

РАВНОВЕСИЕ В ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЯХ КУРНО И ШТАКЕЛЬБЕРГА*

© 1995 г. Булавский В.А., Калашников В.В.

(Москва)

Изучается модель олигополистического рынка, в которой гипотезы участников о реакции рынка на изменение их собственных объемов производства зависят не только от текущего объема рынка, но и от их доли в нем. При достаточно общих предположениях доказываются теоремы существования и единственности равновесия. Отдельно рассматривается частный случай гипотез с постоянной эластичностью и для него обобщается модель Штакельберга при нескольких лидерах.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является развитием и продолжением [1]. В последней известные модели олигополистического рынка одного однородного продукта (см., например, [2–5]) были распространены на случай, когда производители вместо стандартной гипотезы модели Курно пользуются гипотезами более общего вида

$$G_i(\eta) = G + (\eta - q_i)w_i(G). \quad (1)$$

Здесь G – текущий общий объем рынка; q_i и η – текущий и предполагаемый объемы поставок производителя i ; $G_i(\eta)$ – ожидаемый производителем i объем рынка в ответ на изменение его собственных поставок с q_i на η . Стандартная модель Курно получается, если $w_i(G) = 1$ при любых i и G . Соответственно были обобщены теоремы о моделях Курно и Штакельберга.

Определенное неудовлетворение от полученных результатов порождала зависимость коэффициента w_i в (1) только от объема рынка в целом, но не от доли участника i . Это существенно ограничивало класс рассматриваемых задач. В частности, исключались интересные задачи, в которых участники формулируют свои гипотезы в терминах предполагаемой эластичности объема рынка по их собственному объему производства.

Другим стимулом развития ранее полученных результатов явилось желание формально вложить модель Штакельберга в обобщенную модель Курно хотя бы на уровне необходимых условий первого порядка. Так как в модели Штакельберга участник-лидер в точности прослеживает поведение остальных участников, то в ситуациях, когда один из них выходит на нулевое производство, гипотеза первого должна терять гладкость. Это требует не только отказаться от предполагавшейся ранее непрерывности коэффициентов w_i в (1), но и расщепить гипотезу (1) на две части: при $\eta > q_i$ и $\eta < q_i$ с, вообще говоря, разными коэффициентами w_i . Внесение описанных изменений в модель привело к модификации и некоторых других предположений.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-012-842).

В разд. 2 дана обобщенная постановка модели, описываются и в некоторой степени обсуждаются предположения о входящих в модель функциях, а также обосновывается используемое понятие равновесия. Раздел 3 посвящен теореме существования, а 4 — теореме о единственности состояния равновесия. В разд. 5 рассматривается частный случай, включающий в себя вариант модели, в котором по предположению каждого участника эластичность рынка по его объему производства не зависит от текущей ситуации. Наконец, в разд. 6 на уровне условий первого порядка модель Штакельберга (точнее, обобщаемая здесь модель Штакельберга) формально вкладывается в изучаемую обобщенную модель Курно.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеются n фирм-производителей однородного продукта, текущие объемы производства которых будем обозначать через q_i , функции затрат $f_i(q_i)$, $i = 1, \dots, n$; общий объем рынка — G , а $p(G)$ — обратная функция спроса, т.е. цена, складывающаяся на рынке при его объеме G . Допустим наличие постоянных внешних поставок в объеме Q . Таким образом, в случае балансировки рынка должно выполняться равенство $G = Q + \sum q_i$.

Как отмечалось, вместо гипотезы (1) будут использоваться следующие

$$G_i(\eta) = \begin{cases} G + (\eta - q_i)w_i^+(G, q_i), & \eta > q_i, \\ G + (\eta - q_i)w_i^-(G, q_i), & \eta < q_i. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем для краткости опускается явное указание зависимости $G_i(\eta)$ также и от G и q_i . Поведение каждого участника определяется текущим состоянием (G, q_i) и гипотезой (2). Именно, для его объема производства η предполагаемая прибыль

$$\mu_i(\eta) = \eta p(G_i(\eta)) - f_i(\eta), \quad (3)$$

и свой выбор участник сделает, желая ее увеличить.

Так как в данной работе рассматриваются лишь вопросы статики, то нас будут интересовать состояния, в которых все предполагаемые функции прибыли (3) достигают максимума (вообще говоря, локального) при $\eta = q_i$. При балансировке рынка они естественно трактуются как состояния равновесия. Чтобы не исключать интересный с нашей точки зрения случай разд. 5, наличие гипотез вида (2) предполагается лишь для состояний $G > 0$, $q_i > 0$. Для них определена и функция предполагаемой прибыли (3). В то же время в конкретных условиях некоторые участники рынка могут иметь объем q_i , равный нулю, и в отношении них вопрос о равновесии следует решать иным способом. Поэтому определение состояния равновесия будет дано через условия первого порядка для максимизации предполагаемой функции прибыли (3), которые естественно распространяются и на участников с $q_i = 0$. Прежде чем формально сделать это, выпишем предположения о функциях f_i , $w_i^\pm$ и p .

A1. Каждая функция $f_i(q_i)$ определена для $q_i \geq 0$, непрерывно дифференцируемая, неубывающая и выпуклая.

A2. Обратная функция спроса $p(G)$ непрерывно дифференцируемая, определена для положительных G , положительна и $p'(G) < 0 \forall G$.

A3. При каждом i существует $H_i > 0$, для которого $f_i'(H_i) = p(H_i)$.

