

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С РАЗМЫТЫМИ ПАРАМЕТРАМИ*

© 1995 А.И. Вересков, В.Н. Мягков

(Москва – С.-Петербург)

Для прикладных задач планирования типична ситуация, когда параметры оптимизируемой системы известны неточно. Целенаправленный учет этого фактора приводит к нетрадиционным понятиям оптимальности и приближенной оптимальности, что позволяет разработать эффективные критерии достижения заданной точности в итерационных алгоритмах.

1. Рассмотрим задачу линейного программирования (ЛП)

$$P(A, b, c): \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m_1 \leq m,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = m_1 + 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_1 \leq n,$$

$$cx = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

где A – $m \times n$ -матрица с элементами a_{ij} , $b = (b_1, \dots, b_m)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$; $x \in R^n$ и $y \in R^m$ – векторы прямых и двойственных переменных. Пусть $v(A, b, c)$ – оптимальное значение задачи $P(A, b, c)$, $\bar{X}(A, b, c)$ – множество ее оптимальных планов, $\bar{Y}(A, b, c)$ – множество двойственных оценок. Будем считать, что набор параметров $(A, b, c) = (A^0, b^0, c^0)$ порождает разрешимую задачу $P(A^0, b^0, c^0)$: $Z^0 = \bar{X}(A^0, b^0, c^0) \times \bar{Y}(A^0, b^0, c^0) \neq \emptyset$.

В работе развивается подход [1] к анализу приближенных решений задачи $P(A^0, b^0, c^0)$ с неточными данными. На протяжении пп. 2–5 матрица A считается фиксированной ($A = A^0$), тогда как для векторных параметров b, c покомпонентно указана зона размытости**

$$|b_i - b_i^0| \leq \varepsilon_i, \quad |c_j - c_j^0| \leq \varepsilon^j \forall i, j, \quad (1)$$

причем все $\varepsilon_i, \varepsilon^j$ строго положительны. Опуская в обозначениях фиксированный параметр A^0 , будем пока писать $P(b^0, c^0)$ вместо $P(A^0, b^0, c^0)$, $P(b, c)$ – вместо $P(A^0, b, c)$ и т.п.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 94-06-1970).

** Традиционный вычислительный термин "погрешность в параметрах" представляется в данном случае недостаточно емким.

2. Пусть мы располагаем приближенным (итерационным) методом решения задачи $P(b^0, c^0)$, вырабатывающим оптимизирующую последовательность $\{x^k, y^k\}$ в пространстве прямых и двойственных переменных

$$\text{dist}((x^k, y^k), Z^0) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (2)$$

$$x_j^k \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_1, \quad y_i^k \geq 0, \quad i = 1, \dots, m_1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Векторы x^k, y^k могут не являться допустимыми планами задачи $P(b^0, c^0)$ и двойственной к ней $D(b^0, c^0)$, поэтому соотношение

$$c^0 x^k \leq v(b^0, c^0) \leq b^0 y^k \quad (4)$$

не гарантировано, как бы ни были малы невязки в прямых и двойственных ограничениях. Из-за этого не удастся с помощью $c^0 x^k, b^0 y^k$ непосредственно оценить достигнутую точность оптимизации, т.е. отклонение $|v(b^0, c^0) - c^0 x^k|$. На практике часто наблюдается соотношение $c^0 x^k > b^0 y^k$, причем оно может сохраняться при сколь угодно больших k . В этом случае затруднения с интерпретацией численных результатов становятся особенно очевидными; однако и выполнение "правильного" неравенства $c^0 x^k \leq b^0 y^k$ тоже никак не облегчает локализацию неизвестного оптимального значения $v(b^0, c^0)$.

Оценка типа (4) может быть легко получена, если включить в рассмотрение возмущенные задачи $P(b, c)$. Определим покомпонентно векторы $b^k, c^k, k = 1, 2, \dots$

$$b_i^k = \max\{b_i^0, A_i^0 x^k\}, \quad i \leq m_1, \quad b_i^k = A_i^0 x_i^k, \quad i \geq m_1 + 1, \quad (5)$$

$$c_j^k = \min\{c_j^0, y^k A^{0j}\}, \quad j \leq n_1, \quad c_j^k = y^k A^{0j}, \quad j \geq n_1 + 1, \quad (6)$$

где A_i^0 – строки, A^{0j} – столбцы матрицы A^0 . Тем самым построена пара двойственных задач $P(b^k, c^k), D(b^k, c^k)$, для которых векторы x^k, y^k являются допустимыми.

