МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МОНЕТАРНАЯ ПОЛИТИКА И ЭФФЕКТИВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ*

© 1995 г. Данилов В.И., Кошевой Г.А., Сотсков А.И., Спивак В.А.

(*Москва*)

Работа посвящена влиянию денежной эмиссии и инфляции на эффективность распределения ресурсов, реализуемое стационарным конкурентным равновесием. Для этого рассматривается модель экономики с перекрывающимися поколениями и производством. Установлены условия существования равновесия. Для оптимальности равновесий необходимо, чтобы денежная политика была инфляционной. Получены некоторые результаты о сравнительной статике.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели инфляции условно можно разделить на две группы. Первая отражает краткосрочные аспекты, т.е. динамику инфляции и ее быстрое влияние на экономику, в частности на производство. Большую роль при этом играют ожидания инфляции и их подстройка под реализующие ее процессы. В принципе, инфляция тут возможна и без роста денежной массы. Эти важные вопросы в настоящей работе не рассматриваются.

Вторая группа охватывает долговременные аспекты. Здесь интерес связан со стационарными состояниями, возникающими при той или иной политике инфляции или денежной эмиссии. Данная статья как раз посвящена второй группе моделей. Мы рассматриваем модель экономики с перекрывающимися поколениями и производством. Правительство назначает политику денежной эмиссии. Предполагается, что экономика реагирует на нее установлением стационарного конкурентного равновесия. В силу стационарности более простыми становятся вопросы об оценке оптимальности той или иной денежной политики. В частности, появляется возможность проверки и осмысления знаменитого Чикагского правила, обсуждаемого в [1]. Согласно этому правилу, оптимальность наступает тогда, когда номинальная норма процента обращается в нуль. Основные выводы нашей работы таковы: среди стационарных равновесий есть оптимальные по Парето и они действительно соответствуют нулевой норме возврата на капитал, однако достигаются при очень сильной дефляции и низком благосостоянии. Гораздо более разумными выглядят равновесия, отвечающие политике, при которой норма инфляции близка к нулю. Кроме этого, нами получены некоторые результаты о существовании стационарных равновесий и о сравнительной статике.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-06-10917).

2. "ДЕЙСТВУЮЩИЕ ЛИЦА"

В качестве базовой берем модель, предложенную Мак-Каллумом [2]. В каком-то смысле это простейшая модель, пригодная для описания и исследования инфляции. Все потребительские продукты агрегируются в один однородный продукт, некое питательное желе, которое удовлетворяет все потребности людей. Инфляция – это изменение цен во времени, поэтому в модель входит время, $t = 1, \ldots$, которое мы полагаем дискретным. Все индивиды предполагаются устроенными одинаково и различаются только моментами рождения. Каждое поколение живет два периода (молодость и старость), в каждом периоде есть молодые и старые индивиды. И те, и другие потребляют продукт; различие между ними в том, что молодые часть своего богатства сберегают для последующего потребления в старости.

В модели продукт исключен как средство сбережения и сохранения стоимости, он считается тленным. Иначе говоря, наш продукт-желе существует лишь в пределах данного периода и не может преодолеть временну́ю границу между двумя соседними. Для преодоления этой границы имеется специальное средство – деньги, которые также являются необходимой частью любой модели инфляции.

Деньги – это просто бумажки, лишенные непосредственной потребительной ценности. Однако они могут пересекать временны́е границы; кроме того, люди знают, что на них можно покупать товары. Поэтому деньги выступают в качестве средства сохранения стоимости. Но это не единственная и не главная их роль в нашей модели. Они служат средством обращения, помогают осуществлять сделки *внутри* временно́го периода. Конечно, в рамках однородного продукта довольно натянуто выглядит необходимость в средстве обмена, но нужно помнить, что на самом деле продуктов много. Отдельный и непростой вопрос – как моделировать полезность денег в качестве средства обмена. Не вдаваясь в его обсуждение, мы просто считаем, что деньги явно входят в полезность потребителя. Чем больше у него денег, тем легче ему сделать нужные покупки и тем выше его полезность. В этом смысле деньги выступают как смазка при совершении сделок, в явном виде не входящих в модель.

Ясно, что количество денег играет решающую роль в развитии инфляции. Количество денег регулируется правительством, и главная цель этой работы – проследить, как та или иная денежная политика сказывается на состоянии экономики. На данном этапе мы игнорируем налогообложение и правительственные расходы.

Наконец, есть еще один участник нашей экономики – производство. В принципе, в простейшей модели можно было бы обойтись и без него, рассматривая начальные запасы (см., например, [3, 4]). Мы идем на такое усложнение модели по той причине, что один из наиболее интересных вопросов состоит как раз в том, что инфляция влияет на производство и благосостояние. Включение производства с необходимостью влечет появление двух дополнительных (кроме продукта и денег) товаров – капитала и труда. Предполагается, что продукт-желе в каждом периоде создается в процессе производства, в который вовлечены труд и капитал. Трудом обладают только молодые, старики же являются собственниками капитала. Капитал, как и продукт, создается в процессе производства, однако в отличие от продукта он способен пересекать временны́е границы. Для простоты мы считаем, что продукт в соотношении один к одному может превращаться в капитал (обратный переход запрещен), как бы застывает. Соединяясь с трудом в следующем периоде, капитал создает новое питательное желе; при этом он частично (или полностью) изнашивается.

3. ФОРМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЕНЕЖНОЙ ЭКОНОМИКИ

В период t (= 1,...) рождается N_t индивидов, каждый из которых живет в этом и следующем периоде. Считается, что популяция растет с постоянным темпом ν, так что $N_t = (1+\nu)N_{t-1}$. Все индивиды одинаковы и описываются функцией полезности $U(c, x, m)$. В ее аргументы входят: c – потребление в молодости, x – потребление в старости и m – количество денег (в реальном исчислении), с которым старик начинает второй период своей жизни. Как уже говорилось, вхождение денег в функцию полезности призвано отразить роль денег как *средства обращения*. Наличие денег облегчает сделки, экономит время поиска товара. В таком случае довольно естественным выглядит предположение, что существует уровень "насыщения" $\hat{m}(x)$, выше которого деньги уже не нужны, не увеличивают полезность.

В молодости каждый индивид обладает единицей специфического товара – *труда*, который он может потратить на производстве. Выпущенный продукт идет на потребление и молодых и стариков и на капитал k_{t+1}, который будет использован только в следующем периоде.

Производство задается производственной функцией (ПФ) $f(l, k)$, зависящей от труда l и капитала k. Предполагается, что f вогнута и однородна степени 1. В процессе производства капитал частично изнашивается. Мы будем этот частично сохранившийся капитал включать в выпуск и считать, что капитал в ходе производства расходуется полностью.

Наконец, есть правительство, роль которого в нашей упрощенной модели сводится только к регулированию денежной массы. Никаких государственных расходов оно не делает. Напечатав некоторое количество денежных купюр, оно раздает их населению. Для определенности будем считать, что эти деньги (сеньеридж) достаются старикам. Напротив, если правительство решает сократить денежную массу, оно изымает деньги у стариков. Норма роста массы денег обозначается μ_t; это значит, что масса наличности в период t равна $M_t = (1+\mu_t)M_{t-1}$. Денежная политика (т.е. последовательность μ_t) предполагается известной всем.

