, а технология αY эффективнее Y в $\alpha^{-1} > 1$ раз, то αY эффективнее A в $\alpha^{-1}\beta > 1$ раз (через αY при $\alpha > 0$ здесь и далее обозначается технологический вектор $\alpha Y = (\alpha y, \alpha^{-1}v)$). Таким образом, для эквивпропорциональных технологий, более эффективных, чем базовая, предполагается транзитивность измерения относительно неравенств $\alpha Y >_{A\omega} Y >_{A\omega} A$, если $\alpha < 1$. Приведенное условие записывается в виде

$$F_A(\{\alpha Y, A\}) = \alpha F_A(\{Y, A\}), \alpha < 1, Y >_{A\omega} A. \quad (7)$$

В силу $A4$ условие $Y >_{A\omega} A$ эквивалентно тому, что $F_A(\{Y, A\}) < 1$. Нетрудно показать также, что при выполнении $A4$ условие (7) эквивалентно

$$F_A(\{\alpha Y, A\}) = \alpha F_A(\{Y, A\}), F_A(\{Y, A\}) < 1, F_A(\{\alpha Y, A\}) < 1. \quad (8)$$

Иными словами, индекс эффективности данной технологии по сравнению с базовой

считается линейно однородной функцией от коэффициента масштаба применения данной технологии, однако из-за ограниченности самого индекса (аксиома A1) это свойство имеет место лишь когда исходная и масштабированная технологии строго эффективнее базовой.

Дополнительно предполагаем, что при фиксированных Y и A зависимость $F(\{\alpha Y, A\})$ от α непрерывна. Альтернатива возможна, если есть основания особо выделять скачкообразные изменения эффективности технологии по мере ее непрерывного эквивалентного изменения.

Таким образом, сформулируем следующую аксиому.

A5. $F_A(\{\alpha Y, A\})$ – непрерывная функция от $\alpha > 0$ при любом $Y \in R_+^n \times R_+^m$, причем $F_A(\{\alpha Y, A\}) = \alpha F_A(\{Y, A\})$, $F_A(\{Y, A\}) < 1$, $F_A(\{\alpha Y, A\}) < 1$. (9)

4. **Отражение с помощью функции F структур множества $B^A(R_+^n \times R_+^m)$.** На множестве подмножеств $G \subset R_+^n \times R_+^m$ существуют два основных типа структур: теоретико-множественные операции и отношения, индуцированные отношением эффективности на базовом множестве $R_+^n \times R_+^m$. Основным представителем первого типа структур может служить отношение включения. Разумно считать, что чем шире множество, тем шире, вообще говоря, возможности поиска в нем эффективных технологий.

A6. $F_A(G') \leq F_A(G)$, $G \subseteq G' \subset R_+^n \times R_+^m$. (10)

Для описания поведения функции F относительно структур второго типа введем бинарное отношение *доминирования* на множестве $B^A(R_+^n \times R_+^m)$. Скажем, что множество G' *доминирует* множество G (в смысле эффективности), если существует такой эпиморфизм $\varphi: G \rightarrow G'$, что $F(\{\varphi(Y), A\}) \leq F(\{Y, A\})$ для любого $Y \in G$ (обозначение: $G' \therefore G$).

Условие $G' \therefore G$ означает, что каждый элемент $Y \in G$ доминируется каким-либо элементом из G' в смысле лучшего значения индекса эффективности. Связанное с отношением $G' \therefore G$ требование к индексу эффективности состоит в его монотонности относительно данного отношения.

A7. $F_A(G') \leq F_A(G)$, $G' \therefore G$. (11)

Действительно, если по сравнению с базовой технологией каждый из элементов $Y \in G$ имеет худший индекс эффективности, чем некоторый элемент $Y' \in G'$, то оценка всего множества G не должна быть лучше оценки множества G' . Обратное предположение означало бы, что оценка множества формируется не как функция от оценок его элементов, а в зависимости от взаимоотношений между самими элементами.

В совокупности условия (3)–(11) представляют систему аксиом, характеризующих более или менее естественные свойства индекса эффективности. Ниже будет доказана теорема 1, дающая общий вид такого индекса и его описание через экстремальные ценовые характеристики затрат и результатов производства. Индекс сравнительной эффективности двух технологий, подчиняющийся условиям A1–A5, описан в теореме 2.

Прежде чем переходить к их формулировке, необходимо ввести одну специфическую операцию, предназначенную для соизмерения скалярных показателей, принимающих как положительные, так и отрицательные значения.

Пусть a и b – положительные или отрицательные числовые значения одного показателя, соответствующие разным объектам, условиям или периодам времени (например, размеры полученной за период прибыли или понесенного убытка). Для определенности примем, что желательнее более высокое значение показателя. Для коли-

чественного соизмерения a и b обычно используется либо их отношение (при мультипликативном, индексном подходе), либо разность (при аддитивном). Мы применяем здесь мультипликативные шкалы.

Обычно считается, что a "больше" b и k раз, если $a/b = k$, причем $a \geq b$, если и только если $k \geq 1$. Однако такое измерение допустимо лишь в том случае, когда a и b положительны. Если $a, b < 0$, то для мультипликативного соизмерения следует брать обратное отношение: a "больше" b в k раз, если $b/a = k$; тогда $a \geq b$ в том и только в том случае, когда $k \geq 1$. Если же $a > 0, b < 0$, то, очевидно, при мультипликативном подходе следует считать, что a больше b в бесконечное число раз.

Введем специальную бинарную операцию *направленного деления* на множестве R , результат которой независимо от знаков операндов можно было бы однозначно интерпретировать как "число раз, в которое одно значение показателя лучше другого". Обозначим эту операцию через $a \mid b$ и положим

$$a \mid b = \begin{cases} a/b, & \text{если } a, b > 0, \\ b/a, & \text{если } a, b < 0, \\ \infty, & \text{если } a \geq 0, b < 0 \text{ или } a > 0, b = 0, \\ 0, & \text{если } a \leq 0, b > 0 \text{ или } a < 0, b = 0. \end{cases}$$

Поскольку введенная операция, так же как и обычное деление, является функцией нулевой степени однородности от своих аргументов, измерение соотношения между величинами с помощью этой операции осуществляется в шкале отношений. Дополнительные свойства операции направленного деления приведены в Приложении.

Определенная на множестве чисел операция индуцирует естественным образом операцию на множестве функций. Если $f(x)$ и $g(x)$ — функции, определенные на некотором множестве D и принимающие значения в $R \cup \infty$, то функция $h(x) = f(x) \mid g(x)$ при каждом фиксированном $x \in D$ показывает, во сколько раз $f(x)$ "лучше" $g(x)$. При некоторых условиях возникает также возможность определения функционала, соизмеряющего значение функций f и g на всем множестве D . Положим $f \mid g = \inf_{x \in D} f(x) \mid g(x)$. Если $f(x)$ и $g(x)$ выражают значения некоторого показателя деятельности двух различных объектов при одних и тех же условиях, задаваемых вектором $x \in D$ (например, $f(x)$ и $g(x)$ — расчетная прибыль двух предприятий при формируемых извне ценах x на продукцию и ресурсы), то $f \mid g$ показывает, во сколько раз первый объект будет работать по данному показателю лучше, чем второй при наименее благоприятных внешних условиях.

Перейдем к формулировке основных результатов (теоремы 1, 2), представляющих описание функциональной структуры и свойств индекса эффективности, связанного с данным отношением сравнительной эффективности. Доказательства теорем и некоторые комментарии приводятся в Приложении.

Для формулировки теорем введем следующие обозначения. Пусть $p \in R_+^n$ — вектор цен на ресурсы производства, $q \in R_+^m$ — вектор цен на продукцию, $P = (p, q)$, $Y = (y, v) \in R_+^n \times R_+^m$ — произвольная технология. Обозначим через $\pi(P, Y)$ величину $\pi(P, Y) = \sum q_j v_j - \sum p_i u_i$, выражающую размер прибыли при использовании технологии Y и цен P ; через $\pi(Y)$ — прибыль при использовании технологии Y , рассматриваемую как функция от вектора цен P . Условимся также, что если $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in R^n$, то $y \odot z = (y_1 z_1, \dots, y_n z_n) \in R^n$. Результат направленного деления $\pi(Y) \mid \pi(A)$ выражает минимальную (по всем возможным ценам) величину соотношения прибылей, связанных с реализацией технологий Y и A .