Теорема 1. Двойственные задачи $P(b^k, c^k), D(b^k, c^k), k = 1, 2, \dots$, разрешимы, причем $c^k x^k \leq v(b^k, c^k) \leq b^k y^k$ и

$$(b^k, c^k) \rightarrow (b^0, c^0), \quad k \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Если дополнительно, сверх (2), (3), предположить, что последовательность $\{x^k, y^k\}$ ограничена, то

$$c^k x^k - b^k y^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Последнее предположение можно несколько ослабить, указав класс неограниченных оптимизирующих последовательностей $\{x^k, y^k\}$, для которых свойство (8) сохраняет силу. Подчеркнем также, что из (7) (с учетом разрешимости задач $P(b^k, c^k)$) следует еще одно важное предельное соотношение: $v(b^k, c^k) \rightarrow v(b^0, c^0), k \rightarrow \infty$.

3. Обозначим через $FP_\varepsilon(b^0, c^0)$ семейство задач ЛП $P(b, c)$, параметры которых описываются интервальными соотношениями (1); по-прежнему $A = A^0, \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n) > 0$. Как показывает теорема 1, проблема идентификации приближенного решения значительно упрощается, если мы перейдем от исходной задачи $P(b^0, c^0)$ к рассмотрению семейства $FP_\varepsilon(b^0, c^0)$ и договоримся вместо отклонения $|v(b^0, c^0) - c^0 x^k|$ оценивать $v(b^k, c^k) - c^k x^k$. Последнее отклонение относится к заранее не фиксированной задаче $P(b^k, c^k)$, которая строится согласно (5), (6) по ходу итерационного процесса. Процесс можно считать завершенным, когда в силу (7), (8) будут выполнены ус-

$$b^k y^k - c^k x^k \leq \delta, |b_i^k - b_i^0| \leq \varepsilon_i, |c_j^k - c_j^0| \leq \varepsilon_j \quad \forall i, j, \quad (9)$$

где $\delta > 0$ отражает требования к точности оптимизации. (Вопрос о выборе параметра δ и его возможной связи с зоной размытости (1) мы не рассматриваем.) Векторы x^k, y^k ввиду теоремы 1 и первого из соотношений (9) являются приближенными (точнее, δ -оптимальными) решениями задач $P(b^k, c^k) \in FP_\varepsilon(b^0, c^0)$ и $D(b^k, c^k)$. Эти векторы естественно считать также и δ -оптимальными решениями задач $P(b^0, c^0), D(b^0, c^0)$ в ситуации, когда параметры последних указаны с точностью ε .

Предложенное ослабление стандартной постановки задачи ЛП представляется вполне оправданным, если учесть, что величины невязок в прямых и двойственных ограничениях обычно анализируют именно с таких позиций.

Замечание 1. Возможности описанного подхода сужает то обстоятельство, что нам понадобилось предположение о размытости всех без исключения параметров b_i, c_j задачи $P(b^0, c^0)$. Указанный недостаток можно попытаться преодолеть различными способами. Наиболее последовательный из них – использование операции проектирования, но это связано с дополнительным объемом вычислений. Обсуждение данного круга вопросов мы продолжим в пп. 6, 7.

Следующие два пункта статьи посвящены построению векторов, дающих *точные решения* для некоторых задач семейства $FP_\varepsilon(b^0, c^0)$, $\varepsilon > 0$. Тем самым будет выяснено, что в рамках этого семейства проблема приближенной оптимизации (как она поставлена в данной работе) может быть конструктивно решена с заменой параметра $\delta > 0$ (см. (9)) на $\delta = 0$. Наконец, в п. 6 мы распространим предложенный подход на более широкое семейство возмущенных задач, допуская варьирование исходной матрицы A^0 .

Основные утверждения пп. 2–5 получены в [1] и могут быть перенесены на задачу выпуклого программирования с дифференцируемыми функциями ограничений и цели, если считать, что возмущению подвергаются правые части ограничений и градиент критерия.