Состояние экономики в момент t характеризуется величинами (c_t, x_t, m_t, k_t), где c_t – потребление каждого молодого индивида; x_t – потребление стариков; m_t –деньги (в реальном исчислении) у старика в начале периода t; k_t – капитал, которым обладает старик в этом периоде. Траектория (т.е. последовательность состояний) допустима, если выполняется балансовое соотношение $f(N_t, N_{t-1}k_t) \geqslant N_{t-1}x_t + N_t c_t + N_t k_{t+1}$. С учетом однородности f его можно переписать так

$$f(1+\nu, k_t) \geqslant x_t + (1+\nu)(c_t + k_{t+1}). \tag{1}$$

Для полноты картины отметим, что первое поколение нужно задавать отдельно. В первом периоде живут N_0 стариков, у которых, быть может, есть деньги m_1 (или M_1). Кроме того, в начальный момент должно быть задано либо начальное количество Y_1 питательного желе, либо начальный (душевой) капитал k_1.

Замечание. Население растет с темпом ν. Существует чисто формальное преобразование, которое позволяет считать $\nu = 0$, т.е. считать численность населения постоянной. Это слегка упрощает формулы, и в дальнейшем будем предполагать $\nu = 0$.

В самом деле, рассмотрим новую экономику с функциями полезности $\tilde{u}(c,x,m) = u(c,(1+\nu)x,(1+\nu)m)$, $\tilde{f}(l,k) = f(l, k/(1+\nu))$ и постоянной численностью населения. Пусть $(\tilde{c}_t, \tilde{x}_t, \tilde{m}_t, \tilde{k}_t)$ – допустимая траектория в новой экономике, так что $\tilde{f}(1,k_t) \geqslant \tilde{x}_t + (\tilde{c}_t + k_{t+1})$. Положим $c_t = \tilde{c}_t$, $x_t = (1+\nu)\tilde{x}_t$, $m_t = (1+\nu)\tilde{m}_t$, $k_t = \tilde{k}_t$ $\forall t$. Тогда $f(1+\nu, k_t) = (1+\nu)f(1, \tilde{k}_t/(1+\nu)) = (1+\nu)\tilde{f}(1,\tilde{k}_t) \geqslant (1+\nu)(\tilde{x}_t + \tilde{c}_t + \tilde{k}_t) = x_t + (1+\nu)(c_t + k_{t+1})$. И мы получаем, что (c_t, x_t, m_t, k_t) – траектория в старой экономике, дающая поколениям ту же полезность.

4. ДОПУСТИМЫЕ И ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Наша экономическая система может функционировать по-разному. Начиная со следующего раздела мы будем рассматривать равновесный механизм. Каждый механизм функционирования порождает некоторую допустимую траекторию экономики. Будем оценивать их с позиций благосостояния, т.е. тех полезностей, которые получает то или иное поколение. Напомним, что население не растет и можно даже считать, что каждое поколение состоит из одного индивида.

Для каждой траектории (c_t, x_t, m_t, k_t) рассмотрим последовательность полезностей различных поколений $U_t = u(c_t, x_{t+1}, m_{t+1})$. Одну траекторию x можно считать лучше другой x', если для любого периода t выполняется $U_t(x) > U_t(x')$. Это приводит к понятию оптимальности по Парето. Мы используем другой способ оценки: фиксируем неотрицательные весовые коэффициенты β_t, $t \geqslant 0$, и образуем критерий в виде

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t U_t.$$

Предполагается, что функция u строго возрастает по c, x и нестрого по m. Тогда в оптимальных состояниях неравенства (1) выполняются как равенства. Какие еще условия налагает требование оптимальности W? Предположим, что функции u и f дифференцируемы; тогда, согласно методу Лагранжа, для оптимальной траектории существуют такие ненулевые множители λ_t, что при $t \geqslant 1$

$$\beta_t \partial u / \partial c(c_t, x_{t+1}, m_{t+1}) = \lambda_t,$$

$$\beta_t \partial u / \partial x(c_t, x_{t+1}, m_{t+1}) = \lambda_{t+1}, \quad t = 0 \quad \beta_0 \partial u / \partial x(x_1, m_1) = \lambda_1,$$

$$\partial u / \partial m(c_t, x_{t+1}, m_{t+1}) = 0,$$

$$\lambda_{t+1} f_2(1, k_{t+1}) = \lambda_t.$$

Первые два означают, что $u_1 / u_2 = \lambda_t / \lambda_{t+1}$; третье – насыщение по деньгам, четвертое – оптимальность работы производства, которое можно переписать в виде $f_2(1, k_{t+1}) = \lambda_t / \lambda_{t+1}$. Таким образом, предельная производительность (будущего) капитала должна равняться предельной норме замещения между нынешним и последующим потреблением, что совершенно ясно и без формул. Неявно подразумевается также, что должна быть полная занятость.

Эти условия необходимы для оптимальности, но при гипотезах выпуклости и суммируемости λ_t также и достаточны. Последнее обеспечивается, если $f_2(1, k_t) \geqslant C > 1$ для больших t.

Нас особо будут интересовать стационарные траектории, когда душевые реальные переменные остаются одними и теми же для всех поколений (кроме, быть может, нулевого). В таком случае величины c_t, x_{t+1}, m_{t+1}, k_{t+1} для $t \geqslant 1$ обозначаются просто как c, x, m и k. В стационарном случае условия оптимальности принимают вид

$$\beta_t \partial u / \partial c(c, x, m) = \lambda_t,$$

$$\beta_t \partial u / \partial x(c, x, m) = \lambda_{t+1}, \qquad t = 0 \beta_0 \partial u / \partial x(x_1, m_1) = \lambda_1,$$

$$\partial u / \partial m(c, x, m) = 0,$$

$$\lambda_{t+1} f_2(1, k) = \lambda_t.$$

Из первой строчки $\beta_t / \beta_{t+1} = \lambda_t / \lambda_{t+1}$. Вместе с последней это дает $f_2(1, k) = \beta_t / \beta_{t+1}$, откуда следует, что $\beta_t = \beta^t$, где $\beta < 1$ временной дисконт. Тем самым получаем ограничение на производство (капитал) $f_2(1, k) = \beta^{-1} > 1$.

Итак, в стационарном случае мы имеем следующие (необходимые) условия оптимальности (для критерия $W = U_0 + (\beta / 1 - \beta)U$, где $U = u(c, x, m)$): 1) насыщение по деньгам; 2) $u_1 / u_2(c, x, m) = f_2(1, k)$; 3) $f_2(1, k) \geqslant 1$.

Забывая о нулевом поколении, можно интересоваться также максимизацией полезности стабильных поколений $U = u(c, x, m)$; это соответствует случаю $\beta = 1$, который мы также считаем оптимальным.

Численный пример. Проиллюстрируем сказанное на простом примере, к которому мы еще вернемся. Полезность $u(c, x, m) = \log(c) + \log(x)$. Так как деньги пока не участвуют, мы исключаем зависимость полезности от них. Полезность нулевого поколения просто равна потреблению: $u_0 = x_1$.

В качестве ПФ берем функцию Кобба – Дугласа, точнее, $f(1,k) = k^{\gamma} / \gamma$, где $0 < \gamma < 1$. Множитель γ^{-1} введен для нормировки. В этом случае максимальный чистый выпуск достигается при $k = 1$.

Напомним условия оптимальности. Насыщение по деньгам здесь не играет роли, поскольку от денег ничего не зависит. Остаются два других условия: $u_1 / u_2(c, x, m) = f_2(1, k) \geqslant 1$. В нашем случае $u_1 = 1/c$, $u_2 = 1/x$ и $f_2(1,k) = k^{\gamma-1}$. Так мы получаем c, x и x_1 параметрически как функции от $k \leqslant 1$; чистый выпуск равен $k^{\gamma}/\gamma - k$, c и x делят его в пропорции $1/(1+k^{\gamma-1})$ и $k^{\gamma-1}/(1+k^{\gamma-1})$, поэтому $c = (k^{\gamma}/\gamma - k)/(1+k^{\gamma-1})$, $x = k^{\gamma-1}(k^{\gamma}/\gamma - k)/(1+k^{\gamma-1})$, $x_1 = Y_1 - (k^{\gamma}/\gamma - k)/(1+k^{\gamma-1}) - k$.