Теорема 1. Пусть заданы: $x \in R_+^n$ – ненулевой вектор затрат; $u \in R_+^m$ – ненулевой вектор выпуска; $A = (x, u)$ – базовая технология; $W = (\eta, \theta)$ – схема технологической зависимости; $>_{A\omega}$ – отношение технологической эффективности, связанное с технологией A и схемой ω ; $G_\omega^A \subset R_+^n \times R_+^m$ – множество сравнимых с A технологий.

Пусть $F: B^A(R_+^n \times R_+^m) \rightarrow [0, 1]$ – некоторая функция. Тогда: 1) следующие утверждения (а), (б) и (в) эквивалентны:

а) функция F удовлетворяет аксиомам A1–A7,

б) функция F представима в виде

$$F(G) = \inf_{(y,v) \in G_\omega^A} \max_{x_i \neq 0} \{y_i / x_i, u_j / v_j\}, \quad G \in B^A(R_+^n \times R_+^m), \quad (12)$$

$$\text{в) } F(G) = \left(\sup_{Y \in G_\omega^A} \pi(Y) / \pi(A) \right)^{-1} \quad \forall \quad G \in B^A(R_+^n \times R_+^m), \quad (13)$$

2) на множестве тех подмножеств $G \in B^A(R_+^n \times R_+^m)$, которые вместе с каждой технологией $Y = (y, v) \in G$ содержат все технологии $Y' = (y', v') \parallel_\omega Y$, для которых $y' \geq y, v' \leq v$, функция F , удовлетворяющая условиям а)–в), совпадает с гиперболическим индексом эффективности Фаррелла

$$F(G) = F_g(x, u) = \inf\{\lambda \geq 0: (\lambda x, \lambda^{-1}u) \in G\}. \quad (14)$$

Первая часть теоремы устанавливает однозначное соответствие между видом индекса технологической эффективности (12) и системой свойств A1–A7, а также позволяет интерпретировать обратную к нему величину как наибольшее значение направленного отношения прибылей от реализации всех сравниваемых технологий к прибыли, связанной с базовой технологией (при условии, что это отношение рассчитывается при наихудших для производителя ценах). Чем ниже индекс технологической эффективности множества G (и соответственно выше степень эффективности технологий из G), тем больше прибыль, которую можно получить, используя технологии из множества G .

Если координаты затратных (в более общем случае – нежелательных) компонент технологических векторов $Y \in G$ записывать с помощью отрицательных величин, а сами векторы Y представлять как функции $Y(i)$ на множестве номеров координат $1 \leq i \leq n + m$, то, используя введенную операцию направленного деления $\mid$, формулу (12) для индекса технологической эффективности, удовлетворяющего аксиомам A1–A7, можно записать в виде

$$F(G) = \left(\sup_{(y,v) \in G_\omega^A} Y \mid A \right)^{-1}, \quad G \in B^A(R_+^n \times R_+^m).$$

Вторая часть теоремы 1 устанавливает совпадение обобщенного индекса технологической эффективности с гиперболическим индексом Фаррелла для множеств, содержащих вместе с каждой технологией и все "худшие" в смысле покоординатного сравнения затрат и результатов технологии (множества с таким свойством являются типичным объектом в теории эффективности; в [1, 3] такие множества называются "строго доступными" – strong disposable).

Характеризация предложенного индекса технологической эффективности для сравнения двух технологий Y и A (что соответствует одно- или двухэлементному множеству G) дается следующим утверждением.

Теорема 2. 1) В обозначениях теоремы 1 условия а), б) и в) эквивалентны:

а) функция $F(\{Y, A\})$ удовлетворяет аксиомам A1–A5,

б) для любого $Y \parallel_{\omega} A$

$$F(\{Y, A\}) = \min \left\{ \max_{\substack{x_i \neq 0 \\ u_j \neq 0}} \{y_i / x_i, u_j / v_j\}, 1 \right\}, \quad (15)$$

в) для любого $Y \parallel_{\omega} A$

$$F(\{Y, A\}) = \left(\max \{ \pi(Y) \mid \pi(A), 1 \} \right)^{-1}, \quad (16)$$

2) если $Y >_{A\omega} A$, то

$$1 / F(\{Y, A\}) = \min_{\substack{x_i \neq 0 \\ u_j \neq 0}} \{x_i / y_i, v_j / u_j\} = \pi(Y) \mid \pi(A). \quad (17)$$

Эквивалентность утверждений б) и в) теорем 1 и 2 можно интерпретировать как равенство функций технологической и "экономической" эффективности при наихудших ценах. При нестабильных и непредсказуемых ценах деятельность экономического субъекта может быть направлена не на максимизацию прибыли, а на максимизацию индекса технологической эффективности.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно полученным результатам индекс сравнительной эффективности, подчиняющийся более или менее естественным аксиомам, необходимо обретает форму функции с нулевой эластичностью взаимозаменяемости факторов, причем в качестве последних выступают отношения одноименных координат сравниваемых технологий. Основную "ответственность" за невзаимозаменяемость факторов внутри затратной и результативной групп несут определение отношения эффективности как по координатного и аксиома A4, а между факторами из разных групп – A5.

Полученный результат допускает также следующую интерпретацию. Систему аксиом A1–A5 (вместе с условием $Y \geq_{A\omega} A$) можно рассматривать как альтернативное обоснование функции Леонтьева (линейно однородной вогнутой функции с нулевой эластичностью замены факторов) от отношений координат векторов Y и A и обратных к ним (для затратных компонент) величин. Представление этой функции в виде

$$1 / F(\{Y, A\}) = \inf_{P \geq 0} (\pi(P, Y) \mid \pi(P, A)) \quad (18)$$

аналогично представлению значений ПФ в виде нижней границы по множеству допустимых цен отношения себестоимости к нормативу удельных затрат. Такое представление для линейно однородных вогнутых ПФ может быть получено из теории двойственности между ПФ и функциями минимальных удельных затрат [8]. В случае $n = 0$ равенство (18) является непосредственным следствием теоремы двойственности между ПФ и функциями удельных затрат на единицу продукции. Верно и следующее обращение этого утверждения: если индекс эффективности технологии Y задан как функция Леонтьева от отношения координат двух сравниваемых векторов, а прибыль от реализации технологии Y может быть выражена как линейная однородная функция от цен, объемов затрат ресурсов и результатов производства, то в таком же виде можно представить и прибыль, связанную с реализацией технологии A . В общем случае вопрос о возможности интерпретации того или иного индекса сравнительной эффективности двух технологий как нижней грани направленного отношения соответствующих прибылей по некоторому ценовому множеству, по-видимому, открыт.

Аксиоматическое построение и обоснование индексов сравнительной экономической эффективности можно рассматривать как попытку моделирования функций эксперта, дающего сравнительную количественную оценку двум или более альтернативам из

некоторого множества подлежащих сравнению. В известном методе анализа иерархий [13] в качестве исходных данных используются полученные экспертным путем коэффициенты a_{ij} , показывающие, во сколько раз альтернатива i лучше j . Если каждая из альтернатив представлена многомерным вектором затрат и результатов, то получение экспертного заключения может стать проблематичным. В таких случаях целесообразно использование аксиоматических индексов эффективности, подобных изучаемым в данной работе.

В определенном смысле индекс эффективности (12) и соответственно индекс Фаррелла являются самыми простыми из всех допустимых, так как имеют наиболее простую функциональную структуру. В конкретных ситуациях измерения эффективности (особенно при небольшом количестве учитываемых показателей затрат и результатов), привлекая для моделирования дополнительную неколичественную информацию о целях измерения и особенностях функционирования объектов измерения, можно было бы строить более сложные индексы с более богатой структурой замещения или характера влияния различных компонент технологии на результаты измерения.

"Аксиоматизация" известных в теории или используемых на практике моделей и алгоритмов расчета различных экономических показателей и индексов должна стать, по нашему мнению, важной методологической задачей экономико-математического направления. Создание альтернативных и допускающих экономическую интерпретацию систем аксиом, однозначно характеризующих отдельные элементы экономико-математического инструментария, необходимо для исследования связей как между самими моделями, так и между ними и объектами моделирования, определения наиболее адекватных для конкретной ситуации методов и моделей экономического анализа.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательства теорем 1 и 2 базируются на трех вспомогательных утверждениях, относящихся к функциям, являющимся однородными на некоторой части области определения.

Назовем функцию $\varphi(x)$ *ограниченно однородной степени* p , если $\varphi(x)$ представима в виде

$$\varphi(x) = \min\{\psi(x), c\}, \quad (19)$$

где $\psi(x)$ – однородная функция степени однородности p ; c – константа. Очевидно, ограничено однородная функция является однородной тогда и только тогда, когда $c = \infty$. Описание ограничено однородных функций первой степени дается следующим утверждением.