4. Ниже будет приведено правило, позволяющее по элементам оптимизирующей последовательности $\{x^k, y^k\}$ строить точные решения $\tilde{x}^k, \tilde{y}^k$ некоторых задач $P(\tilde{b}^k, \tilde{c}^k)$, где $(\tilde{b}^k, \tilde{c}^k) \rightarrow (b^0, c^0)$ при $k \rightarrow \infty$. Для произвольных векторов $x \in R^n, y \in R^m$, удовлетворяющих (3), определим покомпонентно векторы $B = B(x, y) \in R^m, C = C(x, y) \in R^n$

$$B_i = \begin{cases} \max\{b_i^0, A_i^0 x\}, & \text{если } i \leq m_1 \text{ и } y_i = 0, \\ A_i^0 x - & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$C_j = \begin{cases} \min\{c_j^0, y A^{0j}\}, & \text{если } j \leq n_1 \text{ и } x_j = 0, \\ y A^{0j} - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Замечание 2. Векторы $x^k, y^k, k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям оптимальности Куна – Таккера для задач $P(B^k, C^k)$, где $B^k = B(x^k, y^k), C^k = C(x^k, y^k)$, однако из (2) не следует сходимости $(B^k, C^k) \rightarrow (b^0, c^0)$. Действительно, пусть $i \leq m_1$ и $\bar{y}_i = 0, \forall \bar{y} \in \bar{Y}(b^0, c^0)$, но при этом $y_i^k > 0 \forall k$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x} \in \bar{X}(b^0, c^0)$. Тогда типичным будет соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_i^k = A_i^0 \bar{x} < b_i^0, \text{ показывающее, что разности } b_i^0 - B_i^k, k \rightarrow \infty, \text{ могут не только}$$

превосходить ε_i , но и вообще не допускают эффективной априорной оценки. Отмеченное обстоятельство, как нетрудно видеть, имеет место не только для задач $P(B^k, C^k)$, но и для любых задач вида $P(b, c)$, для которых векторы x^k, y^k образуют оптимальные двойственные пары. Таким образом, речь идет не об особенностях конкретных операторов $B(x, y), C(x, y)$, а об определенном свойстве оптимизирующей

последовательности $\{x^k, y^k\}$, не подчиненной никаким другим ограничениям, кроме (2), (3).

Правило 1. Обнуляя некоторые положительные компоненты x_j^k, y_i^k , определим векторы $\tilde{x}^k, \tilde{y}^k$ и через них $\tilde{b}^k, \tilde{c}^k$

$$\tilde{x}_j^k = \begin{cases} 0, & \text{если } j \leq n_1 \text{ и } y^k A^{0j} - c_j^0 > x_j^k, \\ x_j^k & - \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\tilde{y}_i^k = \begin{cases} 0, & \text{если } i \leq m_1 \text{ и } b_i^0 - A_i^0 x^k > y_i^k, \\ y_i^k & - \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\tilde{b}^k = B(\tilde{x}^k, \tilde{y}^k), \quad \tilde{c}^k = C(\tilde{x}^k, \tilde{y}^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Теорема 2. Векторы $\tilde{x}^k, \tilde{y}^k$ оптимальны для задач $P(\tilde{b}^k, \tilde{c}^k), D(\tilde{b}^k, \tilde{c}^k)$, при этом из (2) следует $(\tilde{b}^k, \tilde{c}^k) \rightarrow (b^0, c^0), (\tilde{x}^k, \tilde{y}^k) - (x^k, y^k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Доказательство, приведенное в [1] для $m_1 = m, n_1 = n$, легко распространяется на общий случай. Предположение об ограниченности последовательности $\{x^k, y^k\}$ здесь не требуется.

Итак, векторы $\tilde{x}^k, \tilde{y}^k$ образуют оптимальную двойственную пару для задачи $P(\tilde{b}^k, \tilde{c}^k)$, и при достаточно больших k верно следующее включение: $P(\tilde{b}^k, \tilde{c}^k) \in FP_\varepsilon(b^0, c^0)$, $k \geq K_1, \varepsilon > 0$. Сравнивая этот результат с замечанием 2, мы убеждаемся, что векторы $\tilde{x}^k, \tilde{y}^k, k \geq K_1$, допускают более содержательную интерпретацию, чем элементы последовательности $\{x^k, y^k\}$, т.е. чем произвольные δ -оптимальные решения задач $P(b^0, c^0), D(b^0, c^0)$ при каком бы то ни было $\delta > 0$. Указанное свойство векторов $\tilde{x}^k, \tilde{y}^k, k \geq K_1$, дает основание отнести их к особому классу приближенных решений и, следуя [2], называть такие решения квазиоптимальными.

Как показывают примеры, последовательность $\{\tilde{x}^k, \tilde{y}^k\}$ может сходиться к седловому множеству Z^0 медленнее, чем $\{x^k, y^k\}$. Все же имеет место некоторое "утешительное" утверждение относительно сходимости к точке $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z^0$. А именно: если подпоследовательность $\{x^k, y^k\}, k = k_1, k_2, \dots$, имеет пределом точку $(\bar{x}, \bar{y})$, то найдется такое S , что

$$\|(\tilde{x}^k, \tilde{y}^k) - (\bar{x}, \bar{y})\| \leq \|(x^k, y^k) - (\bar{x}, \bar{y})\|, \quad k = k_s, \quad s \geq S. \quad (10)$$

Здесь и в дальнейшем $\|d\| = \max_i |d_i|, d \in R^{m+n}$.