A4. Для каждого i функции $w_i^\pm(G, q_i)$ определены при $G \geq q_i > 0$ и произведения $q_i w_i^\pm(G, q_i)$ не убывают по q_i . Кроме того, в каждой точке $(G, q_i) > 0$ функция $w_i^\pm(G, q_i)$ полунепрерывна сверху по G и непрерывна справа по q_i , функция $w_i^-(G, q_i)$

полунепрерывна снизу по G и непрерывна слева по q_i . При этом имеют место соотношения

$$0 \leq w_i^-(G, q_i) \leq w_i^+(G, q_i), \quad (4)$$

$$w_i^+(G, G) = 1. \quad (5)$$

Предположение А4 требует пояснений. Равенство $q_i = G$ означает, что участник i монопольно производит весь продукт, и (5) отражает это обстоятельство. В классической модели Курно $w_i^+(G, q_i) = w_i^-(G, q_i) = 1$ при всех (G, q_i) , что соответствует отсутствию реакции остальных производителей на изменение производства участника i . Если $w_i^+(G, q_i) > 1$, то участник i прогнозирует изменение общего объема производства остальных субъектов в ту же сторону, что и собственное. При этом активность ожидаемой реакции тем выше, чем больше значение функций $w_i^\pm$. Таким образом, правое неравенство в (4) для этого случая означает, что предполагаемая активность реакции на увеличение производства участником i не ниже, чем на уменьшение. В случае $w_i^\pm(G, q_i) < 1$ ситуация меняется. Суммарная реакция остальных участников направлена в противоположную сторону и тем сильнее, чем меньше $w_i^\pm$. Неотрицательность этих значений предполагает, что в целом сдвиг общего объема производства будет в том же направлении, что и сдвиг производства участника i . Правое же неравенство в (4) соответствует тому, что освобождающийся рынок захватывается не менее активно, чем уступается при его захвате участником i .

Монотонность по q_i произведений $q_i w_i^\pm(G, q_i)$ также можно истолковать содержательно. Выпишем соотношение

$$\Delta(G, q_i, \eta) = \frac{\partial \ln G_i(\eta)}{\partial \ln \eta} = \frac{\eta}{G_i(\eta)} \cdot \frac{\partial G_i(\eta)}{\partial \eta},$$

где $\Delta(G, q_i, \eta)$ указывает предполагаемую участником i эластичность общего объема продукта относительно его объема производства. При $\eta = q_i \pm 0$ получим $\Delta(G, q_i, q_i \pm 0) = q_i w_i^\pm(G, q_i) / G$. Таким образом, предполагаемая монотонность при фиксированном G означает, что ожидаемая субъектом i эластичность общего объема не убывает при увеличении его доли производства. Добавим, что эта монотонность вместе с условием (5) влечет неравенство $w_i^+(G, q_i) \leq G / q_i$ при $0 < q_i < G$.

Определим функции $\sigma_i^+(G, q_i) = q_i w_i^+(G, q_i) / G$, $\sigma_i^-(G, q_i) = q_i w_i^-(G, q_i) / G$ и заметим, что ввиду монотонности по q_i и неотрицательности их можно доопределить в точках $(G, 0)$ как предельные значения

$$\sigma_i^+(G, 0) = \lim_{q_i \rightarrow +0} \sigma_i^+(G, q_i), \quad \sigma_i^-(G, 0) = \lim_{q_i \rightarrow +0} \sigma_i^-(G, q_i).$$

Функции $\sigma_i^\pm(G, q_i)$ имеют ясный экономический смысл. Именно, $\sigma_i^+(G, q_i)$ при гипотезе (2) дает предполагаемую участником i в состоянии (G, q_i) эластичность объема рынка по собственному объему q_i при его возрастании. Аналогично трактуется $\sigma_i^-(G, q_i)$ при убывании объема q_i . В терминах эластичностей предположение А4 можно переформулировать в следующей форме.

А4'. Для каждого i функции $\sigma_i^\pm(G, q_i)$ определены для $G > 0$, $G \geq q_i \geq 0$ и не убывают по q_i . Кроме того, для $q_i > 0$ функция $\sigma_i^+(G, q_i)$ полунепрерывна сверху по G и непрерывна справа по q_i , функция $\sigma_i^-(G, q_i)$ полунепрерывна снизу по G и непре-

рывна слева по q_i , и при этом имеют место соотношения

$$0 \leq \sigma_i^-(G, q_i) \leq \sigma_i^+(G, q_i) \leq \sigma_i^+(G, G) = 1. \quad (6)$$

Постулируемая здесь монотонность по q_i означает, что при одном и том же объеме рынка с увеличением в нем собственной доли участник рассчитывает и на большее (точнее, не меньшее) влияние своих действий на общую ситуацию. Правое равенство в (6), как и (5), показывает, что, оставшись на рынке в одиночестве, участник не ожидает возникновения новых поставщиков при увеличении своего объема производства.

Дифференцируя предполагаемую функцию прибыли (3) по η , получим

$$\mu'_i(\eta) = \begin{cases} p(G_i(\eta)) + \eta w_i^+(G, q_i) p'(G_i(\eta)) - f'_i(\eta), & \eta > q_i, \\ p(G_i(\eta)) + \eta w_i^-(G, q_i) p'(G_i(\eta)) - f'_i(\eta), & \eta < q_i. \end{cases} \quad (7)$$

В точке $\eta = q_i$ функция $\mu_i(\eta)$ имеет левую $\mu_i^-(G, q_i)$ и правую $\mu_i^+(G, q_i)$ производные, вычисляемые по формулам

$$\mu_i^+(G, q_i) = p(G) + \sigma_i^+(G, q_i) p'(G) G - f'_i(q_i), \quad (8)$$

$$\mu_i^-(G, q_i) = p(G) + \sigma_i^-(G, q_i) p'(G) G - f'_i(q_i). \quad (9)$$

A5 (принцип потенциального участия). Для некоторого k существуют такие $G_0 > 0$ и $q_{0k} > 0$, что при $G < G_0$ выполнено неравенство

$$p(G) + p'(G)G - f'_k(q_{0k}) > 0. \quad (10)$$

A6. Функция $p(G)G$ вогнута по G .

Принцип A5 означает, что при достаточно малых $G > 0$ (и, следовательно, достаточно больших p) хотя бы один из участников стремится увеличить объем своего производства сверх q_{0k} .

Используя теперь условия первого порядка для экстремума функции предполагаемой прибыли каждого участника, сформулируем задачу о поиске состояния равновесия следующим образом: при заданном $Q \geq 0$ найти неотрицательный набор $Z = (G, q_1, \dots, q_n)$ такой, что $G > 0$, выполнено балансовое равенство

$$\sum q_i + Q = G, \quad (11)$$

при каждом i

$$\mu_i^+(G, q_i) = p(G) + \sigma_i^+(G, q_i) p'(G) G - f'_i(q_i) \leq 0, \quad (12)$$

и если $q_i > 0$, то

$$\mu_i^-(G, q_i) = p(G) + \sigma_i^-(G, q_i) p'(G) G - f'_i(q_i) \geq 0. \quad (13)$$

Отметим, что в случае $\sigma_i^+(G, q_i) = \sigma_i^-(G, q_i)$ для участника с $q_i > 0$ неравенства (12) и (13) эквивалентны одному равенству.