Лемма 1. Пусть $\varphi(x)$ – неотрицательная функция, определенная на R_+^n . Следующие утверждения эквивалентны:

(а) существует такая константа $c > 0$, что

$$a1: \varphi(x) \leq c \quad \forall x \in R_+^n, \quad (20)$$

a2: для любого $x \in R_+^n$ существует такое $\alpha_x > 0$, что

$$\varphi(\alpha_x x) = c, \quad (21)$$

$$\varphi(\alpha x) = (\alpha/\beta)\varphi(\beta x), \quad 0 < \alpha \leq \alpha_x, \quad 0 < \beta \leq \alpha_x, \quad (22)$$

$$a3: \text{при любых } \alpha' \geq \alpha \in R_+ \text{ и любом } x \in R_+^n \varphi(\alpha' x) \geq \varphi(\alpha x); \quad (23)$$

(б) $\varphi(x)$ – ограничено однородная функция 1-й степени.

Доказательство леммы 1.

(а) $\rightarrow$ (б). Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям a1–a3 леммы 1 при некотором $c > 0$.

Положим

$$\varphi(x) = c \inf\{\beta > 0: \varphi(x/\beta) < c\}, \quad x \in R_+^n. \quad (24)$$

Множество $\{\beta > 0: \varphi(x/\beta) < c\}$ ограничено снизу и непусто. Действительно, положив в (37) $\beta = \alpha_x$, получаем, что $\varphi(\alpha_x) = (\alpha/\alpha_x)\varphi(\alpha_x) = \alpha(c/\alpha_x)$ при $0 < \alpha \leq \alpha_x$, $\varphi(\alpha_x) = c$ при $\alpha \geq \alpha_x$ последнее вытекает из (21) и (23). Следовательно, $\{\beta > 0: \varphi(x/\beta) < c\} = \{1/\alpha_x, \infty\} \neq \emptyset$. Таким образом, $\psi(x)$ – неотрицательная функция, определенная на R_+^n .

Далее, для любого $\alpha > 0$, $x \in R_+^n$ $\psi(\alpha x) = c \inf\{\beta > 0: \varphi((\alpha x)/\beta) < c\} = c \inf\{\alpha\beta' > 0: \varphi(x/\beta') < c\} = \alpha c \inf\{\beta' > 0: \varphi(x/\beta') < c\} = \alpha\psi(x)$.

Осталось показать, что $\varphi(x) = \min\{\psi(x), c\}$. Пусть $\varphi(x) < c$. Тогда $1 < \alpha_x$, $\psi(x) = c \inf\{\beta > 0: \varphi(x/\beta) < c\} = c/\alpha_x < c$ и $\varphi(x) = \min\{\psi(x), c\} = \psi(x)$. Если же $\varphi(x) = c$, то $1 \geq \alpha_x$ и $\psi(x) = c/\alpha_x \geq c$, откуда $c = \varphi(x) = \min\{\psi(x), c\}$.

(б) $\rightarrow$ (а). Пусть $\varphi(x) = \min\{\psi(x), c\}$, где ψ – линейно однородная на R_+^n неотрицательная функция; $c > 0$ – константа. Выполнение условий а1 и а3 очевидно. Проверим а2. Положим $\alpha_x = c/\psi(x)$. Тогда $\varphi(\alpha_x x) = \min\{\psi(\alpha_x x), c\} = \min\{\alpha_x \psi(x), c\} = c$. Если $\alpha, \beta < \alpha_x$, то $\psi(\alpha x) = \alpha_0 \psi(x) < \alpha_x \psi(x) = c$, откуда $\varphi(\alpha x) = \min\{\psi(\alpha x), c\} = \psi(\alpha x) = \alpha \psi(x)$, $\varphi(\beta x) = \min\{\psi(\beta x), c\} = \psi(\beta x) = \beta \psi(x)$ и $\varphi(\alpha x) = (\alpha/\beta)\varphi(\beta x)$.

Доказательство леммы 1 закончено.

Замечание 1. Условие а2 в лемме 1 можно заменить требованием непрерывности зависимости функции $\varphi(\alpha x)$ от коэффициента масштаба α и условием линейной однородности φ на множестве $\{x: \varphi(x) < c\}$

$$\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x), \quad \varphi(\alpha x) < c, \quad \varphi(x) < c. \quad (25)$$

Действительно, если условия а1–а3 выполнены, то

$$\varphi(\alpha x) = \begin{cases} \alpha(c/\alpha_x) & \text{при } 0 < \alpha \leq \alpha_x, \\ c & \text{при } \alpha \geq \alpha_x \end{cases}$$

– непрерывная функция по α при фиксированном x (линейная при $\alpha \leq \alpha_x$ и постоянная при $\alpha > \alpha_x$). Далее, если $\varphi(\alpha x) < c$, $\varphi(x) < c$, то $\varphi(\alpha x) = \alpha(c/\alpha_x)$, $\varphi(x) = c/\alpha$, $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$.

Обратно, предположим, что $\varphi(\alpha)$ при любом фиксированном x – непрерывная функция от α , $\varphi(0) = 0$. Пусть $\alpha_x = \inf\{\alpha > 0: \varphi(\alpha x) = c\}$. Если множество $\{\alpha > 0: \varphi(\alpha x) = c\}$ пусто, то $\varphi(\alpha x) < c$, $\varphi(x) < c$ и ввиду условия (39) $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$. При достаточно большом α величина $\alpha \varphi(x)$ становится больше любого заданного числа. Очевидно, $\varphi(\alpha_x x) = c$ ввиду непрерывности. Далее, если $\alpha, \beta < \alpha_x$, то $\varphi(\alpha x) < c$, $\varphi(\beta x) < c$ и, учитывая (39), при $x' = \beta x$ $\varphi(\alpha x) = \varphi((\alpha/\beta)x') = (\alpha/\beta)\varphi(x') = (\alpha/\beta)\varphi(\beta x)$. Таким образом, равенство (37) выполнено при $\alpha, \beta < \alpha_x$. В силу непрерывности оно выполняется и при $\alpha, \beta \rightarrow \alpha_x$.

Замечание 2. Условия а1–а3 леммы 1 эквивалентны в совокупности также условию существования такого $c > 0$, что при любом $x \in R_+^n$ для некоторого $\alpha_x > 0$ имеет место равенство

$$\varphi(\alpha x) = \begin{cases} \alpha(c/\alpha_x), & 0 < \alpha \leq \alpha_x, \\ c, & \alpha \geq \alpha_x. \end{cases}$$

Функция $\alpha(x) = \alpha_x$ при этом следующим образом выражается через $\varphi(x)$: $\alpha_x = 1/\inf\{\beta > 0 \mid \varphi(x/\beta) < c\} = \sup\{\alpha > 0 \mid \varphi(\alpha x) < c\}$. В свою очередь, $\varphi(x) = c \min\{1, 1/\alpha_x\}$.

Замечание 3. Условия а1–а3 независимы, и при исключении любого из них эквивалентность (а) и (б) теряется.

Лемма 2. Пусть $\varphi(x)$ – линейно однородная неотрицательная функция на R_+^n . Следующие утверждения эквивалентны:

(а) функция φ удовлетворяет условию

$$\varphi(x) < 1 \Leftrightarrow x_1 < 1, \dots, x_n < 1, \quad (26)$$

(б) $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ при любых $\{x_1, \dots, x_n\} \in R_+^n$.

Доказательство леммы 2.

(а) $\rightarrow$ (б). Фиксируем $0 \neq x \in R_+^n$. Пусть $x_i \neq 0, 1 \leq i \leq n$. Введем новые переменные

$$z_k = \begin{cases} x_k / x_i, & \text{если } 1 \leq k \leq n, \quad k \neq i, \\ 1 / x_i, & \text{если } k = i. \end{cases}$$

Покажем, что $\varphi(z_1, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_n) = \max\{z_1, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_n\}$. Для этого достаточно убедиться, что множества

$$\{z_i: z_i > \varphi(z_1, \dots, 1, \dots, z_n)\} \text{ и } \{z_i: z_i > \max(z_1, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_n)\}$$

совпадают. Но

$$\begin{aligned} \{z_i: z_i > \varphi(z_1, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_n)\} &= \left\{z_i: \varphi\left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{1}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right) < 1\right\} = \\ &= \Delta_i \left\{(z_1, \dots, z_n): \varphi\left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{1}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right) < 1\right\} = \\ &= \Delta_i \left\{(z_1, \dots, z_n): \frac{z_1}{z_i} < 1, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i} < 1, \frac{1}{z_i} < 1, \frac{z_{i+1}}{z_i} < 1, \dots, \frac{z_n}{z_i} < 1\right\} = \\ &= \Delta_i \{(z_1, \dots, z_n): z_1 < z_i, \dots, z_{i-1} < z_i, z_i > 1, z_{i+1} < z_i, \dots, z_n < z_i\} = \\ &= \Delta_i \{(z_1, \dots, z_n): z_i > \max\{z_1, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_n\}\} = \\ &= \{z_i: z_i > \max\{z_1, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_n\}\} \end{aligned}$$

по (26) (здесь Δ_i – оператор проектирования на ось x_i).