5. В ряде приложений может оказаться неудобным то обстоятельство, что правило 1 обнуляет, вообще говоря, не все "малые" компоненты векторов x^k, y^k .

Правило 2. Задав порог $\gamma > 0$ и обнуляя у векторов $\tilde{x}^k, \tilde{y}^k$ компоненты, удовлетворяющие неравенствам $|\tilde{x}_j^k| \leq \gamma, |\tilde{y}_i^k| \leq \gamma$, построим векторы $\hat{x}^k = \hat{x}^k(\gamma), \hat{y}^k = \hat{y}^k(\gamma)$. Эти векторы можно определить непосредственно через $x^k, y^k, k = 1, 2, \dots$

$$\hat{x}_j^k = \begin{cases} x_j^k, & \text{если } j \leq n_1, x_j^k > \gamma \text{ и } y^k A^{0j} - c_j^0 \leq x_j^k, \\ x_j^k, & \text{если } j \geq n_1 + 1, |x_j^k| > \gamma, \\ 0 & - \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\hat{y}_i^k = \begin{cases} y_i^k, & \text{если } i \leq m_1, y_i^k > \gamma \text{ и } b_i^0 - A_i^0 x^k \leq y_i^k, \\ y_i^k, & \text{если } i \geq m_1 + 1, |y_i^k| > \gamma, \\ 0 & - \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим $\hat{b}^k = \hat{b}^k(\gamma) = B(\hat{x}^k, \hat{y}^k)$, $\hat{c}^k = \hat{c}^k(\gamma) = C(\hat{x}^k, \hat{y}^k)$.

Векторы $\hat{x}^k, \hat{y}^k$ оптимальны для задач $P(\hat{b}^k, \hat{c}^k)$, $D(\hat{b}^k, \hat{c}^k)$, причем $\|(\hat{x}^k, \hat{y}^k) - (\tilde{x}^k, \tilde{y}^k)\| \leq \gamma$ и

$$\|(\hat{b}^k, \hat{c}^k) - (b^0, c^0)\| \leq \tilde{\omega}_k + \max\{\alpha\gamma, \tilde{\omega}_k\}, \quad (11)$$

где $\tilde{\omega}_k = \|(\tilde{b}^k, \tilde{c}^k) - (b^0, c^0)\|$, $\alpha = \max\{\|A^0\|, \|(A^0)^T\|\}$, $\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$, A^T — транспонированная матрица A .

Далее проанализируем распространенную на практике эвристическую процедуру — обнуление малых компонент векторов x^k, y^k , т.е. операцию, близкую к правилу 2, но несколько более простую.

Правило 3. Задав порог $\gamma > 0$, обнулим у векторов x^k, y^k компоненты, удовлетворяющие неравенствам $|x_j^k| \leq \gamma$, $|y_i^k| \leq \gamma$. Для полученных векторов $\overset{\vee}{x}^k = \overset{\vee}{x}^k(\gamma)$, $\overset{\vee}{y}^k = \overset{\vee}{y}^k(\gamma)$ построим $\overset{\vee}{b}^k = \overset{\vee}{b}^k(\gamma) = B(\overset{\vee}{x}^k, \overset{\vee}{y}^k)$, $\overset{\vee}{c}^k = \overset{\vee}{c}^k(\gamma) = C(\overset{\vee}{x}^k, \overset{\vee}{y}^k)$, $k = 1, 2, \dots$

В обычных предположениях (2), (3) о последовательности $\{x^k, y^k\}$ имеет место следующее утверждение: для произвольного $\gamma > 0$ существует такое число $K(\gamma)$, что

$$(\overset{\vee}{x}^k, \overset{\vee}{y}^k) = (\hat{x}^k, \hat{y}^k), (\overset{\vee}{b}^k, \overset{\vee}{c}^k) = (\hat{b}^k, \hat{c}^k) \text{ при } k \geq K(\gamma). \quad (12)$$

Соотношения (11), (12) остаются в силе, если переформулировать правила 2, 3 и сохранить γ -обнуление только для компонент x_j^k , $j \leq n_1$, y_i^k , $i \leq m_1$, на которые изначально наложено условие неотрицательности. Скорее всего, соображения прикладного характера и не потребуют обнуления остальных малых компонент, однако для дальнейшего нам понадобятся векторы $(\hat{x}^k, \hat{y}^k)$, $(\overset{\vee}{x}^k, \overset{\vee}{y}^k)$ определенные в соответствии с основным вариантом правил 2, 3.

