

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

ЭКОНОМИЧЕСКИ ЦЕЛЕСООБРАЗНЫЕ РАЗМЕРЫ ПАРТИЙ ВЫПУСКА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДЕТЕРМИНИРОВАННОМ СПРОСЕ

© 1995 г. Колесник Н.Н.

(Обнинск)

Рассмотрена в некотором смысле классическая задача из теории планирования производства и управления запасами. Предложена простая и достаточно "прозрачная" вычислительная схема ее решения методом динамического программирования в терминах "состояние – управление".

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается следующая задача. Известен спрос или "портфель заказов" на производимый предприятием продукт. Спрос – детерминированный и составляет z_i единиц на момент времени t_i , где $i = 1, \dots, n$, $t_1 < \dots < t_n$. Продукт выпускается партиями. Заданы стоимостные характеристики: C_i – стоимость одной переналадки оборудования для изготовления партии в момент t_i (от размера партии не зависит) и c_i – денежное выражение потерь, обусловленных пролеживанием (т.е. хранением в ожидании нагрузки), единицы продукта в течение единицы времени в промежутке $[t_i, t_{i+1}]$.

Задержки с выполнением заказов из рассматриваемого портфеля не допускаются (условие отсутствия дефицита). Нет ограничений на величину размера партии (т.е. на производительность оборудования).

Следует найти оптимальный календарный план выпуска, т.е. определить его объемы и сроки, причем такие, чтобы: 1) без нарушения сроков был удовлетворен заданный портфель заказов (планы, для которых выполняется данное условие, далее будем называть допустимыми); 2) суммарные денежные потери, обусловленные переналадками и пролеживанием, были минимальными.

Задача подобного типа рассмотрена в контексте теории управления запасами (см. [1] и основанные на ней [2, с. 396–403; 3, с. 382–392; 4, с. 106–118]). Она типична в практике работы планово-диспетчерских служб предприятий, когда тем или иным способом (как, например, описано в [5]) построен объемно-календарный план выпуска сложных изделий, откуда становятся известными объемы и сроки производства их комплектующих (скажем, деталей массового применения). Однако максимум, чем "оснащен" в настоящее время "среднестатистический" работник упомянутой службы для решения подобных задач, это знание так называемой формулы Уилсона: $q_0 = (2qC/c)^{1/2}$, где q_0 – экономически целесообразный размер партии; q – величина интенсивности спроса; C, c – определены выше; здесь они во времени не изменяются.

Эта формула применима лишь в ограниченном количестве случаев, когда потребность в продукте непрерывна и постоянна в течение планового периода. Однако есть предпосылки к тому, чтобы поставленная задача решалась практическими работниками соответствующих служб с такой же регулярностью, с какой сегодня используется упомянутая формула Уилсона. К ним относятся: 1) оснащенность вычислительной техникой; 2) наличие понятных и легко реализуемых алгоритмов; 3) простой доступ пользователя (непрофессионала в области вычислительной техники) к решению задачи, где под решением понимается ввод исходных

данных, запуск алгоритма (собственно решение), вывод результатов на печать или экран и их запоминание.

Первое и третье условия трудностей не вызывают. Действительно, на рабочем столе в распоряжении плановика и диспетчера появилась ПЭВМ; нет также сомнений в способностях программиста (имеющего на руках алгоритм и внешние требования будущего пользователя задачи) к созданию удобных для использования меню – диалоговых автоматизированных рабочих мест (АРМ). Предметом данной статьи является развитие второй предпосылки. Предлагается алгоритм динамического программирования для решения поставленной задачи, отличающийся от алгоритмов [1–4] тем, что вычислительная схема строится в терминах "состояние – управление" в фазовом пространстве (см. [6, с. 132–142]). Схема более простая и "прозрачная" и это позволяет в конечном счете рекомендовать предложенный алгоритм в качестве типового проектного решения при создании АРМ работника планово-диспетчерской службы предприятия.

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНОГО КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА

При построении алгоритма решения поставленной задачи существенно используются результаты двух приводимых ниже утверждений.

Утверждение 1. В оптимальном календарном плане удовлетворение заказа (t_k, z_k) обеспечивается за счет выпуска (t_k^*, z_k) , где t_k^* – один из моментов времени $t_1, \dots, t_k$.