(б) $\rightarrow$ (а) очевидно.

Лемма 3. Пусть $\varphi(x)$ – непостоянная неотрицательная функция на R_n^+ . Следующие утверждения эквивалентны:

(а) функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(x) \leq 1 \quad \forall x \in R_+^n, \quad (27)$$

для любого $x \in R_+^n$ существует такое $\alpha_x > 0$, что

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_x x) &= 1, \quad \varphi(\alpha x) = (\alpha / \beta) \varphi(\beta x), \quad 0 < \alpha \leq \alpha_x, \\ 0 < \beta &\leq \alpha_x, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\varphi(x') \geq \varphi(x), \quad x' \geq x \in R_+^n, \quad (29)$$

$$\varphi(x) < 1 \Leftrightarrow x_1 < 1, \dots, x_n < 1, \quad (30)$$

(б) функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(x) \leq 1 \quad \forall x \in R_+^n;$$

$\varphi(\alpha x)$ – непрерывная функция по α при любом $x \in R_+^n$;

$$\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x);$$

$$\varphi(x') \geq \varphi(x), \text{ если } x' \geq x \in R_+^n;$$

$$\varphi(x) < 1 \Leftrightarrow x_1 < 1, \dots, x_n < 1;$$

$$(в) \varphi(x) = \min\{\max\{x_1, \dots, x_n\}, 1\} \text{ для любого } x \in R_+^n.$$

Доказательство леммы 3. Эквивалентность условий а) и б) вытекает из замечания 1 после леммы 1. Докажем эквивалентность условий (а) и (в).

(а) $\rightarrow$ (в). По доказанному в лемме 1, на R_+^n существует такая линейно однородная функция $\psi(x)$, что $\varphi(x) = \min(\psi(x), 1)$ при любом $x \in R_+^n$, причем $D = \{x: \varphi(x) < 1\} = \{x: \psi(x) < 1\} \subset \{x: \varphi(x) = \psi(x)\}$. Отсюда $\{x \in R_+^n: x_1 < 1, \dots, x_n < 1\} = \{x: \psi(x) < 1\}$. Следовательно, функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию а) леммы 2 и имеет, таким образом, вид $\psi(x_1, \dots, x_n) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$.

(в) $\Rightarrow$ (а). Проверяется непосредственно.

Доказательство теорем начнем с теоремы 2.

Доказательство теоремы 2.

(а) $\Rightarrow$ (б). Рассмотрим сначала поведение функции $F(G)$, удовлетворяющей условию (а), на множествах $G = \{Y, A\}$ и покажем, что равенство (15) выполнено.

Если $Y = A$, то $G = \{A\}$, $G_\omega^A = G = \{A\}$, и правая часть (15) равна

$$\max_{x_i \neq 0} \{x_i / x_i, u_j / u_j\} = 1,$$

$$u_j \neq 0$$

поскольку $x \neq 0, u \neq 0$ по условию теоремы. Согласно аксиоме A2 функция F в этом случае также равна единице.

Предположим теперь, что $G = \{Y, A\}$ и $Y \neq A$. Для каждого из двухэлементных множеств $G \in B^A(R_+^n \times R_+^m)$ возможны два варианта: $G \neq G_\omega^A$ и $G = G_\omega^A$. В первом случае $Y \parallel_\omega A$ и $G_\omega^A = \{A\}$. Тогда правая часть (29) равна единице и $F(\{Y, A\}) = 1$, поскольку в противном случае, согласно (24), $Y >_{A, \omega} A$. Таким образом, для множеств G первого типа равенство доказано. Пусть $Y \in G_\omega^A$. Тогда $Y = (y, v)$ представим в виде

$$Y = A_{\lambda, \mu} = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n, \mu_1^{-1} u_1, \dots, \mu_m^{-1} u_m), \quad (31)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m > 0$, и

$$\lambda_i = \lambda_{i'}, (i, i') \in \eta, \quad (32)$$

$$\mu_j = \mu_{j'}, (j, j') \in \theta.$$

Положим $\varphi(\lambda, \mu) = \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m) = F(\{A_{\lambda, \mu}, A\})$. Ввиду (31), (32) реально функция φ зависит, вообще говоря, от меньшего, чем $n + m$, числа переменных. Выберем в каждом из классов эквивалентности $N_1, \dots, N_t$, обусловленных отношением η , по одному представителю, аналогичную выборку составим из представителей классов $M_1, \dots, M_s$, связанных с отношением θ , и обозначим через $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ вектор, составленный из представителей равных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$, за исключением тех, которые отвечают нулевым группам координат вектора $A = (x, u)$. Пусть $\xi_l = \lambda_i$, где $i \in N_l, l = 1, \dots, t, \xi_l = \mu_j$, где $j \in M_{l-t}, l = t + 1, \dots, t + s, r = t + s$. Координаты вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ являются представителями классов координат вектора $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m)$, так что число различных величин среди $\xi_1, \dots, \xi_r$ не превосходит

числа различных величин среди $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$. Соответствие между векторами $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ и $(\lambda, \mu) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m)$ взаимнооднозначно. Обозначим его через γ : $\gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m) = (\xi_1, \dots, \xi_r)$.

Пусть $\rho(\xi) = \varphi(\lambda, \mu) = \varphi(\gamma^{-1}(\xi)) = F(\{A_{\gamma^{-1}(\xi)}, A\})$.

Покажем, что функция $\rho(\xi)$ удовлетворяет условиям (27)–(30) леммы 3. Действительно, при любом $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r) \in R_+^r$ $\rho(x) = F(\{A_{\lambda_\mu}, A\}) < 1$ по определению функции F . Условие линейной однородности функции ρ (48) вытекает из аксиомы A5. Проверим условие (29). Если $\xi' \geq \xi \in R_+^r$ (в смысле покоординатного сравнения), то $(\lambda', \mu') = \gamma^{-1}(\xi') \geq \gamma^{-1}(\xi) = (\lambda, \mu)$, поскольку отображение γ^{-1} не изменяет числовых значений координат, а лишь дублирует их. Соответствующие технологии $A_{\lambda'\mu'}$ и $A_{\lambda\mu}$ порождают двухэлементные множества $G' = \{A_{\lambda'\mu'}, A\}$ и $G = \{A_{\lambda\mu}, A\}$, для которых $A_{\lambda\mu} \geq_{A\omega} A_{\lambda'\mu'}$, так как $\lambda_i x_i \leq \lambda'_i x_i$, $i = 1, \dots, n$, $\mu_j^{-1} u_j \geq \mu_j'^{-1} u_j$, $j = 1, \dots, m$.

Ввиду аксиомы A6 $F(\{A_{\lambda\mu}, A\}) \leq F(\{A_{\lambda'\mu'}, A\})$, откуда $\rho(\xi) = \varphi(\lambda, \mu) = F(\{A_{\lambda\mu}, A\}) \leq F(\{A_{\lambda'\mu'}, A\}) = \rho(\xi')$.