Замечание 3. Негативное свойство векторов (x^k, y^k) , на которое было указано в замечании 2, связывалось там с наличием положительных компонент x_j^k , $j \leq n_1$, y_i^k , $i \leq m_1$, стремящихся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Соотношения (11), (12) подтверждают, что обнуление *всех* таких (и только таких) компонент в известной мере устраняет отмеченный недостаток. Несмотря на то что правило 1 делает это "более искусно" (см. теорему 2), преобразование векторов x^k, y^k к виду $\overset{\vee}{x}^k, \overset{\vee}{y}^k$ окажется полезным для наших целей даже и в тех случаях, когда γ -обнуление не диктуется содержательным смыслом задачи.

Замечание 4. Величина $K(\gamma)$, фигурирующая в (12), априори не известна, а при $k < K(\gamma)$ показатели $\|(\hat{b}^k, \hat{c}^k) - (b^0, c^0)\|$ и $\|(\overset{\vee}{b}^k, \overset{\vee}{c}^k) - (b^0, c^0)\|$ могут сильно различаться, причем в любую сторону. Более тщательный анализ, опирающийся на оценки (10), (11), выявляет, что специальные предположения о последовательности $\{x^k, y^k\}$ обеспечивают векторам $(\hat{b}^k, \hat{c}^k)$ некоторые теоретические преимущества. На практике векторы $(\hat{x}^k, \hat{y}^k)$ и $(\overset{\vee}{x}^k, \overset{\vee}{y}^k)$ целесообразно использовать параллельно, имея в виду скорейшее построение возмущенной задачи, входящей в семейство $FP_\varepsilon(b^0, c^0)$.

б. Сравним основные результаты пп. 4, 5 — теорему 2 и оценку (11). Включение $P(\tilde{b}^k, \tilde{c}^k) \in FP_\varepsilon(b^0, c^0)$, $\varepsilon > 0$, гарантировано через конечное число итераций, тогда как

для задач $P(\hat{b}^k, \hat{c}^k)$ такое утверждение верно лишь при надлежащем выборе порога γ : $0 < \gamma \leq \gamma(A, \epsilon)$. Однако выбор того или иного порога обнуления обычно бывает связан с прикладными соображениями, и его произвольное уменьшение может оказаться неприемлемым.

В свете сказанного естественно расширить класс допустимых возмущенных задач, включив в рассмотрение матрицы $A \neq A^0$. Дополнительным стимулом для этого служит стремление получить нужный результат (т.е. интерпретацию векторов $(\hat{x}^k, \hat{y}^k)$, $(\check{x}^k, \check{y}^k)$ или $(\bar{x}^k, \bar{y}^k)$ как квазиоптимальных решений) при возможно меньшем значении k . Напомним также, что методы пп. 2–5 применимы лишь при $\epsilon > 0$; указанный недостаток преодолевается ниже, хотя и ценой значительно больших вычислительных затрат.

Обозначим через $FP_\epsilon(A^0, b^0, c^0)$ семейство задач $P(A, b, c)$ с параметрами, удовлетворяющими интервальным соотношениям

$$|a_{ij} - a_{ij}^0| \leq \epsilon_{ij}, |b_i - b_i^0| \leq \epsilon_i, |c_j - c_j^0| \leq \epsilon^j \forall i, j. \quad (13)$$

В дальнейшем будем предполагать, что все $mn + m + n$ компонент вектора $\epsilon = (\epsilon_{ij}, \epsilon_i, \epsilon^j)$ неотрицательны; уточнения, касающиеся $\epsilon_{ij}, \epsilon^j$, оговариваются особо.

Считая, что векторы $u^k \in R^n, v^k \in R^m, k \geq 1$, удовлетворяют (3), определим множества

$$I = \{i = 1, \dots, m\}, I^k = \{i = 1, \dots, m_1: v_i^k > 0\} \cup \{i = m_1 + 1, \dots, m\},$$

$$J = \{j = 1, \dots, n\}, J^k = \{j = 1, \dots, n_1: u_j^k > 0\} \cup \{j = n_1 + 1, \dots, n\}$$

и выпишем условия Куна – Таккера для задачи $P(A, b, c)$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} u_j^k \leq b_i, i \in I \setminus I^k, \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j^k = b_i, i \in I^k, \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} v_i^k \geq c_j, j \in J \setminus J^k, \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i^k = c_j, j \in J^k. \quad (15)$$

В сочетании с (13) эти условия эквивалентны включению

$$(u^k, v^k) \in \bar{X}(A, b, c) \times \bar{Y}(A, b, c). \quad (16)$$

При фиксированных u^k, v^k условия (14), (15) можно рассматривать как ограничения на параметры a_{ij}, b_i, c_j . Всякое решение системы (13)–(15) порождает задачу семейства $FP_\epsilon(A^0, b^0, c^0)$, обладающую свойством (16); верно также и обратное.