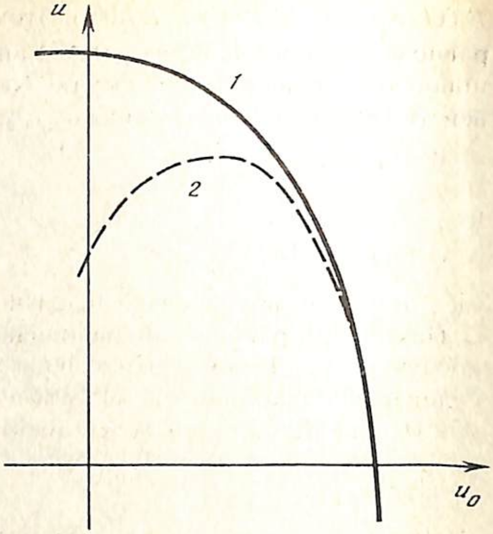

Рис. 1. *1* – граница Парето; *2* – равновесия

Полученная граница Парето на плоскости U и U_0 изображена на рис. 1. Там же пунктирной линией показаны полезности равновесных стационарных траекторий.

5. ДЕНЕЖНЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Перейдем к рассмотрению действия равновесного денежного механизма формирования траектории $(c_t, x_t, k_t, m_t)_{t \geqslant 1}$. Считается, что имеются конкурентные рынки труда, продукта, капитала и денег. В периоде t действуют цены P_t, т.е. единица продукта состоит P_t единиц денег. Так как капитал прямо соотносится с продуктом, его цена также равна P_t; цена труда – W_t. Молодой человек, продав свою единицу труда, получает деньги. Он их тратит на потребление c_t, инвестирует в капитал k_{t+1} и откладывает на будущее S_t. Получается соотношение $W_t = P_t(c_t + k_{t+1}) + S_t$.

В следующем периоде $t + 1$ этот индивид имеет такую наличность: сбережения S_t плюс полученные от правительства напечатанные деньги в количестве $\Delta M_{t+1} = \mu_{t+1} M_t$. Поэтому его деньги $P_{t+1} m_{t+1} = S_t + \mu_{t+1} M_t$. Кроме того, в течение периода $t + 1$ он получает доход от прошлых инвестиций в капитал. Если i_{t+1} – реальная норма процента, то он имеет дополнительно $k_{t+1}(1 + i_{t+1})P_{t+1}$, и его потребление x_{t+1} составит $P_{t+1} x_{t+1} = S_t + \mu_{t+1} M_t + P_{t+1} k_{t+1}(1 + i_{t+1})$. Удобно представить это в виде одного бюджетного ограничения. Запишем P_{t+1} как $P_t(1 + \pi_{t+1})$, исключим k_{t+1} и выразим S_t через m_{t+1}. В результате получаем "бюджетное соотношение"

$$P_t c_t + P_t (x_{t+1} - m_{t+1}) / (1 + i_{t+1}) + P_{t+1} m_{t+1} = W_t + \mu_{t+1} M_t, \tag{2}$$

в которое уже не входит k_{t+1}, и

$$k_{t+1} = (x_{t+1} - m_{t+1}) / (1 + i_{t+1}). \tag{3}$$

При ограничении (2) потребитель максимизирует свою полезность $u(c_t, x_{t+1}, m_{t+1})$; формула (3) выражает предложение капитала.

Со своей стороны производство (периода t) максимизирует прибыль, равную

$P_t f(L,K) - W_t L - P_t(1+i_t)K$. При этом оно предъявляет спрос на труд и капитал. В равновесии спрос на труд равен единице, а на капитал – k_t. Уже отсюда видно, что прибыль должна равняться нулю. Кроме того, для дифференцируемой функции f равенство спроса и предложения на труд и капитал дают обычные соотношения

$$W_t = P_t f_1(1,k_t) \tag{4}$$

и

$$(1+i_t) = f_2(1,k_t), \tag{5}$$

где f_1 и f_2 – частные производные ПФ $f(L,K)$ по первой и второй переменным.

Наконец, в равновесии выполняются балансы по продукту и деньгам. Баланс по продукту – (1). В конце периода t все деньги M_t должны сосредоточиться у молодого человека; только он предъявляет на них спрос в размере S_t. Так мы получаем условие $S_t = M_t$, или $M_t = P_t m_t$ для всех моментов t, или

$$(1+\pi_{t+1})m_{t+1} = (1+\mu_{t+1})m_t. \tag{6}$$

Ниже будет показано, что баланс по продукту (1) является формальным следствием остальных балансов.

Подводя итог, можно определить *равновесную траекторию* (при заданной денежной политике (μ_t)) как такую траекторию реальных величин (c_t, x_t, m_t, k_t) и ценовых показателей w_t, i_t и π_t, что:

а) потребитель максимизирует полезность $u(c_t, x_{t+1}, m_{t+1})$ при бюджетном ограничении (2), которое можно переписать в виде

$$c_t + (x_{t+1} - m_{t+1})/(1+i_{t+1}) + (1+\pi_{t+1})m_{t+1} = w_t + \mu_{t+1}m_t. \tag{7}$$

Условия максимума первого порядка имеют вид: $u_1/u_2 = 1+i_{t+1}$ и $u_3 + u_2 = (1+\pi_{t+1})u_1$, где u_1, u_2 и u_3 – производные функции u по первой, второй и третьей переменным в точке (c_1, x_{t+1}, m_{t+1});

б) $k_t = (x_t - m_t)/(1+i_t)$;

в) производство максимизирует прибыль; это сводится к соотношениям (4) и (5): $w_t = f_1(1,k_t)$ и $(1+i_t) = f_2(1,k_t)$;

г) выполнен баланс по деньгам (6) $(1+\pi_{t+1})m_{t+1} = (1+\mu_{t+1})m_t$. Как отмечалось, в этом случае выполнен и баланс по продукту (1). В самом деле, по формуле Эйлера

$$f(1,k_t) = w_t + k_t(1+i_t) = k_t(1+i_t) + c_t + (x_{t+1} - m_{t+1})/(1+i_{t+1}) + (1+\pi_{t+1})m_{t+1} - \mu_{t+1}m_t =$$
$$= x_t - m_t + c_t + k_{t+1} + m_t = c_t + x_t + k_{t+1}.$$

Наконец, остается вопрос относительно первого периода. Если считать, что старики уже обладают неким начальным количеством капитала k_1 (и денег M_0), то никаких изменений не требуется (нужно только помнить, что полезность u_0 зависит от x_1 и m_1). Сложнее, если считать, что в начальный момент есть некое фиксированное количество продукта Y_1. В этом случае не уточняется, кому какая его часть принадлежит, т.е. не определено право собственности, и понятие равновесия затруднено.

Мы интересуемся воздействием монетарной политики правительства на экономику. Политика – это выбор траектории (M_t) или (μ_t). Предполагается, что экономика реагирует на это такими ценами P_t, что реализуется равновесие в каждый момент. Но при любой ли денежной политике существуют равновесия? Если существуют, то как ведут себя цены? Например, если денежная политика стационарна ($\mu_t = \mu$ не зависит от t), то будет ли равновесная траектория сходиться к стационарному равновесию? Эти вопросы нуждаются в дополнительном изучении.