Чтобы трактовать решение задачи (11)–(13) как равновесие для участников с $q_i > 0$, достаточно проверить вогнутость функции предполагаемой прибыли (3). Для этого нужно показать, что каждая из правых частей в (7) не возрастает по η и $\mu_i^+(G, q_i) \leq \mu_i^-(G, q_i)$. Последнее неравенство непосредственно следует из (6) и A2. Невозрастание же правых частей в (7) проверим лишь для верхней; для нижней это делается аналогично.

Пусть $q_i \leq \eta_1 < \eta_2$. Ввиду неотрицательности $w_i^+(G, q_i)$ согласно (2) $G \leq G_i(\eta_1) \leq G_i(\eta_2)$. Поэтому в силу A2 получим $p(G_i(\eta_1)) \geq p(G_i(\eta_2))$. Учитывая A1, при этом

$f'_i(\eta_1) \leq f'_i(\eta_2)$. Если к тому же $p'(G_i(\eta_1)) \geq p'(G_i(\eta_2))$, то вследствие отрицательности p' тем более $\eta_1 p'(G_i(\eta_1)) \geq \eta_2 p'(G_i(\eta_2))$. Таким образом, $\mu'_i(\eta_2) \leq \mu'_i(\eta_1)$.

Если же $p(G_i(\eta_1)) < p(G_i(\eta_2))$, то разность $\mu'_i(\eta_1) - \mu'_i(\eta_2)$ преобразуем с помощью верхнего соотношения в (2) к виду

$$\begin{aligned} \mu'_i(\eta_1) - \mu'_i(\eta_2) &= [p(G_i(\eta_1)) - p(G_i(\eta_2))] + [G_i(\eta_1)p'(G_i(\eta_1)) - G_i(\eta_2)p'(G_i(\eta_2))] + \\ &+ (1 - \sigma_i^+(G, q_i))G[p'(G_i(\eta_2)) - p'(G_i(\eta_1))] + [f'_i(\eta_2) - f'_i(\eta_1)]. \end{aligned}$$

Сумма выражений в первых двух квадратных скобках неотрицательна в силу А6, а последнее слагаемое неотрицательно ввиду выпуклости f_i . Знак же третьего слагаемого определяется знаком множителя $(1 - \sigma_i^+(G, q_i))$, который неотрицателен согласно (6).

Для оправдания определения равновесия с точки зрения участников с $q_i = 0$ заметим следующее. Необходимый и достаточный признак максимума (12)–(13) для функции предполагаемой прибыли можно переписать в виде пары неравенств

$$-\sigma_i^-(G, q_i)p'(G)G \leq p(G) - f'_i(q_i) \leq -\sigma_i^+(G, q_i)p'(G)G. \quad (14)$$

Правую часть в (14) можно трактовать как барьер, который должна превысить разность между ценой и затратами на производство дополнительной единицы продукции, чтобы участник i стремился увеличить свой объем производства. Аналогично трактуется и левая часть.

Так как при стремлении q_i к нулю правая часть в (14) имеет предел $-\sigma_i^+(G, 0)p'(G)G$, то достаточно естественно постулировать следующее поведение участника с нулевым q_i : он готов начать производство лишь в том случае, если разность между ценой $p(G)$ и $f'_i(0)$ превышает этот предельный барьер, т.е. выполнено неравенство $p(G) - f'_i(0) > -\sigma_i^+(G, 0)p'(G)G$. Условие же (12) при $q_i = 0$ прямо противоположно, т.е. при его выполнении участник не стремится сдвинуться с нулевого q_i .

Заметим, что если гипотеза (2) определена и для $q_i = 0$, т.е. $w_i^+(G, 0)$ имеет некоторое значение, то в силу непрерывности w_i^+ справа по q_i оказывается $\sigma_i^+(G, 0) = 0$, иными словами при выполнении (12) $p(G) \leq f'_i(0)$, и участнику i заведомо нет смысла что-либо производить.

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

В предположениях А4 и А4' постулируется лишь односторонняя непрерывность функций $w_i^\pm$ и $\sigma_i^\pm$ по q_i при фиксированном G и полунепрерывность по G при фиксированном q_i . В то же время для доказательства теоремы существования требуется предельный переход по паре переменных (G, q_i) , причем включая значения $q_i = 0$. Чтобы не загромождать дополнительно рассуждения в основной теореме, докажем сначала формулируемые ниже леммы, расширив предварительно область определения функций $w_i^\pm$ и $\sigma_i^\pm$. Для этого положим $w_i^\pm(G, q_i) = w_i^\pm(G, G) = 1$ для $q_i > G > 0$. Условия непрерывности и монотонности, постулируемые предположением А4, при этом, очевидно, не нарушаются. Соответственно расширяется и область определения функций $\sigma_i^\pm(G, q_i)$ и $\mu_i^\pm(G, q_i)$ с сохранением А4'.

Лемма 1. Функции $\mu_i^+(G, q_i)$ непрерывны справа по q_i и полунепрерывны по G снизу при $q_i \geq 0$, а функции $\mu_i^-(G, q_i)$ непрерывны слева по q_i и полунепрерывны по G сверху при $q_i > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соответствующие непрерывность функций $\mu_i^\pm$ по q_i и полунепрерывность по G при $q_i > 0$ вытекают непосредственно из A1, A2 и A4(A4'). Что же касается полунепрерывности $\mu_i^\pm(G, q_i)$ по G снизу при $q_i = 0$, то она в силу тех же предположений равносильна полунепрерывности функции $\sigma_i^+(G, 0)$ по G сверху. Но последнее имеет место потому, что $\sigma_i^+(G, 0) = \inf_{q_i > 0} \sigma_i^+(G, q_i)$ и функции $\sigma_i^+(G, q_i)$ полунепрерывны по G сверху при любом $q_i > 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. При выполнении условия A4(A4') для функций $\mu_i^+, \mu_i^-, i = 1, \dots, n$, справедливы соотношения