Положим $\underline{a}_{ij} = a_{ij}^0 - \epsilon_{ij}$, $\bar{a}_{ij} = a_{ij}^0 + \epsilon_{ij}$, $\bar{b}_i = b_i^0 + \epsilon_i$, $\underline{c}_j = c_j^0 - \epsilon^j \forall i, j$ и, далее,

$$\underline{b}_i = \begin{cases} b_i^0 - \epsilon_i, i \in I^k, \\ -\infty, i \in I \setminus I^k, \end{cases}$$

$$\bar{c}_j = \begin{cases} c_j^0 + \epsilon^j, j \in J^k, \\ \infty, j \in J \setminus J^k. \end{cases}$$

Обозначим через $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$ решение системы

$$\underline{b}_i \leq \sum_{j=1}^n u_j^k a_{ij} \leq \bar{b}_i, \forall i, \underline{c}_j \leq \sum_{i=1}^m v_i^k a_{ij} \leq \bar{c}_j, \forall j, \quad (17)$$

$$\underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, \forall i, j, \quad (18)$$

и с помощью p_i^k, q_j^k определим векторы $b^{(k)}, c^{(k)}$

$$p_i^k = \max \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} u_j^k, b_i^0 - \varepsilon_i \right\}, \quad q_j^k = \min \left\{ \sum_{i=1}^m a_{ij}^{(k)} v_i^k, c_j^0 + \varepsilon_j \right\},$$

$$b_i^{(k)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} u_j^k, i \in I^k, \\ \text{любое число из отрезка} \\ [p_i^k, \bar{b}_i], i \in I \setminus I^k, \end{cases}$$

$$c_j^{(k)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij}^{(k)} v_i^k, j \in J^k, \\ \text{любое число из отрезка} \\ [c_j^k, q_j^k], j \in J \setminus J^k. \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_{ij}, \varepsilon_i, \varepsilon_j) \geq 0$ и вектор (u^k, v^k) удовлетворяет условиям (3). Тогда множество задач $P(A, b, c) \in FP_\varepsilon(A^0, b^0, c^0)$, связанных с (u^k, v^k) соотношением (16), описывается всевозможными наборами параметров $(A, b, c) = (A^{(k)}, b^{(k)}, c^{(k)})$, порождаемыми системой (17), (18).

Для доказательства достаточно убедиться во взаимнооднозначном соответствии между решениями системы (13)–(15) и наборами $(A^{(k)}, b^{(k)}, c^{(k)})$, построенными выше.

Замечание 5. Векторы $b^{(k)}, c^{(k)}$ можно было определить иначе, положив

$$b_i^{(k)} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} u_j^k, b_i^0 \right\} \text{ при } i \in I \setminus I^k \text{ и } c_j^{(k)} = \min \left\{ \sum_{i=1}^m a_{ij}^{(k)} v_i^k, c_j^0 \right\} \text{ при } j \in J \setminus J^k; \text{ тогда из}$$

всех подходящих значений параметров b_i, c_j были бы выбраны ближайшие к b_i^0, c_j^0 . Отметим, что в ситуации, предусмотренной правилом 1 (т.е. при $A^{(k)} = A^0, (u^k, v^k) = (\tilde{x}^k, \tilde{y}^k)$), определенные здесь векторы $b^{(k)}, c^{(k)}$ совпадают с $\tilde{b}^k, \tilde{c}^k$.

7. Система (17), (18) достаточно удобна для численного решения (см. п. 8), однако никакими эффективными критериями ее разрешимости мы не располагаем и не можем предложить каких-либо априорных утверждений о существовании искомого параметров $A^{(k)}, b^{(k)}, c^{(k)}$. Проанализируем описанную методику с эвристических позиций, опираясь на те же результаты, что и в начале п. 6.

Обсудим различные предположения о зоне размытости (строгая положительность или неотрицательность величин $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_i, \varepsilon_j$), а также перспективность использования в качестве (u^k, v^k) тех векторов, которые были построены в пп. 4, 5.