6. РАВНОВЕСИЕ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

Почему нас интересуют равновесные траектории? Во-первых, можно надеяться, что экономика, предоставленная сама себе, выходит именно на равновесия. Во-вторых, в классических моделях равновесные состояния автоматически оказываются оптимальными. Известно, правда, что в моделях с перекрывающимися поколениями (а этому классу принадлежит и наша модель) это не всегда так. Рассмотрим этот вопрос более обстоятельно.

Напомним, что условия оптимальности, полученные ранее, сводились к $u_1 / u_2(c_t, x_{t+1}, m_{t+1}) = f_2(1, k_{t+1})$ и $u_3(c_t, x_{t+1}, m_{t+1}) = 0$ (насыщение по деньгам).

Мы видели, что равновесные траектории автоматически удовлетворяют первому условию оптимальности. Поэтому вопрос об оптимальности равновесных траекторий сводится к выполнению условия насыщения по деньгам, т.е. к $u_3 = 0$. Так как в равновесии $u_1 / u_2 = 1 + i_{t+1}$ и $u_3 + u_2 = (1 + \pi_{t+1})u_1$, то $(1 + \pi_{t+1})(1 + i_{t+1}) \geqslant 1$, и $u_3 = 0$ эквивалентно равенству $(1 + \pi_{t+1})(1 + i_{t+1}) = 1$. Последнее означает равенство нулю *номинальной* нормы процента для оптимальных равновесных траекторий. Но это не что иное, как знаменитый тезис М. Фридмэна (см. [1]).

Нужно, однако, отметить, что $u_3 = 0$, или правило Фридмэна, является всего лишь необходимым условием оптимальности. И надо либо поискать дополнительные необходимые условия, либо обратиться к достаточным. Из необходимых можно воспользоваться критерием $\sum 1 / P_t = \infty$ (см. [5]), смысл которого в том, что цены не должны расти слишком быстро. Это близко к требованию безынфляционности денежной политики правительства. Если обратиться к достаточным условиям, то, как говорилось, нужно потребовать, чтобы множители Лагранжа λ_t стремились к нулю при $t \to \infty$. Так как $f_2(1, k_{t+1}) = \lambda_t / \lambda_{t+1}$, то $f_2(1, k_{t+1})$ должно быть больше (или равно) единице при достаточно больших t. Поскольку при выполнении условия насыщения по деньгам $f_2(1, k_{t+1}) = (1 + \pi_{t+1})^{-1}$, мы приходим к ограниченности цен, т.е. снова к требованию $\mu_t \leqslant 0$ при больших t.

Таким образом, если нас интересуют лишь оптимальные равновесия, то: 1) денежная политика правительства должна быть безынфляционной, 2) необходимо выполнение правила Фридмэна о равенстве нулю номинальной нормы процента. Приведенная в [1] сильная форма тезиса Фридмэна предписывает правительству устанавливать такую норму сокращения денежной массы, которая понижает номинальный процент до нуля. Остаются, однако, некоторые вопросы. Быть может, любая (неинфляционная) политика удовлетворяет правилу Фридмэна? А если не любая, то существует ли оптимальная политика вообще? И наконец, удовлетворит ли нас получающийся результат, даже если он и оптимален?

Видимо, ответы в общем случае не просты и не однозначны. Далее мы сосредоточим внимание на стационарных равновесных траекториях, которые позволят нам продвинуться вперед.

7. СТАЦИОНАРНЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим стационарный случай. Это значит, что все душевые величины c_t, x_t, m_t, k_t, а также нормы роста денежной массы μ_t, процента i_t и инфляции π_t не зависят от t (и обозначаются просто c, x, m, k, μ, i и π). Вспоминая определение равновесия, получим следующие уравнения:

$$c + (x - m) / (1 + i) + (1 + \pi)m = w + \mu m, \quad u_1 / u_2 = 1 + i \text{ и } u_3 + u_2 = (1 + \pi)u_1$$

(производные берутся в точке (c, x, m)), $k = (x - m)/(1 + i)$, $w = f_1(1, k)$, $(1 + i) = f_2(1, k)$ и $(1 + \pi)m = (1 + \mu)m$. При m, отличном от нуля, последнее уравнение дает важное и очевидное соотношение: $1 + \pi = 1 + \mu$, т.е. темп инфляции в нерастущей экономике равен темпу увеличения массы денег (если население растет темпом ν, то $1 + \pi = (1 + \mu)/(1 + \nu)$). Процент i выражается через $f_2(1, k)$, w – через $f_1(1, k)$. Первое уравнение можно переписать как $c + k + m = w = f_1(1, k)$, а x выразить через k и m: $x = kf_2(1, k) + m$. Окончательно получаем уравнения для четырех переменных

$$m = f_1(1, k) - k - c, \tag{8}$$

$$x = kf_2(1, k) + m, \tag{9}$$

$$u_1 = u_2 f_2(1, k), \tag{10}$$

$$u_3 + u_2 = (1 + \mu)u_1. \tag{11}$$

Мы предлагаем так понимать стационарные равновесия. Правительство фиксирует некоторую денежную политику μ; экономика реагирует на нее установлением стационарного равновесия. Конечно, для оправдания такого взгляда хорошо бы знать, что произвольные равновесные траектории сходятся к стационарным. В некоторых числовых примерах это так, но каких-либо общих утверждений нам получить не удалось. Поэтому возникают вопросы:

1. Влияет ли вообще денежная политика на реальные переменные (вопрос о супернейтральности денег)? Конечно, влияет, и это видно из (11). Отсюда – другие вопросы.

2. Как влияет инфляция (или, точнее, денежная политика правительства) на производство, потребление и сбережения?

3. При какой политике равновесное стационарное состояние будет оптимальным?

Темп инфляции μ нужно воспринимать как параметр и выяснить, при каких μ система разрешима, как c, x, m и k (а также полезность $u(c, x, m)$) зависят от μ. Более удобна, однако, точка зрения, когда мы задаемся k и интересуемся разрешимостью первых трех уравнений (8)–(10), а (11) используем для нахождения соответствующего μ. С этой точки зрения c, x, m и μ являются функциями от k.

Дальнейшие результаты о стационарных равновесиях можно разделить на три группы: существование, сравнительная статика и численные расчеты.

8. СУЩЕСТВОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РАВНОВЕСИЙ

Приведем некоторые (далекие от полноты) результаты о существовании стационарных равновесий. Точнее, речь будет идти о разрешимости первых трех уравнений (8)–(10), тогда как μ находится по формуле $1 + \mu = (u_2 + u_3)/u_1$.

Существование доказывается при некоторых предположениях. Сначала общие и привычные условия: полезность $u(c, x, m)$ определена при положительных c, x, m, вогнута, непрерывно дифференцируема, строго монотонна по c и x и (нестрого) по m. Производственная функция $f(l\ k)$ дифференцируема, вогнута, монотонна и однородна первой степени, поэтому она описывается функцией одной переменной $f(1, k)$, которую мы для краткости будем обозначать $f(k)$. Также обозначим $f_1(k) = (\partial f / \partial l)(1, k)$ и $f_2(k) = (\partial f / \partial l)(1, k)$; заметим, что $f_2 = f'$, а $f_1 = f - kf_2$, так что $f_1 < f$.

Более специальные условия. Для краткости пусть $C(k) = f_1(k) - k$ и $X(k) = kf_2(k)$; $C(k) + X(k) \equiv f(k) - k$. Для существования даже одного равновесия нужно, конечно, чтобы хоть в одной точке $\bar{k}$ $C(\bar{k})$ было (строго) больше нуля. Наше первое специальное условие: на некотором интервале $(0, \bar{k})$ C не только строго больше нуля, но и достаточно велико по сравнению с X. Более точно,

А) существует константа $A > 0$, такая что $X(k) / C(k) \leqslant A \forall k$ из интервала $0 < k < \bar{k}$;

Б) $u(c, x, m) = \upsilon(c) + w(x, m)$;

В) для любого $x > 0$ существует предел $w_x(x, m)$ при $m \to 0$, который обозначим

$w_x(x,0)$. Более того, существует константа $B > 0$, при которой $\upsilon_c(c / w_x(x,0) \leqslant$ $\leqslant Bx / c \forall c, \quad x > 0$;

Г) $f_2(\bar{k}) > AB$.