$$\lim_{(G, q_i) \rightarrow (G, \tilde{q}_i)} \inf \mu_i^+(G, q_i) = \mu_i^+(\tilde{G}, \tilde{q}_i) \forall \tilde{G} > 0, \quad \tilde{q}_i \geq 0,$$

$$\lim_{(G, q_i) \rightarrow (G, \tilde{q}_i)} \sup \mu_i^-(G, q_i) = \mu_i^-(\tilde{G}, \tilde{q}_i) \forall \tilde{G} > 0, \quad \tilde{q}_i > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем положительное $\tilde{G}$ и неотрицательное $\tilde{q}_i$ и рассмотрим произвольную последовательность точек (G^k, q_i^k) , сходящуюся к точке $(\tilde{G}, \tilde{q}_i)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер K такой, что $\forall k > K$ имеет место неравенство $q_i^k \leq \tilde{q}_i + \varepsilon$. В силу монотонности функции $\mu_i^+(G, q_i)$ по q_i получим, что $\mu_i^+(G^k, q_i^k) \geq \mu_i^+(G^k, \tilde{q}_i + \varepsilon) \forall k > K$. Переходя в этом неравенстве к нижнему пределу по $k \rightarrow \infty$ и используя полунепрерывность функции $\mu_i^+(G, q_i)$ снизу по G для положительных q_i , получим соотношение

$$\liminf \mu_i^+(G^k, q_i^k) \geq \liminf \mu_i^+(G^k, \tilde{q}_i + \varepsilon) \geq \mu_i^+(\tilde{G}, \tilde{q}_i + \varepsilon). \quad (15)$$

Ввиду непрерывности $\mu_i^+(G, q_i)$ по q_i справа $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mu_i^+(\tilde{G}, \tilde{q}_i + \varepsilon) = \mu_i^+(\tilde{G}, \tilde{q}_i)$, поэтому, переходя в (15) к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, найдем, что

$$\liminf \mu_i^+(G^k, q_i^k) \geq \mu_i^+(\tilde{G}, \tilde{q}_i). \quad (16)$$

В силу произвольности выбора последовательности (G^k, q_i^k) , сходящейся к $(\tilde{G}, \tilde{q}_i)$, и (16) получим

$$\mu_i^+(\tilde{G}, \tilde{q}_i) = \lim_{q_i \rightarrow \tilde{q}_i + 0} \mu_i^+(\tilde{G}, q_i) \geq \liminf_{(G, q_i) \rightarrow (\tilde{G}, \tilde{q}_i)} \mu_i^+(G, q_i) \geq \mu_i^+(\tilde{G}, \tilde{q}_i). \quad (17)$$

Из (17) вытекает первое утверждение леммы, второе равенство доказывается аналогично. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $Q > 0$ и выполнены предположения A1–A4. Тогда существует решение задачи (11)–(13). Если дополнительно выполнено условие A5, то решение существует и при $Q = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала для каждого i построим многозначное отображение $G \rightarrow [q_i^-, q_i^+]$, которое всякому $G > 0$ ставит в соответствие отрезок с концами

$$q_i^- = \inf\{q_i | 0 \leq q_i \leq H_i, \mu_i^+(G, q_i) \leq 0\}, \quad (18)$$

$$q_i^+ = \sup\{q_i | 0 \leq q_i \leq H_i, \mu_i^-(G, q_i) \geq 0\}, \quad (19)$$

где $H_i > 0$ – величины из условия A3. При этом будем полагать $q_i^+ = 0$ или $q_i^- = H_i$, если супремум или инфимум берется по пустому множеству. Явное указание зависимости q_i^+ и q_i^- от G мы для краткости опускаем.

Покажем, что $q_i^- \leq q_i^+$. Предположим, напротив, что $q_i^- > q_i^+$. Тогда $\mu_i^-(G, q_i^-) < 0$

и $q_i^- > 0$. Так как в силу леммы 1 функции $\mu_i^-(G, q_i^-)$ непрерывны слева по q_i , то при достаточно малом $\delta > 0$ имеем $\mu_i^-(G, q_i^- - \delta) < 0$ и тем более $\mu_i^+(G, q_i^- - \delta) < 0$, поскольку всегда $\mu_i^-(G, q_i) \geq \mu_i^+(G, q_i)$. Это противоречит определению q_i^- . Таким образом, $q_i^- \leq q_i^+$.

Если оба множества, по которым берется инфимум и супремум в (18) и (19), не пустые, то в силу леммы 1 и монотонности по q_i функций $\mu_i^\pm(G, q_i)$ неравенствам (12) и (13) удовлетворяют все точки замкнутого отрезка $[q_i^-, q_i^+]$. Если пусто множество в (19), то $\mu_i^+(G, q_i) \leq \mu_i^-(G, q_i) < 0$ при $0 \leq q_i \leq H_i$, т.е. $q_i^- = q_i^+ = 0$, и для $q_i = 0$ выполнено неравенство (12). Если же пусто множество в (18), то $\mu_i^-(G, q_i) \geq \mu_i^+(G, q_i) > 0$ при $0 \leq q_i \leq H_i$, т.е. $q_i^- = q_i^+ = H_i$. Таким образом, во всех случаях, кроме $q_i^- = q_i^+ = H_i$, точки замкнутого отрезка $[q_i^-, q_i^+]$ являются решениями задачи (12)–(13).

Пусть $Q > 0$. Точечно-множественное отображение $G \rightarrow [q_i^-, q_i^+]$ рассмотрим на оси $[Q, +\infty)$ и покажем его замкнутость. Так как график отображения является пересечением надграфика функции $q_i^-(G)$ и подграфика $q_i^+(G)$, то достаточно установить замкнутость этих двух множеств. Ввиду симметрии проверим это для надграфика функции $q_i^-(G)$. Пусть последовательность $\{(G^k, q_i^k)\}$ сходится к точке $(\tilde{G}, \tilde{q}_i)$, причем $G^k \geq Q$, $q_i^k \geq q_i^-(G)$. Возможны два случая: 1) если имеется бесконечная подпоследовательность с $q_i^k = H_i$, то $\tilde{q}_i = H_i$ и заведомо точка $(\tilde{G}, \tilde{q}_i)$ принадлежит надграфику; 2) если же начиная с некоторого места $q_i^k < H_i$, то $q_i^k < H_i$ и, следовательно, $\mu_i^+(G^k, q_i^k) \leq 0$. Ввиду монотонности $\mu_i^+(G, q_i)$ по q_i тем более $\mu_i^+(G^k, q_i^k) \leq 0$. В силу леммы 2 в пределе получим, что $\mu_i^+(\tilde{G}, \tilde{q}_i) \leq 0$, т.е. точка $(\tilde{G}, \tilde{q}_i)$ принадлежит надграфику функции $q_i^-(G)$. Аналогично доказывается замкнутость подграфика функции $q_i^+(G)$. Тем самым установлена замкнутость отображения $G \rightarrow [q_i^-, q_i^+]$.