а). Пусть все $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ положительны. Тогда, в силу теоремы 2, $P(A^0, \tilde{b}^k, \tilde{c}^k) \in FP_\varepsilon(A^0, b^0, c^0)$, начиная с некоторого $k = K_1$. Следовательно, как показывает теорема 3, при $(u^k, v^k) = (\tilde{x}^k, \tilde{y}^k)$ и $k \geq K_1$ система (17), (18) разрешима $(A^{(k)} = A^0)$ даже в предположении $\varepsilon_{ij} \equiv 0$ (т.е. при $a_{ij} = \bar{a}_{ij} = a_{ij}^0, \forall i, j$). Если же количество положительных компонент ε_{ij} достаточно велико, то система, скорее всего, обладает решениями (отличными от A^0) и при каких-то $k < K_1$. Однако сейчас мы увидим, что с вычислительной точки зрения выбор векторов $(u^k, v^k) = (\tilde{x}^k, \tilde{y}^k)$ не свободен от существенных недостатков.

б). Численное решение системы (17), (18) становится затруднительным, если среди ее значащих коэффициентов u_j^k, v_i^k есть числа, близкие к нулю. В этом отношении

векторы $\hat{x}^k, \hat{y}^k$ (как и $\check{x}^k, \check{y}^k$) имеют явное преимущество перед $\bar{x}^k, \bar{y}^k$, хотя соображения из п. 6, связанные с оценкой (11), по-прежнему остаются в силе. Если содержательный смысл оптимизационной задачи не требует применения правила 2, то разумный компромисс заключается в "принудительном" γ -обнулении компонент $\bar{x}_j^k, \bar{y}_i^k$ при малом пороге γ , подбор которого диктуется вычислительной целесообразностью. Можно надеяться, что при малых значениях γ переход от коэффициентов $\bar{x}_j^k, \bar{y}_i^k$ к $\hat{x}_j^k, \hat{y}_i^k$ несильно повлияет на разрешимость системы (17), (18).

Таким образом, в качестве (u^k, v^k) следует использовать либо векторы $(\hat{x}^k, \hat{y}^k)$, либо $(\check{x}^k, \check{y}^k)$ *. Подчеркнем, что было бы неправильным обнулять малые коэффициенты уже составленной системы, поскольку выбор вектора (u^k, v^k) должен предшествовать формированию множеств I^k, J^k .

в). Если $A \equiv A^0$ и среди $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ есть равные нулю, то методы пп. 2–5, как мы знаем, непосредственно не применимы. Их возможная модификация (см. замечание 1) представляется менее перспективной, чем обращение к технике п. 6 с соблюдением дополнительного условия $\varepsilon_{ij} = 0 \forall i, j$.

8. Эффективность практической реализации описанного подхода, очевидно, зависит от скорости решения системы линейных неравенств (17), (18). В связи с этим следует отметить два обстоятельства. Во-первых, решение системы никак не связано с итерационной процедурой, порождающей последовательность $\{x^k, y^k\}$, и вычислительно оба процесса могут быть организованы параллельно. Во-вторых, каждая переменная a_{ij} встречается в (17) не более 2 раз, что позволяет использовать специальные методы, предназначенные для решения систем транспортного типа. Наличие двухсторонних ограничений (18) не препятствует применению таких методов. Их эффективность, как правило, значительно повышается, если все ненулевые коэффициенты в (17) равны единице. Добьемся этого, модифицируя известный прием, позволяющий в некоторых ситуациях свести распределительную задачу к транспортной. Конкретно, воспользуемся тем, что каждый из коэффициентов u_j^k, v_j^k зависит только от одного индекса i или j . Умножим почленно неравенства (17) первой группы на v_i^k , если $v_i^k \neq 0$; неравенства второй группы – на u_j^k , если $u_j^k \neq 0$; последующая замена переменных приводит систему (17), (18) к требуемому виду.

Одним из эффективных для решения систем транспортного типа является так называемый метод энтропийной балансировки [3–5], максимизирующий взвешенную энтропию при совместности ограничений (17), (18) либо обнаруживающий их несовместность. В случае, когда коэффициенты в (17) равны нулю или единице, итерации метода вычислительно крайне просты и требуют всего лишь R операций сложения и одно деление (здесь R – число "активных" переменных a_{ij} , входящих в (17) по крайней мере с одним ненулевым коэффициентом).