Доказательство. Достаточно доказать, что с точки зрения оптимальности нерационально: а) размещать выпуск, соответствующий заказу, в промежутках между моментами времени $t_1, \dots, t_k$; б) дробить заказ, т.е. выполнять его за несколько моментов времени.

а). Допустим, что в оптимальном плане заказ (t_k, z_k) выполняется за счет выпуска (t_k^*, z_k) , где $t_j < t_k^* < t_{j+1}$ и $t_j < t_k$ (рис. 1).

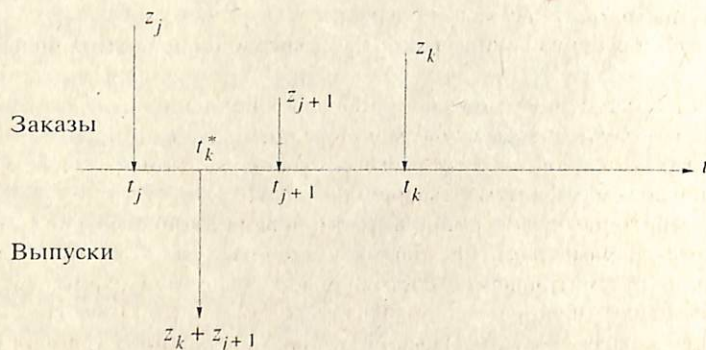


Рис. 1

На момент t_k^* в оптимальном плане могут приходиться также выпуски, относящиеся к другим заказам с номерами больше j (в силу начального условия бездефицитности плана). Без ограничения общности будем считать, что это – выпуск (t_k^*, z_{j+1}) . Очевидно, что, перенося выпуск в объеме $z_k + z_{j+1}$ из t_k^* в t_{j+1} , можно получить новый допустимый план, отличающийся от оптимального меньшими потерями (по крайней мере на величину потерь от пролеживания готового продукта объемом $z_k + z_{j+1}$ в течение времени $t_{j+1} - t_k^*$), что противоречит допущению об оптимальности плана.

б). Пусть в оптимальном плане заказ (t_k, z_k) выполняется за счет выпусков (t_j, z'_k) и (t_l, z''_k) , где $z'_k + z''_k = z_k$, $j, l \leq k$ и $j \neq l$ (рис. 2). Заметим теперь, что переносом выпуска z_k с момента времени t_j на t_l можно уменьшить потери на пролеживание. Это противоречит допущению об оптимальности плана.

Утверждение 2. Нерационально более поздние заказы выполнять раньше более ранних.

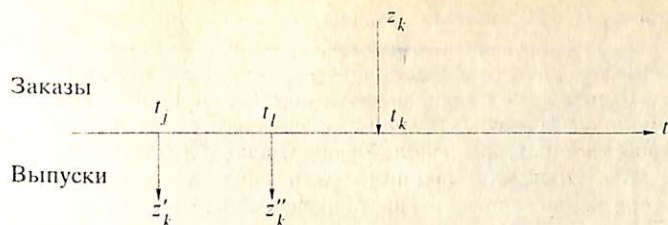


Рис. 2

Или: пусть в оптимальном плане заказы (t_i, z_i) и (t_j, z_j) выполняются с помощью выпусков (t_i^*, z_i) и (t_j^*, z_j) соответственно. Тогда из $t_i < t_j$ следует $t_i^* \leq t_j^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем его от противного. Пусть $t_j^* < t_i^*$. Тогда, учитывая, что при бездефицитном плане $t_i^* \leq t_i$, $t_j^* \leq t_j$, получим следующую цепочку неравенств:

$t_j^* < t_i^* \leq t_i < t_j$. Отсюда следует, что с помощью переноса выпуска z_j с момента времени t_j^* на t_i^* план можно улучшить (за счет уменьшения пролеживания готового продукта, относящегося к заказу j). Это противоречит допущению об оптимальности плана.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматриваемая ниже задача будет представлена в терминах "состояние – управление" и для ее решения предлагается вычислительная схема динамического программирования.

Используя результаты утверждения 1, допустимый календарный план можно получить в результате следующего многошагового процесса.