Проверим (30). В случае $Y = A_{\lambda\mu}$ условие $Y >_{A\omega} A$ означает, что $\lambda_i x_i < x_i$, если $x_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ и $\mu_j u_j > u_j$, если $u_j \neq 0$, $j = 1, \dots, m$. Отсюда $\xi_i < 1$, $i = 1, \dots, r$. Следовательно, согласно (24), $\{\xi: \xi_i < 1\} = \{\xi: \rho(\xi) < 1\}$. Теперь ввиду леммы 3

$$F(\{A_{\lambda\mu}, A\}) = \varphi(\lambda, \mu) = \rho(\xi) = \min\{\max\{\xi_1, \dots, \xi_r\}, 1\} =$$

$$= \min\left\{\max_{(i,j: x_i \neq 0, u_j \neq 0)} \{\lambda_i, \mu_j\}, 1\right\} = \min_{(y,v) \in G_\omega^A} \left\{\max_{\substack{x_i \neq 0 \\ u_j \neq 0}} \{y_i / x_i, u_j / v_j\}, 1\right\}. \quad (33)$$

(б) $\Rightarrow$ (а). Проверим выполнение аксиом A1–A5. Условия A1, A2 проверяются непосредственно. Если $Y = (y, v) >_{A\omega} (z, w) = Z$, то $y_i \leq z_i$, $v_j \geq w_j$ по определению отношения нестрогой эффективности, откуда $y_i / x_i \leq z_i / x_i$, $u_j / v_j \leq u_j / w_j$ (если $x_i \neq 0$, $u_j \neq 0$; ω -параллельность Y, Z и A гарантирует, что в этом случае $y_i \neq 0$, $z_i \neq 0$, $u_j \neq 0$, $w_j \neq 0$). Так как $Y, Z \in G_\omega^A$, то

$$F(\{Y, A\}) = \min\{\max\{y_i / x_i, u_j / v_j\}, 1\} \leq \min\{\max\{z_i / x_i, u_j / w_j\}, 1\} = F(\{Z, A\}).$$

Аксиома A3 выполнена.

Проверим условие A4. Пусть $G = \{Y, A\}$ и $F(\{Y, A\}) < 1$. Если $Y = A$ или Y и A не являются ω -параллельными, то $G_\omega^A = \{A\}$ и $F(G) = 1$. Следовательно, $Y \parallel_\omega A$, $Y \neq A$

$$F(\{Y, A\}) = \max_{\substack{x_i \neq 0 \\ u_j \neq 0}} \{y_i / x_i, u_j / v_j\} < 1.$$

Отсюда для любого $i = 1, \dots, n$ либо $x_i = y_i = 0$, либо $y_i < x_i$ и для любого $j = 1, \dots, m$ либо $u_j = v_j = 0$, либо $v_j > u_j$. Это означает, что $Y >_{A\omega} A$. Обратно, если $Y >_{A\omega} A$, то $Y \parallel_\omega A$, $Y \neq A$

$$F(\{Y, A\}) = \min\left\{\max_{\substack{x_i \neq 0 \\ u_j \neq 0}} \{y_i / x_i, u_j / v_j\}, 1\right\} < 1.$$

Проверим теперь условие А5. Пусть $Y = (y, v) \in G_\omega^A$. Если $Y = A$, то $F(\{Y, A\}) = 1$. Положим $\alpha_Y = 1$. Тогда при $\alpha, \beta \leq 1$ $F(\{\alpha Y, A\}) = F(\{\alpha A, A\}) = \alpha$, $F(\{\beta Y, A\}) = \beta$. Легко видеть, что условие А5 выполняется. Если же $Y \in G_\omega^A$ и $Y \neq A$, то положим $\alpha_Y = 1 / \max_{\substack{x_i \neq 0 \\ u_j \neq 0}} \{y_i / x_i, u_j / v_j\}$.

Тогда

$$F(\{\alpha_Y Y, A\}) = 1 \text{ и при } \alpha \leq \alpha_Y$$

$$F(\{\alpha_Y Y, A\}) = \min \left\{ \max_{\substack{x_i \neq 0 \\ u_j \neq 0}} \{\alpha y_i / x_i, \alpha u_j / v_j\}, 1 \right\} = \alpha \max_{\substack{x_i \neq 0 \\ u_j \neq 0}} \left\{ y_i / x_i, u_j / v_j \right\}.$$

Отсюда следует выполнение А5. Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Докажем ее первую часть.

(а) $\Rightarrow$ (б). Пусть G – произвольное подмножество $R_+^n \times R_+^m$, содержащее точку A . Покажем, что

$$F(G) = \inf_{Y \in G_\omega^A} F(\{Y, A\}).$$

Поскольку $(Y, A) \subset G_\omega^A \subset G$, из А6 вытекает, что $F(G) \leq F(\{Y, A\})$ при любом $Y \in G$. Следовательно

$$F(G) \leq \inf_{Y \in G_\omega^A} F(\{Y, A\}). \quad (34)$$

Покажем, что имеет место и обратное неравенство

$$F(G) \geq \inf_{Y \in G_\omega^A} F(\{Y, A\}). \quad (35)$$

Оно очевидно, если правая часть (35) равна нулю. Если же $\inf_{Y \in G_\omega^A} F(\{Y, A\}) = \beta > 0$, то

положим $z_{\beta\beta} = (\beta x, \beta^{-1} u)$. Очевидно, этот вектор ω -параллелен вектору A при любом ω , и, следовательно, если рассмотреть множество $G' = \{z_{\beta\beta}, A\}$, то легко заметить, что $G' = G_\omega^A$, причем $G' \subset G$. Действительно, определим эпиморфизм $v: G \rightarrow G'$ так: $\varphi(Y) = z_{\beta\beta}$ при $Y \neq A$ и $\varphi(Y) = A$ при $Y = A$. Тогда $F(G') = F(\{z_{\beta\beta}, A\}) = F(\{\varphi(Y), A\}) = \beta \leq F(\{Y, A\}) \forall Y \in G_\omega^A$. Следовательно, $G' \subset G$. Теперь ввиду А7 $F(G') = \inf_{Y \in G_\omega^A} F(\{Y, A\}) \leq F(G)$. Это означает, что

$$F(G) = \inf_{Y \in G_\omega^A} F(\{Y, A\}) = \inf_{(y, v) \in G_\omega^A} \left\{ \max_{\substack{x_i \neq 0 \\ u_j \neq 0}} \{y_i / x_i, u_j / v_j\} \right\}.$$

Вывод (а) $\Rightarrow$ (б) завершен.

(б) $\Rightarrow$ (а). Из доказанного вытекает, что

$$F(G) = \inf_{(y, v) \in G_\omega^A} \left\{ \max_{\substack{x_i \neq 0 \\ u_j \neq 0}} \{y_i / x_i, u_j / v_j\} \right\} = \inf_{(y, v) \in G_\omega^A} F(\{Y, A\})$$

и в проверке нуждаются только аксиомы А6 и А7.

Выполнение А6 очевидно, если учесть, что при $G' \supset G$ имеет место цепочка $G'_\omega^A = G' \cap \Pi_\omega^A \supset G \cap \Pi_\omega = G_\omega^A$. Если $G' \supset G$ и $\psi: G \rightarrow G'$ – соответствующий эпиморфизм, то

$$\begin{aligned} F(G') &= \inf_{(z,w) \in G_\omega'^A} F(\{Z, A\}) = \inf_{Y \in G_\omega^A} F(\{\psi(Y), A\}) \leq \\ &\leq \inf_{Y \in G_\omega^A} F(\{Y, A\}) = F(G), \end{aligned}$$

поскольку $\psi(Y) \geq_{A_\omega} Y$ по определению ψ , а $F(\{Y, A\})$ – монотонная по отношению к сравнительной эффективности функция.

(б) $\Rightarrow$ (в). Достаточно доказать, что для любого $G \in B^A(R_+^n \times R_+^m)$

$$\sup_{Y \in G_\omega^A} \pi(Y) | \pi(A) = 1 / \inf_{(y,v) \in G_\omega^A} \max_{x_i, u_j \neq 0} \{y_i / x_i, u_j / v_j\}. \quad (36)$$

Зафиксируем произвольное множество $G \in B^A(R_+^n \times R_+^m)$ и вычислим левую часть (36). Заметим, что левая и правая части (36) не изменяются, если G_ω^A заменить на его проекцию на подпространство $R_+^{n'} \times R_+^{m'}$, порожденное теми базисными векторами в R_+^n и R_+^m , для которых соответствующие координаты векторов x и u отличны от нуля (расположение нулевых координат у всех векторов $Y \in G_\omega^A$ одинаково). Исключим поэтому соответствующие нулям вектора A координаты и будем с самого начала считать, что $x_i \neq 0, u_j \neq 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. Очевидно, каждый вектор $Y \in G_\omega^A$ однозначно записывается в виде $Y = A_{\lambda\mu}$, где

$$\lambda \in R_+^n, \mu^{-1} \in R_+^m, A_{\lambda\mu} = (\lambda \odot x, \mu^{-1} \odot u)$$

(через $\lambda \odot x$ будем обозначать вектор, образованный из произведений одноименных координат векторов λ и x). Разобьем множество G_ω^A на два подмножества: $G^1 = \{Y \in G_\omega^A: Y = Y_{\lambda\mu}, \text{ где } \lambda_i \mu_j \leq 1 \text{ при любых } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ и $G^2 = G_\omega^A \setminus G^1 = \{Y \in G_\omega^A: Y = Y_{\lambda\mu}, \text{ где } \lambda_i \mu_j > 1 \text{ при некоторых } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$.

