ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1995
Том 31, вып. 4

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ДОГОВОРНОЙ ЦЕНЫ

© 1995 г. Волгин Л.Н.

(*Москва*)

Заметка посвящена определению наилучшей договорной цены в элементарной рыночной акции купли-продажи определенного товара. Рынок представляет собой систему сделок, как правило, между парой агентов – продавцом и покупателем товара. Каждый из них имеет свою экспертную систему определения цены товара.

Обозначим через x цену товара, подлежащую определению. Опыт, накопленный в экспертной системе покупателя S, состоит в приобретении и экспериментальной проверке n аналогичных товаров, из которых только n_1 оказались хорошими (их высокое качество подтвердилось), а n_2 – плохими (обнаружилось их низкое качество). Хорошие товары были приобретены по ценам $\overset{+}{x}_1, ..., \overset{+}{x}_{n_1}$, а плохие – по ценам $\overset{-}{x}_1, ..., \overset{-}{x}_{n_2}$.

Экономику S будем характеризовать следующими четырьмя показателями: c_{11} – выигрыш S благодаря приобретению хорошего товара, c_{22} – выигрыш S благодаря отказу от приобретения плохого товара, c_{12} – ущерб S из-за отказа от приобретения хорошего товара, c_{21} – ущерб S из-за приобретения плохого товара.

Пусть хорошие и плохие товары встречаются на рынке в пропорции p_1:p_2. Будем считать, что цена товара x есть случайная величина, распределенная непрерывно на бесконечном интервале (допускается, что x может быть и отрицательным). Обозначим через $w_1(x)$ и $w_2(x)$ распределения вероятностей цен в классах хороших и плохих товаров (естественно считать, что эти распределения различны). Нормирующие условия: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_1(x)\,dx = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_2(x)\,dx = 1.$

Будем учитывать два рода ошибок:

1) ошибка 1-го рода – принять хороший товар за плохой и отвергнуть его; вероятность этой ошибки

$$\alpha = \int\limits_{-\infty}^{x} w_1(x)\,dx, \tag{1}$$

2) ошибка 2-го рода – принять плохой товар за хороший и приобрести его; вероятность этой ошибки

$$\beta = \int\limits_{x}^{+\infty} w_2(x)\,dx. \tag{2}$$

Вероятный выигрыш S от приобретения товара по цене x равен [1]

$$J(x) = p_1c_{11}(1-\alpha) + p_2c_{22}(1-\beta) - p_1c_{12}\alpha - p_2c_{21}\beta. \tag{3}$$

Он должен быть положительным, что требует $p_1(c_{11}+c_{12})\alpha + p_2(c_{22}+c_{21})\beta < p_1c_{11} + p_2c_{22}$. Это значит, что вероятности ошибок 1-го и 2-го рода должны быть достаточно малы. Подставляя (1) и (2) в (3), получим: $J(x)=p_1c_{11}\int\limits_x^{+\infty} w_1(x)\,dx+p_2c_{22}\int\limits_{-\infty}^{x} w_2(x)\,dx-$ $-p_1c_{12}\int\limits_{-\infty}^{x} w_1(x)\,dx-p_2c_{21}\int\limits_{x}^{+\infty} w_2(x)\,dx$. Встречая на рынке предложения товара по различным ценам, покупатель, естественно, выбирает товар такой цены x^*, при которой его вероятный выигрыш будет максимальным. Условие его максимума имеет вид: $J'(x)=-p_1(c_{11}+$ $+c_{12})\,w_1(x)+p_2(c_{22}+c_{21})\,w_2(x)=0$, или $\dfrac{w_1(x)}{w_2(x)}=\dfrac{p_2}{p_1}\dfrac{c_{22}+c_{21}}{c_{11}+c_{12}}$.

Функцию $l(x)=w_1(x)/w_2(x)$ будем называть правдоподобием хорошего качества товара, предлагаемого по цене x. Обозначим через

$$h=\frac{p_2}{p_1}\frac{c_{22}+c_{21}}{c_{11}+c_{12}} \tag{4}$$

величину порога. Условие

$$l(x)=h \tag{5}$$

определяет искомую величину x^*. Эта величина называется пороговым значением цены.