Шаг 1. Выпуск, обеспечивающий заказ z_1 ; единственный возможный момент времени выпуска – t_1 .

Шаг 2. Выпуск в объеме z_2 ; возможные моменты времени – t_1, t_2 .

Шаг n . Выпуск в объеме z_n ; возможные моменты времени – $t_1, \dots, t_n$.

Один из допустимых планов – выпуск всех n заказанных партий в момент t_1 . Другой крайний случай – выпуски в объемах z_i в моменты времени $t_i, i = 1, \dots, n$.

Состояние S_{ij} многошагового процесса формирования допустимого календарного плана определяется двумя параметрами (фазовыми координатами): i – номер шага, в результате которого возникло рассматриваемое состояние или же номер размещаемого заказа (они совпадают – см. выше), и j – номер момента времени (из набора $t_1, \dots, t_i$), на который предусматривается выпуск заказа i . Здесь $j \leq i$ в силу начального условия бездефицитности плана (отсутствие запаздываний в выполнении заказов).

Таким образом, состояние S_{ij} – результат выполнения следующей операции: "заказ (партию) i выпустить в момент времени t_j ".

Пространство возможных состояний процесса можно представить графически, откладывая по оси абсцисс номера j моментов времени $t_1, \dots, t_j, \dots, t_n$, а по оси ординат – номера i заказов (партий) $z_1, \dots, z_i, \dots, z_n$ (см. рис. 3, где $n = 5$). Переходы между состояниями изображены на рис. 3 с помощью направленных дуг, а начальное или "нулевое" состояние S_0 – отсутствие какого-либо плана выпуска. Заметим, что в схеме нет дуг, направленных вниз – влево, так как в оптимальном плане в соответствии с утверждением 2 не допускается выполнение более поздних заказов прежде более ранних.

Пусть за первые $i - 1$ шагов процесса достигнуто некоторое состояние $S_{i-1, j}$. Тогда управление $u_{ij} = u$ на шаге i заключается в выборе дуги, идущей из этого состояния в одно из состояний $S_{i, j+u}$, где $u = 0, 1, \dots, i - j$.

Потери, обусловленные выбором на шаге i управления $u_{ij} = u$ (см. рис. 4)

$$f_i(S_{i-1, j}, u_{ij} = u) = b_i \sum_{\Delta=0}^{i-(j+u)} c_{j+u+\Delta} (t_{j+u+\Delta+1} - t_{j+u+\Delta}) + C_{j+u} \min(1, u),$$