Теорема 1. *В предположениях* А)–Г) *для любого* $k < \bar{k}$ *существует равновесие.*

Доказательство. Из первых двух уравнений (8) и (9) выразим m и x как функции k и c: $m = f_1(k) - k - c = C(k) - c, \quad x = m + kf_2(k) = m + X(k)$. В силу положительности m c должно быть $< C(k)$; x в этом случае автоматически будет положительным. Нам нужно убедиться, что на интервале $0 < c < C(k)$ разрешимо уравнение

$$\upsilon'(c) = f_2(k) w_x(X(k) + C(k) - c, C(k) - c). \tag{12}$$

Из условия В) видно, что при $c \to 0$ $\upsilon'(c)$ стремится к бесконечности, так что левая часть меньше правой. Когда же c стремится к $C(k)$, правая часть стремится к $f_2(k)w_x(X(k),0)$. Для левой части $(c \to C(k))$ мы имеем оценку (см. В)): $\upsilon'(C(k)) \leqslant$ $\leqslant w_x(X(k),0)BX(k)/C(k)$. Согласно А) $X(k)/C(k) \leqslant A$. Из условия Г) $AB < f_2(\bar{k}) \leqslant f_2(k)$ (последнее вытекает из вогнутости f). Таким образом, окончательно левая часть (12) при $c = C(k)$ меньше правой. В силу непрерывности обеих частей получаем, что при некотором c из интервала $(0, C(k))$ левая и правая части равны, что и означает равновесие.

Замечание. Левая часть $\upsilon'(c)$ монотонно убывает, как следует из вогнутости υ. Если же выполнено условие $w_{xx} + w_{xm} \leqslant 0$ (заметим, что согласно вогнутости $w_{xx} \leqslant 0$), то функция $w_x(f(k) - k - c, f_1(k) - k - c)$ монотонно возрастает. Поэтому (12) имеет единственное решение, непрерывно зависящее от k, которое обозначим $c(k)$. Соответствующие равновесные x, m, μ тоже становятся функциями от k. Исследования их зависимости от k – задача сравнительной статики.

Теперь обратимся к вопросу о том, при каких μ можно гарантировать существование равновесий. Сделаем следующие дополнительные предположения:

Д) функция $w_x(x, m)$ не убывает по m;

Е) $f_2(0) = +\infty$;

Ж) если отношение m/x больше $1/(A + 1)$, то имеется насыщение по деньгам, т.е. $w_m(x,m) = 0$ при $m \to x/(A + 1)$.

Покажем, что в этом случае равновесия, соответствующие малым k, насыщены по деньгам. В самом деле, рассмотрим снова соотношение (12). Правая часть его в силу убывания w_x по x больше или равна $f_2(k)w_x(X(k) + C(k), C(k) - c)$, а согласно Д), это больше или равно $f_2(k)w_x(X(k) + C(k), 0)$. По В) это больше или равно $f_2(k)\upsilon'(c)c / B(X(k) + C(k))$. Сокращая на $\upsilon'(c)$, мы получаем неравенство $c(k) \leqslant B(X(k) + C(k)) / f_2(k)$, или $x(k) \geqslant (f(k) - k)(1 - B / f_2(k))$.

Рассмотрим отношение $m(k)/x(k) = 1 - X(k)/x(k)$. Согласно А) $X(k) \leqslant (f(k) - k) - A/(1 +$ $+ A)$. Поэтому $m(k) / x(k) \geqslant 1 - A / (1 + A)(1 - B / f_2(k))$. В силу Е) при $k \to 0$ $f_2(k)$ стремится к бесконечности и отношение $m(k)/x(k)$ приближается к $1/(A + 1)$. Согласно Ж) мы получаем насыщение по деньгам. А раз так, то при малых k $1 + \mu = (u_2 + u_3) / u_1 = u_2 / u_1 = 1 / f_2(k)$, т.е. $\mu(k) = 1 - 1 / f_2(k)$ монотонно возрастает начиная от нуля при $k = 0$. Поэтому при малых μ равновесия существуют (и оптимальны по Парето). Тем самым доказана вторая часть следующей теоремы.

Теорема 2. *В предположениях* А)–Ж) *равновесия существуют при любых* $\mu > -1$. *Если* μ *достаточно малы, то существуют равновесия, в которых имеется насыщение по деньгам.*

В самом деле, при малых k равновесия, как было показано, существуют и дают μ, близкие к -1. Существование продолжается по крайней мере до $\bar{k}$, а может быть, и дальше. Почему существование может прекратиться? Только за счет того, что $m(k)$ становится все меньше и стремится к нулю. Но тогда $u_3 = w_m(C(k),0)$ обращается в $+\infty$ (это надо потребовать, либо понимать условие (11) как неравенство: $u_2 + u_3 \leqslant (1+\mu)u_1$, если $m = 0$). Таким образом, интервал отвечающих равновесиям значений μ идет от -1 до $+\infty$.

Остается убедиться, что при некотором k $m(k)$ обратится в нуль. В самом деле, допустим, что при всех $k > 0$ $m(k) > 0$. Тогда и $f_1 - k = c + m \geqslant 0$, т.е. $f \geqslant k(f' + 1)$. Покажем, что такого быть не может. Пусть $\alpha = \inf(f'(k), k > 0)$; тогда $f(k) \geqslant k(\alpha + 1)$ $\forall k$. Но в этом случае из вогнутости f) f' в любой точке $\geqslant \alpha + 1$, что противоречит построению α.

То, что приведенные условия не являются невыполнимыми или неестественными, видно из приводимого ниже конкретного примера.

9. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Полезность потребителей мы берем логарифмической: $u(c, x, m) = \log(c) + \log(x) + \varepsilon \min(\log(10m/x), 0)$. Последний член учитывает полезность денег для целей обращения. Здесь считается, что денег m в количестве 1/10 от x – потребления во втором периоде – вполне достаточно*; если их меньше, потребитель начинает испытывать неудобство и терять в полезности (с малым коэффициентом ε). Конечно, эта функция не дифференцируема при $m = 0{,}1x$, но это не столь важно. Видно, что условие Б) выполнено; так как $\upsilon'(c) = 1/c$ и $w_x(x,m) = (1-\varepsilon)/x$ при малых m, условие В) тоже выполняется.

Берем ПФ вида $f(l,k) = \gamma^{-1} l^{1-\gamma} k^{\gamma}$; $f_1 = (1-\gamma)k^{\gamma}/\gamma$, $f_2 = k^{\gamma-1}$. Для этой функции $X(k) = k^{\gamma}$, а $C(k) = (1-\gamma)k^{\gamma}/\gamma - k$; поэтому $X(k)/C(k)$ стремится к $\gamma(1-\gamma)$ при $k \to 0$, так что условие А), как и Г), Е), выполняется. Если $\gamma < 0{,}9$, то выполнено и Ж).