Очевидно,

$$\begin{aligned} \sup_{G_\omega^A} \pi(Y) | \pi(A) &= \sup_{G_\omega^A} \inf_{P \geq 0} \pi(P, Y) | \pi(P, A) = \\ &= \max \left(\sup_{G^1} \inf_{P \geq 0} \pi(P, Y) | \pi(P, A), \sup_{G^2} \inf_{P \geq 0} \pi(P, Y) | \pi(P, A) \right), \end{aligned} \quad (37)$$

поэтому для вычисления левой части (36) достаточно вычислить отдельно верхние грани функции $\pi(Y) | \pi(A)$ по множеству $Y \in G^1$ и по множеству $Y \in G^2$.

$$\text{Вычислим } \sup_{G^1} \pi(Y) | \pi(A) = \sup_{G^1} \inf_{P \geq 0} \pi(P, Y) | \pi(P, A).$$

Пусть $Y \in R_+^n \times R_+^m$ и пусть

$$P_1^Y = \{P \in R_+^n \times R_+^m; \pi(P, Y) > 0, \pi(P, A) > 0\},$$

$$P_2^Y = \{P \in R_+^n \times R_+^m; \pi(P, Y) < 0, \pi(P, A) < 0\},$$

$$P_3^Y = \{P \in R_+^n \times R_+^m; \pi(P, Y) \geq 0, \pi(P, A) < 0\},$$

$$P_4^Y = \{P \in R_+^n \times R_+^m; \pi(P, Y) > 0, \pi(P, A) = 0\},$$

$$P_5^Y = \{P \in R_+^n \times R_+^m; \pi(P, Y) \leq 0, \pi(P, A) > 0\},$$

$$P_6^Y = \{P \in R_+^n \times R_+^m; \pi(P, Y) < 0, \pi(P, A) = 0\}.$$

Очевидно,

$$\inf_{P \geq 0} \pi(P, Y) | \pi(P, A) = \min_{1 \leq i \leq 6} \inf_{P \in P_i^Y} \pi(P, Y) | \pi(P, A). \quad (38)$$

Покажем, что при $Y = Y_{\lambda\mu} \in G^1$ $P_5^Y = P_6^Y = \emptyset$.

Действительно, пусть $k \in \arg \max \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, т.е. $\lambda_k \geq \lambda_i$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Тогда

$$\begin{aligned} \pi(P, Y_{\lambda\mu}) &= \lambda_k \left(\sum_j (\mu_j \lambda_k)^{-1} q_j u_j - \sum_i p_i \lambda_i \lambda_k^{-1} x_i \right) = \\ &= \lambda_k \left(\sum_j (\mu_j \lambda_k)^{-1} q_j u_j - \sum_j p_j \lambda_j \lambda_k^{-1} x_j + \right. \\ &+ \left. \left(\sum_j q_j u_j - \sum_{i \neq k} p_i u_i \right) - \left(\sum_j q_j u_j - \sum_{i \neq k} p_i u_i \right) \right) = \\ &= \lambda_k \left(\left(\sum_j ((\mu_j \lambda_k)^{-1} - 1) q_j u_j + \sum_{i \neq k} (1 - \lambda_i \lambda_k^{-1}) p_i u_i + \pi(P, A) \right) \right). \end{aligned}$$

Так как $Y_{\lambda\mu} \in G^1$, то $\lambda_i \mu_j \leq 1$ при любых j, i , откуда $(\mu_j \lambda_k)^{-1} \geq 1$. Кроме того, по выбору числа k $\lambda_i \lambda_k^{-1} \leq 1$. Следовательно, $\sum_j ((\mu_j \lambda_k)^{-1} - 1) q_j u_j + \sum_{i \neq k} (1 - \lambda_i \lambda_k^{-1}) p_i u_i \geq 0$.

Это означает, что при $\pi(P, A) > 0$ $\pi(P, Y_{\lambda\mu}) > 0$, а при $\pi(P, A) = 0$ $\pi(P, Y_{\lambda\mu}) \geq 0$. Таким образом, при $Y \in G^1$ множества P_5^Y и P_6^Y пусты.

Далее, поскольку, по определению, $\pi(P, Y) | \pi(P, A) = \infty$ в случае, когда $P \in P_3^Y \cup P_4^Y$, то в итоге получаем, что для вычисления $\inf_{P \geq 0} \pi(P, Y) | \pi(P, A)$ при $Y \in G^1$ достаточно найти

$$\min \left(\inf_{P_1^Y} \pi(P, Y) | \pi(P, A), \inf_{P_2^Y} \pi(P, Y) | \pi(P, A) \right).$$

Покажем, что при $Y_{\lambda\mu} \in G^1$

$$\inf_{P_1^{Y_{\lambda\mu}}} \pi(P, Y_{\lambda\mu}) | \pi(P, A) = 1 / \max \{\mu_1, \dots, \mu_m\}. \quad (39)$$

Действительно, если $P \in P_1^Y$, то $\pi(P, Y) | \pi(P, A) = \pi(P, Y) / \pi(P, A)$. Далее, пусть $l \in \arg \max \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$, т.е. $\mu_l \geq \mu_j$ при $j = 1, \dots, m$. Тогда при любых $P \geq 0$

$$\begin{aligned} \pi(P, Y_{\lambda\mu}) - (1 / \mu_l) \pi(P, A) &= \sum_j \mu_j^{-1} q_j \mu_j - \sum_i \lambda_i x_i - \sum_j \mu_l^{-1} q_j u_j + \\ &+ \sum_i \mu_l^{-1} p_i x_i = \sum_j (\mu_j^{-1} - \mu_l^{-1}) q_j u_j - \sum_i (\mu_l^{-1} - \lambda_i) p_i x_i \geq 0, \end{aligned}$$

так как для любого j $\mu_j^{-1} \geq \mu_l^{-1}$ по определению l , и для любого i $\mu_l^{-1} \geq \lambda_i$ по условию $Y_{\lambda\mu} \in G^1$. Следовательно, для любого $P \geq 0$ $\pi(P, Y_{\lambda\mu}) / \pi(P, A) \geq (1 / \mu_l)$.

Положим $p_1 = \dots = p_n = 0$ и $q_1 = \dots = q_{l-1} = q_{l+1} = \dots = q_m = 0$, $q_l = 1$. Тогда $\pi(P, Y_{\lambda\mu}) = (1/\mu_l)\pi(P, A) = u_l/\mu_l > 0$.

Очевидно, точка $P^0 \in R_+^n \times R_+^m$ с такими координатами принадлежит замыканию множества $P_1^{Y_{\lambda\mu}}$, поскольку $\pi(P^0, A) = u_l \geq 0$, $\pi(P^0, Y_{\lambda\mu}) = u_l/\mu_l \geq 0$. Так как $\inf$ любой непрерывной функции равен $\inf$ на ее замыкании, то

$$\inf_{P_1^{Y_{\lambda\mu}}} \pi(P, Y_{\lambda\mu}) | \pi(P, A) = \inf_{R^{\bar{Y}}} \pi(P, Y_{\lambda\mu}) | \pi(P, A) = 1/\mu_l.$$

Значит, $\inf_{R^Y} \pi(P, Y_{\lambda\mu}) / \pi(P, A) = 1/\max\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$.