$$u = 0, 1, \dots, i - j.$$

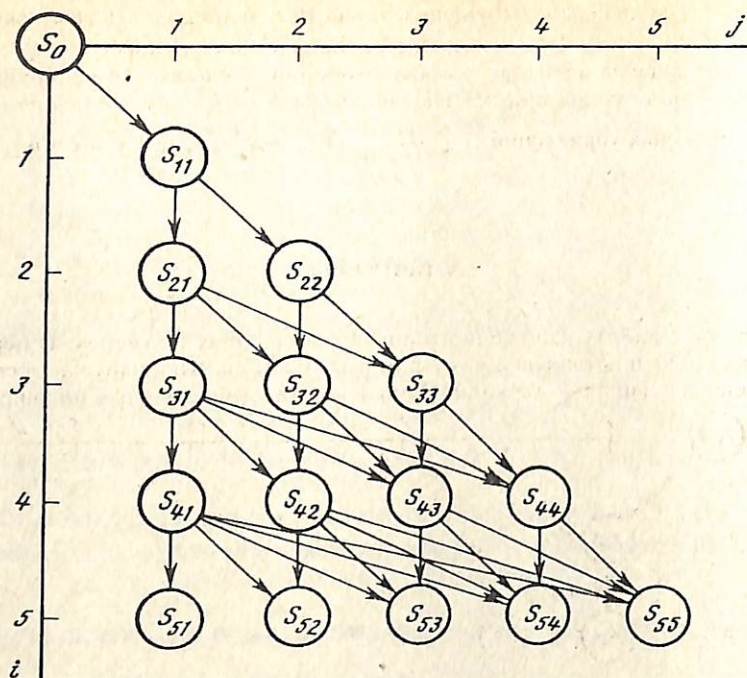


Рис. 3. i – номера заказов z_i или номера шагов; j – номера моментов времени t_j

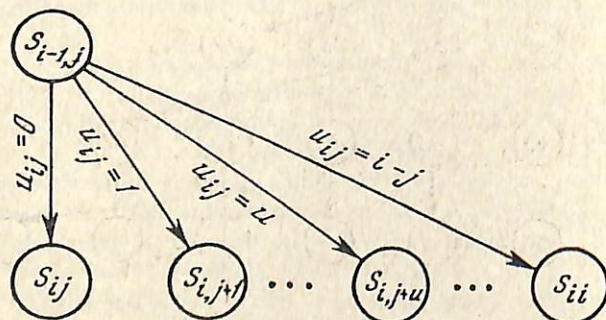


Рис. 4

Для частного случая, когда $c_i = c$, $C_i = C$, эта формула упрощается: $f_i(S_{i-1}, j, u_{ij} = u) = cb_i(t_i - t_{j+u}) + C \min(1, u)$, $u = 0, 1, \dots, i-j$.

Функциональные уравнения вычислительной схемы динамического программирования

$$F_n(S_{n-1}, j) = \min_{u_{nj}=0, 1, \dots, n-j} \{f_n(S_{n-1}, j, u_{nj})\}, \quad (1)$$

$$F_i(S_{i-1}, j) = \min_{u_{ij}=0, 1, \dots, i-j} \{f_i(S_{i-1}, j, u_{ij}) + F_{i+1}(S_{i,j+u})\}, \quad i = n-1, \dots, 2, \quad (2)$$

$$F_1 = C_1 + F_2(S_{11}). \quad (3)$$

Соотношения (1)–(2) описывают процесс последовательного нахождения условно оптимальных управлений u_{nj}^* , $u_{n-1,j}^*$, ..., $u_{2,j}^*$. По отношению к основному процессу формирования календарного плана он разворачивается в обратном направлении, т.е. от шага n к первому. При этом на шаге i используется знание условно-оптимальных потерь F_{i+1} , найденных на шаге $i+1$. Используя, таким образом (1), (2), дойдем до первого шага, где альтернатив в выборе управ-

лений нет (партия z_1 должна быть выпущена в момент времени t_1) и (3) дает искомую величину минимальных потерь F_1 , соответствующую оптимальному календарному плану.

Собственно оптимальный план, на котором этот минимум достигается, определяется теперь построением последовательной цепочки состояний, начиная с S_{11} и исходя из полученных ранее условно-оптимальных управлений: $S_{11} \rightarrow S_{2,j_2^*} \rightarrow \dots \rightarrow S_{n,j_n^*}$, где $j_2^* = 1 + u_{21}^*$, $j_3^* = j_2^* + u_{3,j_2^*}^*$, ..., $j_n^* = j_{n-1}^* + u_{n,j_{n-1}^*}^*$.

4. ПРИМЕРЫ

Продemonстрируем работу изложенного алгоритма на двух примерах. В первом интенсивность спроса — величина постоянная и размер оптимальной партии выпуска (а следовательно, и оптимальный календарный план) можно получить, используя формулу Уилсона; убеждаемся,