Рассмотрим сумму построенных выше отображений и величины Q , т.е. отображение на отрезке $[Q, Q + \Sigma H_i]$, которое каждому $G > 0$ ставит в соответствие отрезок $A(G) = [Q + \Sigma q_i^-, Q + \Sigma q_i^+]$. Нетрудно проверить, что в этом случае выполнены все условия теоремы Какутани и существует неподвижная точка $G \in A(G)$, т.е. существует набор $Z = (G, q_1, \dots, q_n)$, для которого выполнено равенство (11) и $q_i^-(G) \leq q_i \leq q_i^+(G)$, $i = 1, \dots, n$. Покажем, что $q_i^-(G) < H_i$. Действительно, при $q_i^-(G) = H_i$ было бы $q_i = H_i$ и так как $Q > 0$, то $G > H_i$. Ввиду А3 это дает $p(G) - f_i'(H_i) < 0$ и тем более $\mu_i^-(G, H_i) < 0$. Поскольку $\mu_i^-(G, q_i)$ непрерывно слева по q_i , то $q_i^+(G) < H_i = q_i^-(G)$, что нелепо. Таким образом, в действительности $q_i^-(G) < H_i$ и, как было установлено выше, q_i решает задачу (12)–(13), а весь набор $(G, q_1, \dots, q_n)$ – задачу (11)–(13). Мы доказали утверждение теоремы для $Q > 0$.

Пусть теперь выполнено предположение А5. Зафиксируем для каждого $Q > 0$ некоторый набор $Z(Q) = [G(Q), q_1(Q), \dots, q_n(Q)]$, который решает задачу (11)–(13), и устремим Q к нулю. Так как $Q \leq G(Q) \leq Q + \Sigma H_i$, $0 \leq q_i < H_i$, то существует предельная точка $\tilde{Z} = (\tilde{G}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n)$. Если бы оказалось $\tilde{G} = 0$, то при некоторых положительных Q было бы $G(Q) < G_0$ и $q_k(Q) < q_{0k}$, что невозможно ввиду А5. Переходя к пределу в соотношениях (11)–(13), в силу леммы 2 найдем, что этот предельный набор решает задачу (11)–(13) при $Q = 0$. Теорема доказана.

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Вопрос о единственности состояния равновесия можно разделить на две части. Во-первых, с общемодельной точки зрения интересна единственность равновесного общего объема рынка G . В основном этому и будет посвящен раздел. Во-вторых, данный равновесный объем рынка в принципе может в состоянии равновесия по-разному распределяться между отдельными производителями. Это уже связано с единственностью решений локальных задач (12)–(13) и обсуждается кратко в конце раздела.

Для изучения вопроса о единственности решения задачи (11)–(13) мы сохраним предположения А1–А6 и добавим следующее.

А7. Для каждого i при $0 < G_1 < G_2$, $\delta > 0$ выполнено соотношение

$$w_i^+(G_1, \delta G_1) \leq w_i^-(G_2, \delta G_2). \quad (20)$$

Кроме того,

$$w_i^-(G, q_i) < G / q_i, \text{ если } 0 < q_i < G. \quad (21)$$

Заметим, что условие (20) выражает согласованное неубывание функций w_i^+ и w_i^- вдоль лучей, выходящих из начала координат и расположенных в положительном ортанте. Его можно переписать в виде $\sigma_i^+(G_1, \delta G_1) \leq \sigma_i^-(G_2, \delta G_2)$ и, переходя к пределу при $\delta \rightarrow +0$, найти, что $\sigma_i^+(G_1, 0) \leq \sigma_i^-(G_2, 0)$. Таким образом, согласно А7 неравенство

$$\sigma_i^+(G_1, \delta G_1) \leq \sigma_i^-(G_2, \delta G_2) \quad (22)$$

справедливо для $\delta \geq 0$.

Определение 1. Состояние равновесия $Z(Q) = [G(Q), q_1(Q), \dots, q_n(Q)]$ назовем *немонопольным*, если $q_i < G$, $i = 1, \dots, n$.

Теорема 2. При условиях А1–А7 и любом $Q \geq 0$ общий объем $G(Q)$ для немонопольного состояния равновесия определяется однозначно.

Доказательство. Пусть для заданного $Q \geq 0$ оказалось два немонопольных состояния равновесия: $Z_1(Q) = [G_1(Q), q_1^1(Q), \dots, q_n^1(Q)]$ и $Z_2(Q) = [G_2(Q), q_1^2(Q), \dots, q_n^2(Q)]$, причем $G_1 = G_1(0) < G_2(Q) = G_2$. Пусть, далее, $I(G_1) = \{1 \leq i \leq n : q_i^1(Q) > 0\}$, $I(G_2) = \{1 \leq i \leq n : q_i^2(Q) > 0\}$.