Найдем теперь нижнюю грань $\pi(P, Y_{\lambda\mu}) | \pi(P, A)$ при $P \in P_2^{Y_{\lambda\mu}}$. По определению,

$$\inf_{P_2^{Y_{\lambda\mu}}} \pi(P, Y_{\lambda\mu}) | \pi(P, A) = \inf_{P_2^{Y_{\lambda\mu}}} \pi(P, A) / \pi(P, X).$$

Пусть $k \in \arg \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Тогда при любом $P \geq 0$

$$\begin{aligned} \pi(P, A) - (1/\lambda_k)\pi(P, Y_{\lambda\mu}) &= \sum_j (1 - (\mu_j \lambda_k)^{-1}) q_j u_j - \\ &- \sum_i (\lambda_k^{-1} \lambda_i - 1) p_i x_i \leq 0, \end{aligned}$$

так как $\mu_j \lambda_k \leq 1$ по условию принадлежности $Y_{\lambda\mu}$ к G^1 , а $\lambda_k^{-1} \lambda_i \leq 1$ по определению числа k . Равенство будет иметь место, если положить $q_1 = \dots = q_m = 0$, $p_1 = \dots = p_{k-1} = \dots = p_n = 0$, $p_k = 1$. (При таком векторе цен $\pi(P, A) = -x_k \leq 0$, $\pi(P, Y_{\lambda\mu}) = -\lambda_k x_k \leq 0$). Отсюда, учитывая, что нижняя грань непрерывной функции на множестве $P_2^{Y_{\lambda\mu}}$ совпадает с нижней гранью ее на замыкании $P_2^{\bar{Y}_{\lambda\mu}}$, получаем

$$\inf_{P_2^{Y_{\lambda\mu}}} \pi(P, A) / \pi(P, Y_{\lambda\mu}) = 1/\lambda_k = 1/\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

В итоге при $Y_{\lambda\mu} \in G^1$

$$\inf_{P \geq 0} \pi(P, Y_{\lambda\mu}) | \pi(P, A) = \min_{1 \leq i \leq 2} \inf_{P_i^{Y_{\lambda\mu}}} \pi(P, Y_{\lambda\mu}) | \pi(P, A) = \min\{1/\max\{\mu_1, \dots, \mu_m\},$$

$$1/\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}\} = 1/\max\{\max\{\mu_1, \dots, \mu_m\},$$

$$\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}\} = 1/\max\{\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \sup_{G^F} \pi(Y_{\lambda\mu}) | \pi(A) &= \sup_{Y_{\lambda\mu} \in G^1} 1/\max\{\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \\ &= 1/\inf_{Y_{\lambda\mu} \in G^1} \max\{\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}. \end{aligned}$$

Осталось вычислить $\sup_{Y_{\lambda\mu} \in G^2} \inf_{P \geq 0} \pi(P, Y) | \pi(P, A)$.

Пусть $Y_{\lambda\mu} \in G^2$. Это означает, что существуют номера i, j , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, такие, что $\mu_j \lambda_j > 1$. Пусть $J_j = \{j \in [1, m]: (j, j') \in \theta\}$ и $I_i = \{i' \in [1, n]: (i, i') \in \eta\}$. По предположению, в составе J_j есть номер j' такой, что $u_{j'} \neq 0$, а в числе элементов

$i' \in I_j$ – такой номер, что $x_{i'} \neq 0$. При этом $\mu_j = \mu_{j'}$, $\lambda_j = \lambda_{j'}$ и $\mu_{j'} \lambda_{j'} > 1$. Положим

$$p_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq i', \quad 1 \leq i \leq n, \\ (\mu_{j'} \lambda_{i'})^{-1} u_{i'} / x_{i'}, & \text{если } i = i', \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq j', \\ 1, & \text{если } j = j' \end{cases}$$

и рассмотрим соответствующий вектор цен $P = (q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_n)$. Очевидно,

$$\pi(P, A) = u_{j'} - (\mu_{j'} \lambda_{i'})^{-1} u_{i'} > 0, \quad \pi(P, Y_{\lambda\mu}) = \mu_{j'} u_{j'} - (\mu_{j'} \lambda_{i'})^{-1} u_{i'} \lambda_{i'}.$$

Следовательно, точка принадлежит множеству $P_5^{Y_{\lambda\mu}}$ и $\pi(P, Y_{\lambda\mu}) | \pi(P, A) = 0$. Поскольку $\pi(P, Y_{\lambda\mu}) | \pi(P, A) \geq 0$ при любом $P > 0$, это означает, что $\inf_{P \geq 0} \pi(P, Y_{\lambda\mu}) | \pi(P, A) = 0$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sup_{Y_{\lambda\mu} \in G_\omega^A} \pi(Y_{\lambda\mu}) | \pi(A) &= \max \left(\sup_{G^1} \pi(Y_{\lambda\mu}) | \pi(A), \sup_{G^2} \pi(Y_{\lambda\mu}) | \pi(A) \right) = \\ &= \sup_{G^1} \inf_{P \geq 0} \pi(P, Y_{\lambda\mu}) | \pi(P, A) = 1 / \inf_{Y_{\lambda\mu} \in G^1} \max \{ \mu_1, \dots, \mu_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n \}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось показать, что

$$\inf_{Y_{\lambda\mu} \in G^1} \max_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}} \mu_j \lambda_j = \inf_{Y \in G_\omega^A} \max_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}} \mu_j \lambda_j.$$

Пусть $\Delta^i \{(\lambda, \mu) \in R_+^n \times R_+^m : Y_{\lambda\mu} \in G^i\}$, $i = 1, 2$ и $\Delta_\omega^A = \Delta_1 \cup \Delta_2 = \{(\lambda, \mu) \in R_+^n \times R_+^m : Y_{\lambda\mu} \in G_\omega^A\}$. Убедимся, что нижняя грань функции $\max(\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ на множестве Δ_ω^A совпадает с ее нижней гранью на множестве Δ^1 . Для этого достаточно проверить, что для каждой точки $(\lambda, \mu) \in \Delta_\omega^A$ существует такая точка $(\lambda', \mu') \in \Delta^1$, что $(\lambda', \mu') \leq \max(\lambda, \mu)$. В качестве такой точки (единой для всего множества Δ_ω^A) можно взять точку $(\lambda', \mu') = (1, 1)$. Действительно, очевидно, что она лежит в Δ^1 , так как точка $A = Y_{1,1}$ принадлежит G_ω^A и удовлетворяет условию $\mu_j \lambda_j \leq 1$. Для точки $(\lambda', \mu') = (1, 1)$ значение функции (λ, μ) равно единице, а для точек $(\lambda, \mu) \in \Delta^2$ – больше единицы, поскольку ввиду условия $\mu_j \lambda_j \geq 1$ хотя бы одно из чисел μ_j, λ_j превосходит единицу. Следовательно, минимум функции $\max(\lambda, \mu)$ на Δ_ω^A совпадает с минимумом на подмножестве Δ^1 .

Таким образом, $\sup_{Y_{\lambda\mu} \in G_\omega^A} \inf_{P \geq 0} \pi(P, Y_{\lambda\mu}) | \pi(P, A) = 1 / \inf_{\{\lambda, \mu : Y_{\lambda\mu} \in G_\omega^A\}} \max \{ \mu_1, \dots, \mu_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$.

Теперь осталось заметить, что если $Y_{\lambda\mu} = (y, v) = (\lambda \odot x, \mu^{-1} \odot u)$, то

$$\max(\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \max_{\{i, j : 1 \leq i \leq n, x_i \neq 0, v_j \neq 0\}} \{y_i / x_i, u_j / v_j\}.$$

Первая часть теоремы 1 доказана.

Докажем вторую.

Пусть $G \in B^A(R_+^n \times R_+^m)$ – одно из множеств, удовлетворяющих условию второй части теоремы. Обозначим через D^A множество тех векторов $(\lambda, \mu) \in R_+^n \times R_+^m$, для

которых $(\lambda \odot x, \mu^{-1} \odot u) \in G$ и $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_m$. Ясно, что $D^A \neq \emptyset$, так как $A = (1 \odot x, 1 \odot u) \in G$. Так как $D^A \subset \Delta_\omega^A$, то для доказательства достаточно проверить, что для каждой точки $(\lambda, \mu) \in \Delta_\omega^A$ существует такое число $\lambda' > 0$, что точка $(\lambda', \lambda') \in D^A$ и $\lambda' = \max(\lambda', \lambda') \leq \max(\lambda, u)$. В качестве такого числа λ' возьмем $\lambda' = \max(\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Действительно, условие $\lambda' \leq \max(\lambda, \mu)$ выполняется в силу выбора λ' . Остается проверить, что $(\lambda', \lambda') \in D^A$, т.е. что $(\lambda'x, \lambda'^{-1}u) \in G$. Положим $\varepsilon_i = \lambda' / \lambda_i, i = 1, \dots, n, \delta_j = \mu_j / \lambda', j = 1, \dots, m$. Очевидно,

$$\varepsilon_i = 1 / \lambda_i \max\{\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n\} \geq 1, \delta_j = \mu_j / \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n; \mu_1, \dots, \mu_m\} \leq 1.$$

По условию на множество G точка $(\lambda'x, \lambda'u) = (\varepsilon_1 \lambda_1 x_1, \dots, \varepsilon_n \lambda_n x_n, \delta_1 \mu_1^{-1} u_1, \dots, \delta_m \mu_m^{-1} u_m)$ принадлежит G вместе с точкой $(\lambda \odot x, \mu^{-1} \odot u)$. Теорема 1 доказана.