Авторами была проведена серия машинных экспериментов для задач ЛП небольшого размера. В частности, рассматривалась задача с $b_i^0 \neq 0, c_j^0 \neq 0 \forall i, j$ и с матрицей 83×113 , имеющей 381 ненулевой элемент a_{ij}^0 . Допустимые вариации $\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_{ij}$ составляли 5–10% от значений соответствующих параметров. В качестве u^k, v^k использовались оптимальные векторы $\bar{x}, \bar{y}$ задачи ЛП с возмущениями порядка 20–30% в значащих компонентах. Установление несовместности системы (17), (18) или отыскание ее решения достигалось за 5–10 с на IBM-PC (286/287) при R порядка 200–

* См. в связи с этим замечания 3, 4.

300. Несовместность системы устанавливалась по стабилизации невязок на положительном уровне.

Замечание 6. Материал пп. 6–8 посвящен развитию подхода, изложенного в п. 4, т.е. построению квазиоптимальных решений для задач $P(b^0, c^0)$, $D(b^0, c^0)$ с размытыми параметрами. Другая постановка вопроса, описанная в пп. 2, 3, также может быть перенесена на семейство задач $FP_\varepsilon(A^0, b^0, c^0)$. Иначе говоря, по аналогии с (17), (18) можно сформулировать систему линейных неравенств, позволяющую интерпретировать векторы u^k , v^k как δ -оптимальные решения (прямое и двойственное) одной из задач указанного семейства. Эта система, как и (17), (18), относится к транспортному типу, и ее также удастся преобразовать описанным выше способом с той лишь разницей, что коэффициентами системы оказываются числа 0, –1 и 1. Вычислительная техника [3, 4] в этом случае лишь немного усложняется: на каждой итерации метода балансировки дополнительно потребуется одна операция извлечения квадратного корня.

9. Подход к понятию приближенного решения задачи ЛП, рассмотренный в настоящей статье, может быть формализован несколько иначе, чем это было описано выше. Назовем ε -размытой постановкой $P_\varepsilon(A^0, b^0, c^0)$ задачи $P(A^0, b^0, c^0)$ оптимизационную проблему, заключающуюся в том, чтобы найти решение какой-либо задачи $P(A, b, c) \in FP_\varepsilon(A^0, b^0, c^0)$. Оптимальными планами ε -размытой задачи $P_\varepsilon(A^0, b^0, c^0)$ следует считать элементы множества $\cup \bar{X}(A, b, c)$, где объединение берется по всем наборам (A, b, c) , удовлетворяющим (13) или (1); множество приближенных (δ -оптимальных) решений можно определить аналогично с учетом рассуждений, относящихся к (9).

Задача $P_\varepsilon(A^0, b^0, c^0)$ не принадлежала к классу ЛП (и даже не будучи эквивалентна какой-либо задаче выпуклого программирования), обладает рядом преимуществ перед задачами ЛП. Так, теорема 2 показывает, что $P_\varepsilon(A^0, b^0, c^0)$ в некотором смысле проще, чем исходная задача $P(A^0, b^0, c^0)$: любой приближенный метод, вырабатывающий оптимальную пару векторов $\bar{x}, \bar{y}$ лишь в пределе, позволяет (в предположениях (1)) решить задачу $P_\varepsilon(A^0, b^0, c^0)$ за конечное число итераций. Другие важные свойства ε -размытой постановки, отсутствующие у стандартных оптимизационных моделей, исследованы в [6]. Там же приведен краткий обзор литературы по моделям, характеризующимся неоднозначностью в задании исходных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вересков А.И. Интерпретация приближенного решения задачи линейного программирования в терминах задачи с близкими параметрами // Основные направления математического моделирования экономических процессов, их математическое и программное обеспечение. Тр. науч. семинара. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1986.
2. Жаргал Д., Лебедев С.С. Задачи целочисленного программирования с нечеткими коэффициентами правой части // Экономика и мат. методы. 1988. Т. 24. Вып. 3.
3. Брэгман Л.М., Романовский И.В. Разверстка и оптимизация в задачах распределения // Исследование операций и статистическое моделирование. Вып. 3. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975.
4. Мягков В.Н., Пальчиков Н.С., Федоров В.П. Математическое обеспечение градостроительного проектирования. Л.: Наука, 1989.
5. Gzyl H. The Max-ent Approach to Linear Programming with Quadratic Errors // Math. Comput. Modelling. 1991. V. 15. № 1.
6. Вересков А.И., Гольштейн Е.Г. О задаче линейного программирования в размытой постановке // Экономика и мат. методы. 1986. Т. 22. Вып. 6.

Поступила в редакцию
4 II 1994