Рассмотрим соотношение $u_1 = f_2 u_2$: $u_1 = 1/c$, $u_2 = (1-\varepsilon)/x$. Считая $\varepsilon \approx 0$, получаем $x \approx k^{\gamma-1}c$ и (из $x + c = f(k) - k$) $c = (f(k) - k)/(1 + f_2)$, т.е. $c = 1/(1 + f_2)$ от чистого выпуска. Другую его долю $f_2/(1 + f_2)$ составляет x. Как отмечалось в теореме 2, при малых k имеется насыщение по деньгам. Поэтому $(1+\mu) = 1/f_2 = k^{1-\gamma}$, и μ монотонно растет вместе с k. Однако начиная с некоторого значения k (зависящего от γ), m становится малым по сравнению с x, насыщение по деньгам прекращается, появляется ненулевая u_3, и $1+\mu = f_2(k)^{-1} + u_3/u_1 = k^{1-\gamma} + \varepsilon c/m$ довольно быстро устремляется к бесконечности.

Когда же $m(k)$ обращается в нуль и система (8)–(10) становится неразрешимой? Тогда, когда $c(k) = f_1(k) - k$. Так как $c(k) \approx (f-k)/(1+f_2)$, мы получаем $f_1 - k + f_1 - kf_2 \approx f - k$, или $f_1 f_2 \approx 2kf_2$, или $2k \approx f_1 = (1-\gamma)k^{\gamma}/\gamma$. Поэтому для правого конца $\hat{k}$ интервала разрешимости имеем $\hat{k} \approx \left(\dfrac{1-\gamma}{2}\right)^{1/(1-\gamma)}$. При $\gamma = 0{,}5$ $\hat{k} \approx 0{,}25$; при $\gamma = 0{,}2$ $\hat{k} \approx 2{,}3$.

Мы описали поведение μ на краях отрезка $(0, \hat{k})$. Где-то в промежуточной точке μ должно обращаться в нуль. Ясно, что это происходит всегда левее $k = 1$. В самом деле, мы знаем, что номинальный процент $(1+\mu)f_2$ всегда больше или равен 1; так как $f_2(1) = 1$, то $(1 + \mu) \geqslant 1$, т.е. $\mu \geqslant 0$. Если в точке $k = 1$ есть насыщение по деньгам (т.е. $m(1) \geqslant x(1)/10$), то $\mu(1) = 0$; например, это так при $\gamma = 0{,}3$ и $0{,}2$. Что еще видно из

* Множитель 1/10 взят условно; однако это же число приводит М. Фридмэн в [6] при сравнении денежных сбережений к годовому доходу.

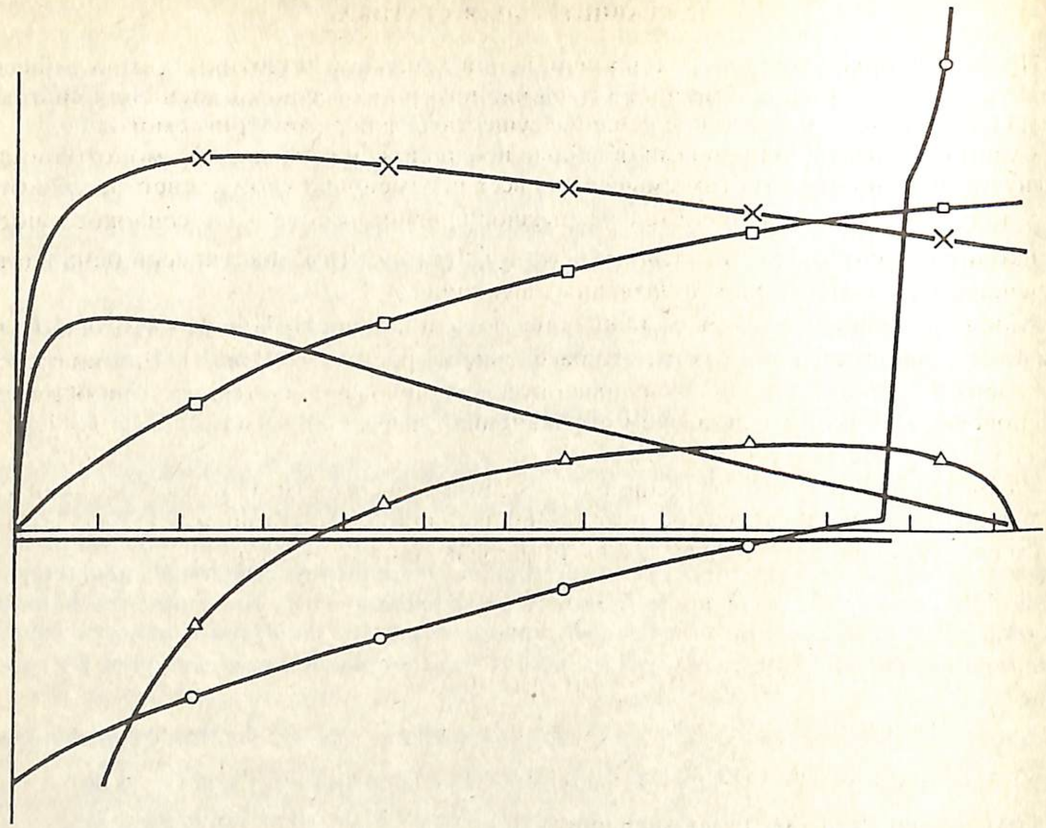

Рис. 2

примеров? То, что $c(k)$ и $\mu(k)$ монотонны по k, тогда как $x(k)$ и $m(k)$ сначала растут, а потом убывают. Видно также, что полезность $U(k) = u(c(k), x(k), m(k))$ достигает максимума в точке $k = 1$, если эта точка входит в интервал разрешимости и имеется насыщение по деньгам. В следующем разделе мы увидим, что это не случайно.

Главное же должно относиться к благосостоянию – какая политика (т.е. какое μ) дает наибольшее благосостояние? Рассмотренные примеры подсказывают следующий ответ. Если точка $k = 1$ (или $\mu = 0$) входит в область оптимальности, то это – наилучшая политика. Тут есть и парето-оптимальность, и полезность стабильных поколений максимальна, и правительству не нужно беспокоиться о печатанье денег или сборе налогов. Если же $\mu(1) > 0$, ответ не столь однозначен. Казалось бы, что (в соответствии с тезисом Фридмэна) нужно взять наибольшее отрицательное μ, при котором все еще имеется насыщение по деньгам. Примеры, однако, показывают, что это может происходить при малом значении полезности u. Нам представляется, что не стоит слепо гнаться за парето-оптимальностью; за счет небольшой потери для нулевого поколения иногда удается достичь значительного увеличения полезности всех остальных поколений. Так что и в этом случае денежная политика правительства должна заключаться в выборе μ, близкого к нулю, а может быть, даже небольшой инфляции.

Результаты расчетов при $\gamma = 0{,}3$ (и $\varepsilon = 0{,}1$) приведены на рис. 2. По горизонтальной оси откладываются k. Кривая X изображает функцию $x(k)$, помеченная квадратом – $c(k)$, кружком – $\mu(k)$, V – полезность $U = u(c(k), x(k), m(k))$. Ничем не помеченная кривая изображает график функции $m(k)$.

Проанализируем влияние малых изменений денежной политики (темпа эмиссии денег μ) на реальные переменные стационарного равновесия, т.е. решения системы (8)–(11), предполагая, что такое решение существует для рассматриваемого μ.

Будем считать выполненными обычные предположения гладкости, монотонности, вогнутости, причем в строгом смысле для всех переменных, кроме денег m, для которых допускается насыщение. Более серьезное предположение – это сепарабельность функции полезности, т.е. $u(c,x,m)=u^{(1)}(c)+u^{(2)}(x)+u^{(3)}(m)$. Фактически речь идет о равенстве нулю смешанных производных функции u.