Заметим, что $G_2 > Q$ и, следовательно, $I(G_2) \neq \emptyset$. Покажем, что для любого $i \in I(G_2)$ имеет место неравенство

$$\frac{q_i^2(Q)}{G_2} < \frac{q_i^1(Q)}{G_1}. \quad (23)$$

В самом деле, введем для краткости обозначения $q_1 = q_1^1(Q)$ и $q_2 = q_1^2(Q)$ и предположим, что $q_2/G_2 \geq q_1/G_1$. Тогда, очевидно, $q_2 > q_1$ и существует $\tilde{q}$ такое, что $q_1 \leq \tilde{q} \leq q_2$ и $\tilde{q}/G_2 = q_1/G_1 = \delta$. Используя (22) и А4', получим цепочку неравенств: $0 \leq z_1 = \sigma_i^+(G_1, q_1) \leq \sigma_i^-(G_2, \tilde{q}) \leq \sigma_i^-(G_2, q_2) = z_2$. Так как $q_2 < G_2$, то (21) влечет $z_2 < 1$. Далее, поскольку наборы $Z_1(Q)$ и $Z_2(Q)$ равновесны, то из (12), (13) для данного i имеем $p(G_1) + G_1 p'(G_1) z_1 - f_i'(q_1) \leq p(G_2) + G_2 p'(G_2) z_2 - f_i'(q_2)$. В силу выпуклости f_i можно отбросить последние слагаемые в обеих частях, разве что усилив неравенство

$$p(G_1) + G_1 p'(G_1) z_1 \leq p(G_2) + G_2 p'(G_2) z_2. \quad (24)$$

Если $z_1 = 0$, то (24) противоречит убыванию $p(G)$. Пусть $z_1 > 0$. Вычтем из (24) нера-

венство $(1 - z_2)p(G_1) > (1 - z_2)p(G_2)$, которое имеет место в силу А2 и того, что $z_2 < 1$, и придем к соотношению $z_2 p(G_1) + G_1 p'(G_1) z_1 < z_2 [p(G_2) + G_2 p'(G_2)]$. Учитывая, что $z_2 \geq z_1 > 0$ и $p'(G_1) < 0$, можем вывести из него неравенство $p(G_1) + G_1 p'(G_1) < p(G_2) + G_2 p'(G_2)$, которое невозможно из-за А6, так как $G_1 < G_2$. Полученное противоречие показывает справедливость (23) для $i \in I(G_2)$.

Неравенство (23) показывает, что $I(G_2) \subseteq I(G_1)$, т.е., используя балансы (11) для Z_1 и Z_2 , получим

$$1 = \sum_{i \in I(G_2)} \frac{q_i^2(Q)}{G_2} + \frac{Q}{G_2} < \sum_{i \in I(G_2)} \frac{q_i^1(Q)}{G_1} + \frac{Q}{G_1} \leq \sum_{i \in I(G_1)} \frac{q_i^1(Q)}{G_1} + \frac{Q}{G_1} = 1.$$

Это противоречие означает, что предположение о существовании двух равновесных наборов с разными общими объемами неверно и теорема доказана.

Если $Q > 0$, то любое состояние равновесия не монополю. Следовательно, в этом случае равновесный объем $G(Q)$, согласно теореме 2, определяется однозначно. Если же $Q = 0$, то, вообще говоря, в одной задаче возможно существование и монополю и немонополю равновесий с разными объемами (например, если функции f_i и $p(G)G$ кусочно-линейны).

Следствие. Если в условиях теоремы 2 предположить дополнительно, что для каждого i либо f_i строго выпукла, либо для всякого $G > 0$ из $0 \leq q_i^1 < q_i^2$ вытекает неравенство

$$\sigma_i^+(G, q_i^1) < \sigma_i^-(G, q_i^2), \quad (25)$$

то не только объем $G(Q)$ в немонополю равновесии, но и весь равновесный набор $Z(Q)$ единствен.

В самом деле, если бы при равновесном общем объеме G для некоторого i нашлись величины $0 \leq q_i^1 < q_i^2$, удовлетворяющие соотношениям (12) и (13), то, применяя строгую выпуклость f_i либо неравенство (25), мы могли бы выписать противоречивую цепочку соотношений

$$0 \leq \mu_i^-(G, q_i^2) = p(G) + \sigma_i^-(G, q_i^2) p'(G)G - f_i'(q_i^2) <$$

$$< p(G) + \sigma_i^+(G, q_i^1) p'(G)G - f_i'(q_i^1) = \mu_i^+(G, q_i^1) \leq 0.$$

Замечание. Монополю равновесия (при $Q = 0$) отыскиваются путем решения задач на максимум функций $\mu_k(G, G) = p(G)G - f_k(G)$ на положительной полуоси с проверкой условий $\mu_i^+(G, 0) \leq 0$ для $i \neq k$.

5. СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТИ

Здесь мы подробнее изучим частный случай, когда функции f_i и p дважды непрерывно дифференцируемы и

$$w_i^-(G, q_i) = w_i^+(G, q_i) = \alpha_i + \sigma_i \frac{G}{q_i}, \quad 0 < q_i < G, \quad (26)$$

$$w_i^-(G, G) = \alpha_i + \sigma_i, \quad w_i^+(G, G) = 1, \quad (27)$$

где $0 \leq \sigma_i < 1$, $0 \leq \alpha_i \leq 1 - \sigma_i$. Легко видеть, что w_i^- и w_i^+ удовлетворяют условиям А4 и А7, а значит, для задачи (11)–(13) с этими функциями справедливы теоремы 1 и 2. Условие А6 в случае дважды дифференцируемой p сводится к выполнению неравенства

$$2p'(G) + p''(G)G \leq 0 \quad \forall G > 0. \quad (28)$$

Дополнительное же условие (25) следствия из теоремы 2 заменим следующим более сильным предположением.

А8. Функции f_i и p дважды непрерывно дифференцируемы и для каждого i либо $f_i''(q_i) > 0$ для любых $q_i > 0$ и $\lim_{q_i \rightarrow +\infty} f_i''(q_i) = +\infty$, либо $\alpha_i > 0$.

Случай $\alpha_i = 0$ соответствует постоянству эластичности прогнозируемого изменения общего объема G в зависимости от изменения q_i . Лемма 3, которая будет доказана ниже, служит инструментом для изучения обобщенной модели Штакельберга в следующем разделе. Так как при этом интересен лишь случай $Q > 0$, то значение $w_i^+(G, G) = 1$ не будет встречаться.