В заключение приведем аксиоматическую характеристику введенной операции направленного деления.

Предложение. Пусть $a|b$ – бинарная операция, определенная на множестве действительных чисел R , за исключением $a = b = 0$, и принимающая значения в множестве $R \cup \infty$. Следующие утверждения эквивалентны:

а) операция $a|b$ удовлетворяет условиям:

$$1) \text{ для любых ненулевых } a, b \in R \text{ одного знака выполняется одно из двух равенств } a(a|b) = b \text{ или } a = (a|b)b, \quad (40)$$

$$2) a|b > c|d, a \geq c, b \leq d \in R, \quad (41)$$

$$3) a|b = 1 / (b|a), a \neq 0, b \neq 0, \quad (42)$$

$$б) a|b = \begin{cases} a/b, & a, b > 0, \\ b/a, & a, b < 0, \\ \infty, & a \geq 0, b < 0 \text{ или } a > 0, b = 0, \\ 0, & a \leq 0, b > 0 \text{ или } a < 0, b = 0. \end{cases} \quad (43)$$

$$в) a|b = \begin{cases} \sup\{k > 0: a > kb\}, & b \geq 0, \\ \sup\{k > 0: a \geq (1/k)b\}, & b < 0. \end{cases} \quad (44)$$

(предполагается, что $\sup \emptyset = 0$).

Доказательство предложения.

(а) $\rightarrow$ (б). Из условия (40) вытекает, что при любых $a, b \neq 0$ $a|b \in \{a/b, b/a\}$ и $a|a = 1$. Отсюда ясно, что при $a, b > 0$ равенство $a|b = b|a$ невозможно, так как при $a > b > 0$ $a|b \geq b|b = 1$ в силу условия монотонности (41), в то время как $b/a < 1$. Следовательно, при $a > b > 0$ $a|b = a/b$. Если же $0 < a < b$, то ввиду (41) $1 = a|a \geq a|b$, а $b/a > 1$. Значит, при $a, b > 0$ $a|b = a/b$.

Пусть теперь $a, b < 0$. Предположив, что $a|b = a/b$, мы при $0 > a > b$ приходим к противоречию с помощью цепочки соотношений $1 = a|a \leq a|b = a/b < 1$, а при $0 > b > a$ – с помощью $1 = a|a \geq a|b = a/b > 1$. Таким образом, при $a, b < 0$ $a|b = b/a$. Далее, если $a \geq 0, b < 0$, то в силу (41) и доказанного выше $a|b \geq \varepsilon|b = b|\varepsilon$ при любом $\varepsilon < 0$. Отсюда $a|b \geq \sup_{\varepsilon > 0} b|\varepsilon = \infty$, и $a/b = \infty$. Поскольку $a > 0, b = 0$, то $a|b \geq a|\varepsilon = a/\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, откуда $a|0 \geq \sup_{\varepsilon > 0} a/\varepsilon = \infty$ и $a|0 = \infty$.

Осталось рассмотреть случай $a \leq 0, b > 0$ и $a < 0, b = 0$. Первый из них сводится к уже рассмотренному с помощью условия (42): если $a \leq 0, b > 0$, то $a|b = \infty$ по доказанному выше, откуда $a|b = 1/(b|a) = 0$. Наконец, при $a < 0, b = 0$ $a|0 = 1/(0|a) = 1/\infty = 0$.

(б) $\rightarrow$ (а) – проверяется непосредственно.

(б) $\rightarrow$ (в). Рассмотрим отдельно шесть вариантов значений a, b .

Если $a, b > 0$, то очевидно $\sup\{k > 0: a > kb\} = \sup\{k > 0: k < a/b\} = a/b = a|b$. При $a, b < 0$ аналогично $\sup\{k > 0: a \geq (1/k)b\} = \sup\{k > 0: k \leq b/a\} = b/a = a|b$. Если $a \geq 0, b < 0$, то $\sup\{k > 0: a \geq (1/k)b\} = \sup\{k > 0\} = \infty = a|b$. При $a > 0, b = 0$ $\sup\{k > 0: a > kb\} = \sup\{k > 0\} = \infty = a|b$. Если $a \leq 0, b > 0$, то $\sup\{k > 0: a > kb\} = \sup \emptyset = 0 = a|b$. Наконец, при $a < 0, b = 0$ $\sup\{k > 0: a > kb\} = \sup \emptyset = 0 = a|b$.

Предложение доказано.

Приведем несколько комментариев к определению и описанию операции $a|b$.

Замечание 1. Условие (40) отражает основную цель введения операции – соизмерения двух величин $a, b \in R$ с помощью их "уравнения", т.е. отыскания третьей величины c , удовлетворяющей одному из условий $ac = b$ или $a = cb$. Отметим, что сам по себе способ измерения соотношения между величинами с помощью операций, применяемых к левой или правой части неравенства $a \neq b$, является достаточно распространенным приемом в теории и практике измерений. По такому принципу работают, например, рычажные весы. Два других условия (41), (42) определяют взаимодействие операции $a|b$ с двумя структурами на множестве R^2 : структурой, индуцированной естественным порядком на числовой оси, и операцией перестановки членов пары $(a, b) \rightarrow (b, a)$.

Замечание 2. Можно показать, что условия (40)–(42) аксиоматического описания $a|b$ являются независимыми и при исключении любого из них вывод будет неверен.

Замечание 3. Условие (42) в формулировке предложения можно заменить равносильным в данном контексте условием неотрицательности результата $a|b$. Действительно, при выводе (а) $\rightarrow$ (б) условие (42) использовалось только в случаях $a \leq 0, b > 0$ и $a < 0, b = 0$. Предположим, что вместо (42) имеет место

$$a|b \geq 0 \text{ при любых } a, b \in R, \text{ кроме } a = b = 0, \quad (45)$$

и покажем, что $a|b = 0$ при $a \leq 0, b \geq 0$. Пусть $b > 0$. Тогда, очевидно, $a|b \leq \varepsilon|b = \varepsilon/b$ при любом $\varepsilon > 0$, откуда $a|b \leq \inf_{\varepsilon > 0} \varepsilon/b = 0$ и ввиду (20) $a|b = 0$. Если же $a < 0, b = 0$, то $a|b = a|0 \leq a|\varepsilon = \varepsilon/a$ при любом $\varepsilon < 0$, откуда $a|0 \leq \inf_{\varepsilon > 0} \varepsilon/a = 0$ и ввиду (45) $a = 0$.

Замечание 4. В соответствии с условием (44) доказанного предложения равенство $a|b = c$ при $a, b > 0$ означает, что c – максимальное из чисел k таких, что a больше c не менее чем в k раз. Соответственно при $a, b < 0$ величина $a|b$ равна наибольшему из чисел k , для которых $|b|$ больше $|a|$ не менее чем в k раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Львов Д.С. Эффективное управление техническим развитием. М.: Экономика, 1990.
2. Балтрушевич Т.Г., Лившиц В.Н. Оценка эффективности инноваций: "старые" и "новые" проблемы // Экономика и мат. методы. 1992. Т. 28. Вып. 1.
3. Färe R., Grosskopf S., Lovell C.K. The Measurement of Efficiency of Production. Boston, 1985.
4. Forsund F.R., Hjalmarsson L. Analysis of Industrial Structure: a Putty-Clay Approach. Stockholm, 1987.

5. Антонов М.В., Поманский А.Б., Трофимов Г.Ю. Гомотетические производственные функции и анализ границы эффективности // Экономика и мат. методы. 1991. Т. 27. Вып. 4.
6. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. М: Финансы и статистика, 1986.
7. Клейнер Г.Б. Обеспечение сбалансированности плана объединения. М.: МИПК Минприбора СССР, 1988.
8. Färe R., Grosskopf S., Lovell C.K., Pasurka C. Multilinear Productivity Comparisons when Some Outputs are Undesirable // Rev. Econ. and Statistics. 1989. № 93.
9. Dmitruk A.V., Koshevoy G.A. On the Existence of a Technical Efficiency Criterion // J. Econ. Theory. 1991. № 55.
10. Farrell M.J. The Measurement of Productive Efficiency // J. the Royal Statistical Society. Ser. A. General. 1957. № 120. P. 3.
11. Пфанцгль И. Теория измерений. М.: Мир, 1976.
12. Экономико-математические модели в системе управления предприятием. М.: Наука, 1983.
13. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993.

Поступила в редакцию
12 IV 1994