Как и прежде, полагаем положительную однородность ПФ $f(n,k)=nf(1,k/n)$, $n=1+\nu$. Для простоты считаем, что население не растет: $\nu=0$, $n=1$. Для краткости аргументы функций и их производных опускаем (подразумевается, что они берутся в равновесной точке) и используем обозначения $f=f(1,k)$, $f'=f_2(1,k)$, $f''=f_{22}(1,k)$. В силу однородности $f_1(1,k)=f-kf'$.

Хотя нас интересует поведение равновесий в зависимости от μ, удобнее, как уже отмечалось, изучать зависимость от k. Дифференцируя соотношения (8)–(11), получаем следующие формулы для c', x, m', μ' (производные берутся по k)

$$c'=\Delta_c/\Delta_k,\quad x'=\Delta_x/\Delta_k,\quad m'=\Delta_m/\Delta_k,\quad \mu'=\Delta/\Delta_k, \tag{13}$$

где

$$\Delta_c=-u_1[\alpha_1u_{22}f'+u_2f''],\quad \Delta_x=-u_1[\alpha_1u_{11}-u_2f''],$$

$$\Delta_m=u_1[\alpha_2u_{11}+\alpha_3u_{22}f'+u_2f''],\quad \Delta_k=-u_1[u_{11}+u_{22}f'],$$

$$\Delta=\alpha_1u_{11}[\alpha_0u_{22}-u_{33}]+\alpha_3u_{33}[u_{11}+u_{22}f']+u_2f''[(1+\mu)u_{11}+u_{22}+u_{33}].$$

Здесь мы использовали обозначения

$$\alpha_0=(1+\mu)f'-1,\quad \alpha_1=f'-1,\quad \alpha_2=1+kf'',\quad \alpha_3=\alpha_1+\alpha_2=f'+kf''. \tag{14}$$

Некоторые α имеют явный экономический смысл. Так, α_0 – норма номинального процента и поэтому в равновесии неотрицательна, $\alpha_0\geqslant 0$; более того, $\alpha_0=0$ тогда и только тогда, когда есть насыщение по деньгам. В самом деле, согласно(10) и (11), $\alpha_0=u_3/u_2$. Аналогично α_1 интерпретируется как норма реального процента, т.е. как i.

Дифференцируя по k условия стационарного равновесия $f=c+x+k$ и $f-kf'=w=$ $=c+m+k$, получаем

$$\alpha_1=c'+x',\quad -\alpha_2=c'+m'=w'-1,\quad \alpha_3=f'-w'. \tag{15}$$

Поэтому α_1 можно рассматривать и как производную непроизводственного потребления, увеличения и сокращения которого при росте капитала k определяются знаком α_1. Производная заработной платы по k зависит от α_2: при $\alpha_2>0$ заработная плата растет медленнее капитала, а при $\alpha_2<0$ – быстрее.

В силу леммы 1, несмотря на то что с ростом капитала непроизводственное потребление может увеличиваться, его доля в общем выпуске в отличие от инвестиций сокращается. В стационарном равновесии доля инвестиций в общем продукте равна $r=k/f$, а доля в заработной плате потребителя $q=k/w$. Поскольку естественно считать, что в равновесии $c>0$, а $m\geqslant 0$, то можно утверждать следующее.

Лемма 1. *В стационарном равновесии $r'>0$. Если же $\alpha_2>0$, то $q'>0$.*

Это верно, так как в силу строгой монотонности ПФ $r'=(f-kf')/f^2=$ $=f_1(1,k)/f^2>0$. А при $\alpha_2\geqslant 0$ имеем: $q'=(w-kw')/w^2=(w-k+\alpha_2k)/w^2=$ $=(c+m+\alpha_2k)/w^2>0$.

Для функции Кобба – Дугласа $f(k) = \sigma k^\gamma / \gamma$, $1 > \gamma > 0$, производная $q' = 1/f > 0$ независимо от знака α_2. Поэтому в данном случае условие леммы $\alpha_2 \geqslant 0$ может быть снято.

Нас интересуют знаки производных равновесных переменных. Они зависят от разных соотношений между параметрами α. Важно отметить, что Δ_k всегда больше нуля. В силу предположений о монотонности и вогнутости все первые производные функций u и f в (13) неотрицательны, а вторые неположительны, причем для всех переменных, кроме денег m, они не могут быть нулевыми.

По тем же соображениям справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Если* $\alpha_1 \geqslant 0$, *то* $c' > 0$, *т.е.* $c(k)$ *возрастает по* k. *Если* $\alpha_1 \leqslant 0$, *то* $x' < 0$, *если же* $\alpha_2 \geqslant 0$, *и* $\alpha_3 \geqslant 0$, *то* $m' > 0$, *т.е.* $x(k)$ *и* $m(k)$ *в этих случаях убывает по* k.

Заметим, что для функции f Кобба – Дугласа величина $\alpha_3 = \gamma f'$ всегда положительна. Если отказаться от строгости в условиях монотонности и вогнутости, то неравенства в лемме 2 сохранятся, хотя в нестрогом виде. Это замечание относится и к остальным утверждениям.

Так как нас интересует также зависимость от μ, важно знать знак Δ; если $\Delta > 0$, то μ возрастает по k, а k – по μ. Приведем два утверждения.

Лемма 3. *Если выполнено насыщение по деньгам, то* $\mu' > 0$.

В самом деле, в этом случае $\Delta > 0$, так как $u_3 = 0$, а значит $\alpha_0 = 0$, и в силу монотонности и вогнутости функции полезности $u_{33} = 0$.

Лемма 4. *Если* $\alpha_1 \geqslant 0$ *и* $\alpha_2 \geqslant 0$, *то* $\mu' > 0$ *и* k *возрастает по* μ.

Действительно, перепишем Δ в виде $\Delta = \alpha_1 u_{11}\alpha_0 u_{22} + \alpha_1 u_{33} u_{22} f' + \alpha_2 u_{33}(u_{11} + u_{22} f') + u_2 f''[(1+\mu)u_{11} + u_{22} + u_{33}]$.

Так как $\alpha_0 \geqslant 0$ в равновесии, $\alpha_1 \geqslant 0$ и $\alpha_2 \geqslant 0$, то все слагаемые здесь неотрицательны, а последнее положительно, т.е. $\Delta > 0$.

Рассмотрим зависимость полезности u от k. Обозначим через u' производную полезности по k. Ясно, что

$$u' = u_1 c' + u_2 x' + u_3 m'. \tag{16}$$

Лемма 5. *Если* $\mu \leqslant 0$, *то* $\alpha_1 \geqslant 0$ *и* $u' \geqslant 0$. *При этом* $u' = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mu = 0$ *и* $\alpha_1 = 0$; *в этом случае имеется насыщение по деньгам* $\alpha_0 = u_3 = 0$.

Доказательство. Поскольку $\mu \leqslant 0$ и в равновесии $\alpha_0 = (1+\mu)f' - 1 = \alpha_1 + \mu f' \geqslant 0$, то $\alpha_1 \geqslant \alpha_0 \geqslant 0$. Поэтому из леммы 2 следует, что $c' > 0$.