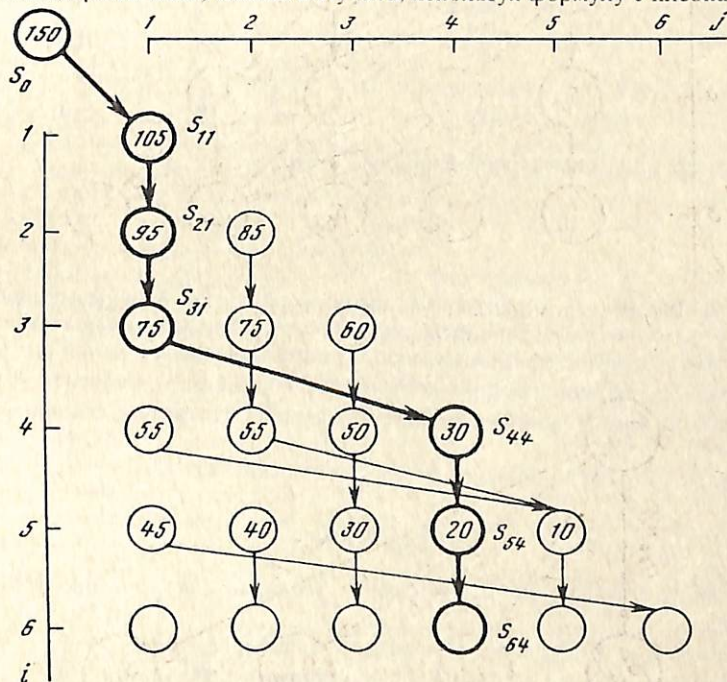


Рис. 5

что алгоритм динамического программирования приводит к тому же результату. Во втором примере алгоритм применен к общему случаю рассматриваемой задачи.

Пример 1. $t_j = j$, $z_j = 10$, $j = 1, \dots, 6$, $c = 1$, $C = 45$.

Интенсивность спроса здесь постоянна и равна 10; величина экономически целесообразного размера партии выпуска в соответствии с формулой Уилсона составляет 30, что и определяет оптимальный календарный план выпуска: $Z_1 = 30$, $Z_2 = 0$, $Z_3 = 0$, $Z_4 = 30$, $Z_5 = 0$, $Z_6 = 0$.

Представим исходные данные задачи и результат ее решения в более обозримом виде

j :	1	2	3	4	5	6
t_j :	1	2	3	4	5	6
z_j :	10	10	10	10	10	10
c_j :	1	1	1	1	1	1
C_j :	45	45	45	45	45	45

Z_j :	30	0	0	30	0	0
---------	----	---	---	----	---	---

Суммарные потери на оптимальном плане $\{Z_j\}$ — 150.

Результат тот же, если применять описанную выше схему динамического программирования. Соответствующий ей пошаговый процесс представлен на рис. 5, где направленными дугами показаны условно-оптимальные управления, числам внутри кружков, обозначающих состояния, соответствуют величины условно-оптимальных потерь, а оптимальному календарному плану – путь из "нулевого" состояния S_0 в S_{64} (на рис. 5 этот путь выделен жирными линиями).

Пример 2. Здесь представлено решение общего случая задачи, когда интенсивность спроса (или объем заказов) изменяется во времени, промежутки времени между "соседними" заказами не постоянные, потери от переналадок и удельные потери от пролеживания тоже изменяются. Пошаговый процесс построения оптимального плана принципиально не отличается от приведенного в предыдущем примере. Исходные данные и результаты решения задачи

$j:$	1	2	3	4	5	6	7
$t_j:$	1	3	7	9	10	11	12
$z_j:$	10	20	25	10	5	6	7
$c_j:$	1	1	2	2	3	3	4
$C_j:$	45	45	60	60	80	80	90
$Z_j:$	30	0	25	10	18	0	0

Суммарные потери при оптимальном плане $\{Z_j\}$ – 280.

* * *

В заключение отметим, что характерный для динамического программирования быстрый рост объема вычислений с увеличением размерности задачи накладывает естественные ограничения на практическую применимость обсуждаемой вычислительной схемы (n – порядка нескольких десятков). Для решения подобных задач большой размерности (n – порядка сотен) можно рекомендовать приближенные методы оптимального группирования (см., например, [7]).

Автор признателен В.С. Петрищеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wagner H.M., Whitin T.M. Dynamic Version of the Economic Lot Size Model // Management Sci. 1958. V. 5. № 8.
2. Букан Дж., Кенингсберг Э. Научное управление запасами. М.: Наука, 1963.
3. Хедли Дж., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. М.: Наука, 1969.
4. Таха Х. Введение в исследование операций. Т. 2. М.: Мир, 1985.
5. Лебедев А.Н., Колесник Н.Н. Модели объемно-календарного планирования мелкосерийного производства и их реализация в программной системе НАРВА // Вест. машиностроения. 1988. № 10.
6. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972.
7. Колесник Н.Н., Руднев Ю.П. Алгоритм решения одной задачи классификации // Кибернетика. 1988. № 6.

Поступила в редакцию
9 VIII 1994