В предположении А8 исследуем поведение решений $q_i = q_i(G)$ задачи (12)–(13), которая в данном случае принимает вид: найти $q_i \geq 0$, удовлетворяющее условиям

$$q_i = 0, \text{ если } f_i'(+0) - \sigma_i p'(G)G - p(G) \geq 0, \quad (29)$$

$$f_i'(q_i) - \alpha_i q_i p'(G) - \sigma_i p'(G)G - p(G) = 0, \quad (30)$$

если $q_i > 0$. Распространим гладко функции f_i на отрицательную полуось, положив $f_i(q_i) = f_i(0) + f_i'(0)q_i + f_i''(0)q_i^2/2$ при $q_i < 0$. Если выполнены предположения А1–А8, то уравнением (30) его решения $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(G)$ определены однозначно и непрерывно дифференцируемы при всех $G > 0$. Если $\tilde{q}_i(G) > 0$ при $G > 0$, то функция $q_i(G)$ совпадает с $\tilde{q}_i(G)$. Если же в некоторой точке $\tilde{G}_i$ окажется $\tilde{q}_i(\tilde{G}_i) = 0$, т.е. $f_i'(0) = \sigma_i p'(\tilde{G}_i)\tilde{G}_i + p(\tilde{G}_i)$, то в силу условия $0 \leq \sigma_i < 1$ и предположений А2, А6 имеем $f_i'(0) > \sigma_i p'(G)G + p(G)$ при $G > \tilde{G}_i$. Поэтому $\tilde{q}_i(G) < 0$ для таких G , а $q_i(G) = 0$. Таким образом, $q_i(G) = \max\{\tilde{q}_i(G), 0\}$ и функции $q_i(G)$ непрерывно дифференцируемы всюду, за исключением разве лишь одной точки $\tilde{G}_i$. В самой же точке $\tilde{G}_i$ функция $q_i(G)$ имеет односторонние производные $q_i'(\tilde{G}_i + 0) = 0$ и $q_i'(\tilde{G}_i - 0) \leq 0$. Производные функции $q_i(G)$ при $G < \tilde{G}_i$ могут, вообще говоря, иметь разные знаки. Однако ниже мы покажем, что при выполнении неравенства

$$Q + \sum q_i(G) \leq G, \quad (31)$$

которое имеет место, например, в точке равновесия, одновременно не может быть более одного субъекта с положительной производной. Положим

$$I(G) = \{i : q_i(G) > 0\}, \quad I^+(G) = \{i \in I(G) : q_i'(G) > 0\}.$$

Лемма 3. Пусть выполнены предположения А1–А8, а гипотезы $w_i^\pm$ имеют вид (26)–(27). Тогда для любых $G > 0$ и $Q > 0$ при выполнении неравенства (31) имеют место оценки

$$\sum q_i'(G - 0) \leq \sum q_i'(G + 0) \leq \begin{cases} 1 - \frac{2Q}{G}, & I^+(G) \neq \emptyset, \\ 0, & I^+(G) = \emptyset. \end{cases} \quad (32)$$

Доказательство. Так как для $i \in I(G)$ выполнено равенство (30), можно воспользоваться теоремой о дифференцируемости неявной функции и выразить производную

$$q_i'(G) = \frac{(1 + \sigma_i)p' + \sigma_i G p'' + \alpha_i q_i p''}{f_i'(q_i) - \alpha_i p'}. \quad (33)$$

Для простоты в правой части опущен аргумент G . По предположениям A2 и A8 знаменатель дроби (33) положителен. Следовательно, знак производной $q'_i(G)$ определяется знаком числителя (33). Легко видеть, что если $\alpha_i = 0$, то

$$q'_i(G) = \frac{1}{f'_i(q_i)} [(1 - \sigma_i)p' + \sigma_i(2p' + Gp'')] < 0$$

в силу A2, (28) и того, что $0 \leq \sigma_i < 1$. Если же $\alpha_i > 0$, то ситуация более сложная и $q'_i(G)$ может принимать значения различного знака. Предположим, что $q'_i(G) > 0$. В этом случае числитель в (33) положителен. Так как $f''_i \geq 0$, то ввиду (28)

$$0 < q'_i(G) \leq -\frac{1 - \sigma_i}{\alpha_i} + \frac{2}{G} q_i(G) \leq -1 + \frac{2}{G} q_i(G). \quad (34)$$

Таким образом, при выполнении неравенства (31) (например, в точке равновесия) не может быть более одного субъекта с положительной производной $q'_i(G)$.

Теперь можно оценить $\sum_{i \in I(G)} q'_i(G)$ в случае, когда $\sum q_i(G) \leq G - Q$. Если $I^+(G) = \emptyset$, то $\sum_{i \in I(G)} q'_i(G) \leq 0$. Если же $I^+(G) = \{i_0\}$, то $q_{i_0} \leq G - Q$ и ввиду (34)

$$\sum_{i \in I(G)} q'_i(G) \leq q'_{i_0}(G) \leq -1 + \frac{2q_{i_0}(G)}{G} \leq 1 - \frac{2Q}{G}. \quad (35)$$

Так как $q'_i(\tilde{G}_i + 0) = 0$ и $q'_i(\tilde{G}_i - 0) \leq 0$ при $i \notin I(G)$, т.е. при $G \geq G_i$, то из неравенства (35) следует утверждение леммы 3.

6. РЫНОК С ЛИДЕРАМИ

В этом разделе модель Штакельберга [5] обобщается и вкладывается в приведенную выше общую схему. В классической модели Штакельберга одна из фирм учитывает реакцию остальных участников рынка на изменение ее объема поставок и выбором этого объема максимизирует свою прибыль. В [2] эта фирма называется лидером рынка. Ниже рассматривается случай, когда таких лидеров несколько, а остальные (ведомые) фирмы ведут себя согласно модели, описанной в разд. 5. Как было отмечено во Введении, обобщенную модель Штакельберга мы вкладываем в общую схему на уровне условий первого порядка, т.е. ищем такое состояние, при котором функции прибыли лидеров имеют стационарную точку. К сожалению, в рамках данной работы исследовать эти стационарные точки на предмет выполнения условий второго порядка не удастся. Поэтому будем говорить в дальнейшем не о состояниях равновесия обобщенной модели Штакельберга, а о стационарных состояниях.