Используя равенства $u_1 = f'u_2$, $u_3 = \alpha_0 u_2$, вытекающие из условий равновесности (10) и (11), $\alpha_0 = (1+\mu)f' - 1$ и (15), преобразуем (16) следующим образом:

$$u' = u_2[f'c' + x' + \alpha_0 m'] = u_2[f'c' - (1+\mu)f'c' + c' + x' + \alpha_0(c' + m')] =$$

$$= u_2[-\mu f'c' + (c' + x') + \alpha_0(c' + m')] = u_2[\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2 - \mu f'c'].$$

В случае $\alpha_2 < 0$ отсюда вытекает утверждение леммы в силу того, что $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_0 \geqslant 0$, $c' > 0$ и $u_2 > 0$, $f' > 0$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha_2 \geqslant 0$. Для этого преобразуем последнее выражение для u', используя формулы (14) для α_0, α_1 и α_2

$$u' = u_2[\alpha_1 - f'\alpha_2 - \mu f'\alpha_2 + \alpha_2 - \mu f'c'] = u_2[\alpha_1(1 - \alpha_2) - \mu f'(\alpha_2 + c')],$$

$$u' = -u_2[\alpha_1 k f'' + \mu f'(\alpha_2 + c')]. \tag{17}$$

Утверждение леммы при $\alpha_2 \geqslant 0$ следует отсюда, поскольку $\alpha_1 \geqslant 0$, $u_2 > 0$, $f' > 0$ и $kf'' < 0$.

Лемма 6. *Если* $\alpha_1 \leqslant 0$ *и* $\alpha_3 \geqslant 0$, *то* $\mu \geqslant 0$ *и* $u' \leqslant 0$. *Случай* $u' = 0$ *возможен тогда и только тогда, когда* $\alpha_1 = 0$ *и* $\mu = 0$; *при этом имеется насыщение по деньгам* $\alpha_0 = u_3 = 0$.

Доказательство. Так как в равновесии $\alpha_0 \geqslant 0$ и $\alpha_1 \leqslant 0$ и $\alpha_3 \geqslant 0$, то из определений (14) различных α получаем: $\mu f' \geqslant \alpha_0 \geqslant 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_1 \geqslant 0$. Поэтому из неравенства $f' > 0$ и леммы 2 следует, что $\mu \geqslant 0$, $m' < 0$. Применяя (15) к (17), получаем $u' = -u_2[\alpha_1 k f'' - \mu f' m']$, откуда и вытекает утверждение леммы.

Заметим, что α_0 и α_1 как функции k убывают, а α_2 в случае Кобба – Дугласа возрастают. Пусть k_0, k_1, k_2 – значения капитала, при которых $\alpha_0(k_0) = 0$, $\alpha_1(k_1) = 0$, $\alpha_2(k_2) = 0$. Точки k_1 и k_2 определяются только технологией (причем k_1 – однозначно, а для функции Кобба – Дугласа, и k_2 тоже); k_0 зависит от μ. Равновесные значения $k \leqslant k_0(\mu)$, так как для них $\alpha_0 \geqslant 0$. При этом k_0 возрастает по μ и $k_0 = k_1$ для $\mu = 0$, а в случае функций Кобба – Дугласа $k_1 > k_2 = k_0(\mu)$ при $\mu = -\gamma$.

Таким образом, k_0, k_1 и k_2 определяют области возможных значений равновесного капитала, положительных и отрицательных α_1 и α_2 и их взаимное расположение при различных денежных политиках μ. Это делает использование приведенных утверждений, особенно для функций Кобба – Дугласа, более наглядным.

Точка k_1 разделяет капитал на две области положительной ($k < k_1$) и отрицательной ($k > k_1$) нормы реального процента $\alpha_1 = i$, характеризующихся увеличением или сокращением чистого выпуска при росте капитала. Если технология удовлетворяет условию $\alpha_3 \geqslant 0$, то равновесие в отрицательной области возможно лишь при положительной инфляции и является при этом неоптимальным по стационарному значению полезности (лемма 6). Для возрастания полезности применима политика, снижающая капитал. Она зависит от знака Δ: если $\Delta > 0$, то инфляцию надо уменьшить.

Вопрос о знаке Δ в общем случае остается пока открытым. Однако при насыщении по деньгам или при $k \geqslant k_2$ в области положительного процента на капитал величина $\Delta > 0$ и, следовательно, равновесный капитал увеличивается с ростом инфляции (леммы 3 и 4).

В области $k < k_1$ необходимым условием оптимальности является положительная инфляция. При дефляции денежная политика, увеличивающая капитал, приводит к росту полезности (лемма 5). При $k_2 \leqslant k < k_1$ – это ослабление дефляции. В отсутствие насыщения по деньгам m вопрос о влиянии роста капитала на полезность при положительной инфляции в этой области остается еще неясным в строгом смысле. Он является наиболее интересным и тонким. По-видимому, изменение уровня инфляции в этом случае по-разному может сказываться на полезности в зависимости от самого ее уровня.

Когда имеется насыщение по деньгам, равновесный капитал $k = k_0(\mu)$ возрастает при повышении темпа денежной эмиссии μ (лемма 3). Если $\mu > 0$, то капитал $k > k_1$, а рост инфляции снижает равновесную полезность несмотря на увеличение капитала (лемма 6). Если же $\mu < 0$, то $k < k_1$ и ослабление дефляции (возрастания μ) приводит одновременно к росту капитала и полезности (лемма 5). Насыщение по деньгам при стационарном капитале k_1 является идеальным случаем. При этом капитал дает максимальный чистый выпуск, обеспечивает наибольшую стационарную полезность, эмиссия денег отсутствует ($\mu = 0$), цены неизменны, равновесие оптимально по Парето в определенном выше смысле. Конечно, это особая ситуация, когда технология и производственные возможности идеально соответствуют предпочтениям потребителя, а масса денег полностью обеспечивает потребность в них. Естественно, любое изменение денежной политики в этом случае может лишь ухудшить положение.

В заключение при общих предположениях данного раздела может быть сформулировано следующее утверждение, справедливое, в частности, для функций Кобба – Дугласа.

Утверждение. *Пусть ПФ удовлетворяет условию* $\alpha_3 = f' + kf'' \geqslant 0$. *Тогда наибольшая полезность стационарных равновесий может быть достигнута лишь в случаях*:

a) *насыщения по деньгам* $\alpha_0 = u_3 = 0$ *при* $\mu = 0$ *и капитале* k_1 *таком, что* $f' = 1$;

b) *отсутствия насыщения по деньгам при строго инфляционной политике* $\mu > 0$.

Необходимыми для максимальной полезности стационарного равновесия являются также ограничение на капитал $f' \geqslant 1$, положительность производной по капиталу спроса молодых (работников) на потребляемый продукт и отрицательность – на деньги: $c' > 0$, $m' < 0$.

Утверждение, касающееся a) и b), как показано, следует из лемм 5 и 6. Если $u' = 0$, то $\alpha_1 = f' - 1 \geqslant 0$ (лемма 6), и $c' > 0$ по лемме 2. Из (15) следует, что $x' - m' = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 \geqslant 0$. Поэтому если $m' \geqslant 0$, то и $x' \geqslant 0$, и в этом случае $u' > 0$ ввиду (16). Значит, $m' < 0$ при $u' = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Woodford M.* The Optimum Quantity of Money // Handbook of Monetary Economics. V. II. Amsterdam: Elsevier Sci. Publ.,1990.
2. *MacCallum B.T.* The Optimal Inflation Rate in an Overlapping-Generations Economy with Land. // New Approach to Monetary Economics / Eds W. Barnett and K. Singleton. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 1987.
3. *Gale D.* Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Models // J. Econ. Theory. 1973. V. 6. № 1.
4. *Balasko Y., Shell K.* The Overlapping-generations Model, II: the Case of Pure Exchange with Money // J. Econ. Theory. 1981. V. 24. № 1.
5. *Geanakoplos J.* Overlapping Generation Models of General Equilibrium // J. Eatwell, M. Milgate and P. Newman (eds). The New Palgrave: General Equilibrium. Hong Kong: Macmillan Press Ltd., 1991.
6. *Friedman M.* The Optimum Quantity of Money // The Optimum Quantity of Money and other Essays. Chicago: Aldine Publ. Company. 1969.

Поступила в редакцию
14 XII 1993