Пусть первые s фирм, $1 \leq s < n$, относятся к категории лидеров, т.е. в своем прогнозе учитывают реакцию остальных $n - s$ фирм на изменение их совокупного объема производства $Q = \sum_{i=1}^s q_i$, но друг относительно друга действуют как участники классической модели Курно, т.е. считают, что остальные лидеры не изменяют объема производства. Наконец, последние $n - s$ фирм применяют рассмотренную выше тактику с внешними поставками Q и функциями w_j^-, w_j^+ , определенными (26)–(27). Классическая модель Штакельберга получается, если $s = 1$, $\alpha_i = 1$, $\sigma_i = 0$, $i = 2, \dots, n$. В силу A1–A8 для любого $Q \geq 0$ решение задачи (11)–(13) $Z(Q) = [(G(Q), q_{s+1}(Q), \dots, q_n(Q)]$ существует, единственно и дифференцируемо всюду за исключением точек $\tilde{G}_i$,

где существуют левая и правая производные. Дифференцируя балансовое равенство

$$G(Q) = Q + \sum_{j=s+1}^n q_j(G(Q)) \quad (36)$$

по Q и используя оценку (32), легко показать, что функция $G(Q)$ строго возрастает, $G(0) > 0$, и $G(Q) \geq Q$ при $Q > 0$.

Чтобы вложить обобщенную модель Штакельберга в общую схему, нужно определить функции w_i^+ и w_i^- для $i = 1, \dots, s$. Согласно постулируемому поведению лидеров, гипотеза лидера i состоит в том, что при изменении его объема производства на $\eta - q_i$ объем внешних поставок Q для второй группы участников также изменится на $\eta - q_i$. Следовательно, лидер i считает, что при замене Q на $Q + \eta - q_i$ сохранится балансовое равенство (36). Полученное соотношение играет роль равенства (2) для лидера i , поэтому, дифференцируя это соотношение по η справа и слева в точке $\eta = q_i$ и выражая из полученного равенства производную $dG/d\eta$, находим вид функций w_i^- и w_i^+ для $i = 1, \dots, s$. Именно, если $G > G(0)$, то однозначно определено $Q(G) > 0$, при котором $G(Q(G)) = G$, и для $0 < q_i \leq Q(G)$ получим

$$w_i^-(G, q_i) = \frac{1}{1 - \sum_{j=s+1}^n q_j'(G-0)} = u^-(G), \quad (37)$$

$$w_i^+(G, q_i) = \frac{1}{1 - \sum_{j=s+1}^n q_j'(G+0)} = u^+(G). \quad (38)$$

В силу леммы 3

$$0 < u^-(G) \leq u^+(G) \leq \max\left\{1, \frac{G}{2Q(G)}\right\}. \quad (39)$$

За исключением точек $\tilde{G}_i$, эти функции совпадают и непрерывны. В точках же разрыва функция $u^-(G)$ непрерывна слева, и $u^+(G)$ — справа. Это обеспечивает выполнение условия А4. Для применения теоремы 1 нужно формально доопределить функции $w_i^\pm(G, q_i)$ для $i = 1, \dots, s$ при всех $G > 0$, $0 < q_i \leq G$ с соблюдением условия А4.

Начнем с точек (G, q_i) при $G > G(0)$ и $Q(G) < q_i \leq G$. Для сохранения монотонности произведения $q_i w_i^\pm(G, q_i)$ и обеспечения условия (5) для рассматриваемых точек (G, q_i) положим

$$w_i^\pm(G, q_i) = \alpha^\pm(G) + \frac{\sigma^\pm(G)}{q_i}, \quad (40)$$

определив коэффициенты из условий

$$\alpha^\pm(G) + \sigma^\pm(G)/Q(G) = u^\pm(G), \quad \alpha^\pm(G) + \sigma^\pm(G)/G = 1. \quad (41)$$

Так как $Q(G) < q_i \leq G$, то величины (40) лежат между $u^\pm(G) > 0$ и 1, т.е. положительны. Решая систему (41) и подставляя в (40), найдем

$$w_i^\pm(G, q_i) = \left\{ G \left[1 - \frac{Q(G)}{q_i} \right] + \left[\frac{G}{q_i} - 1 \right] Q(G) u^\pm(G) \right\} / [G - Q(G)]. \quad (42)$$

Так как коэффициент при $u^{\pm}(G)$ для $q_i \leq G$ неотрицателен, то сохраняется нужная полунепрерывность по G функций $w_i^{\pm}$. Кроме того, ввиду (39) конечен и неотрицателен верхний предел

$$V^+ = \lim_{G \rightarrow G(0)} \sup \frac{Q(G)u^+(G)}{G - Q(G)} \leq \frac{1}{2}. \quad (43)$$

Переходя в (42) к верхнему пределу при $G \rightarrow G(0)$, положим

$$w_i^+(G(0), q_i) = [1 - V^+] + [G(0)V^+] / q_i. \quad (44)$$

Поскольку (42) и (44) неотрицательны, можно принять $w_i^+(G, q_i) = 0$ для $G < G(0)$ и $w_i^-(G, q_i) = 0$ для $G \leq G(0)$.

Таким образом, введение функций w_i^- и w_i^+ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Поэтому ее следствием является следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия A1–A3, A5, A6, A8 и для участников с номерами $i = s + 1, \dots, n$ функции $w_i^{\pm}(G, q_i)$ определены равенствами (26), (27). Тогда обобщенная модель Штакельберга имеет стационарное состояние.

Замечание. При небольшом ужесточении предположений можно показать, что $V^+ = 0$, так что $w_i^+(G(0), q_i) = 1$. Для этого достаточно, например, предположить, что либо f_i'' строго положительны, либо в (28) имеет место знак строгого неравенства, либо по меньшей мере два участника из ведомых имеют положительные q_i в точке равновесия для $Q = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булавский В.А., Калаишников В.В. Метод прогонки по параметру для изучения состояния равновесия // Экономика и мат. методы. 1994. Т. 30, № 4.
2. Sherali H.D., Soyster A.L., Murphy F.H. Stackelberg – Nash – Cournot Equilibria: Characterizations and Computations // Operations Res. 1983. V. 31. № 2.
3. Novshek W. On the Existence of Cournot Equilibrium // Rev. Econ. Studies. 1985. V. 52(1). № 168.
4. Szidarovszky F., Yakowitz S. A New Proof of the Existence and Uniqueness of the Cournot Equilibrium // Intern. Econ. Rev. 1977. V. 18. № 3.
5. Stackelberg H. Marktform und Gleichgewicht. Vienna: Julius Springer, 1934.

Поступила в редакцию
6 XII 1994