Итак, мы доказали, что для покупателя S выгодно приобретать товар по пороговой цене x^*. Из всех товаров, предлагаемых на рынке, он будет выбирать тот, который продается по цене, близкой к пороговой. Выбирая более дорогой товар, он проигрывает абсолютно, выбирая более дешевый – он рискует приобрести товар плохого качества. Поскольку покупатель ориентируется на пороговую цену, продавец с целью максимизации вероятности продажи предложит товар по пороговой цене. Таким образом, пороговая цена x^* должна быть принята в качестве договорной. Рассмотрим два частных случая.

1. Распределения цен являются гауссовыми

$$w_1(x)=(2\pi D_1)^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2D_1}(x-\mu_1)^2\right],\ w_2(x)=(2\pi D_2)^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2D_2}(x-\mu_2)^2\right], \tag{6}$$

каждое со своим средним μ_1,μ_2 и дисперсией D_1, D_2, которые можно вычислить по имеющейся статистике цен

$$\mu_1=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}x_i^+,\quad \mu_2=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}x_i^-,\quad D_1=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i^+-\mu_1)^2,\quad D_2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(x_i^--\mu_2)^2. \tag{7}$$

Подставляя выражения (6) в (5) и логарифмируя, получаем квадратное уравнение

$$\left(\frac{1}{D_1}-\frac{1}{D_2}\right)x^2-2\left(\frac{\mu_1}{D_1}-\frac{\mu_2}{D_2}\right)x+\left(\frac{\mu_1^2}{D_1}-\frac{\mu_2^2}{D_2}+\ln\frac{h^2D_1}{D_2}\right)=0. \tag{8}$$

Его решение имеет вид

$$x^*=\frac{\dfrac{\mu_1}{D_1}-\dfrac{\mu_2}{D_2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\mu_1}{D_1}-\dfrac{\mu_2}{D_2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{D_1}-\dfrac{1}{D_2}\right)\left(\dfrac{\mu_1^2}{D_1}-\dfrac{\mu_2^2}{D_2}+\ln\dfrac{h^2D_1}{D_2}\right)}}{\dfrac{1}{D_1}-\dfrac{1}{D_2}}. \tag{9}$$

Из двух точек $x_{1,2}$, являющихся решением этого уравнения, только одна служит точкой максимума функции $J(x)$. Ее можно отобрать проверкой достаточного условия максимума, связанного со знаком второй производной

$$J''(x)\sim hw_2'(x)-w_1'(x)<0. \tag{10}$$

2. Распределения цен являются пуассоновыми

$$w_1(x)=\frac{\lambda_1^x}{x!}\exp(-\lambda_1),\qquad w_2(x)=\frac{\lambda_2^x}{x!}\exp(-\lambda_2), \tag{11}$$

где λ_1, λ_2 – средние значения цен, вычисляемые по формулам

$$\lambda_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i^+, \quad \lambda_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_i^- . \tag{12}$$

Распределение Пуассона сосредоточено на положительной полуоси, что более естественно для цены, и является дискретным: $x = 0, 1, 2, \ldots$ Дискретность распределения цены приемлема, если взять достаточно мелкую единицу цены.

Выражение для вероятного выигрыша принимает вид

$$J(x) = p_1 c_{11} \sum_{n=x+1}^{\infty} w_1(n) + p_2 c_{22} \sum_{n=0}^{x} w_2(n) - p_1 c_{12} \sum_{n=0}^{\infty} w_1(n) - p_2 c_{21} \sum_{n=x+1}^{\infty} w_2(n).$$

Условие его максимума $\Delta J(x) = J(x) - J(x-1) = -p_1(c_{11} + c_{12})\, w_1(x) + p_2(c_{22} + c_{21})\, w_2(x) = 0$

дает по-прежнему (5). Подставляя в нее (11), получим $(\lambda_1 / \lambda_2)^x = h \exp(\lambda_1 - \lambda_2)$, откуда после логарифмирования получается следующая формула для пороговой цены

$$x^* = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \ln h}{\ln \lambda_1 - \ln \lambda_2}. \tag{13}$$

Пример. Пусть опыт покупателя состоит в приобретении пяти товаров, оказавшихся хорошими, по ценам (в условных единицах) $x^+ = 82, 96, 75, 68, 99$ и шести, оказавшихся плохими, по ценам $x^- = 72, 81, 55, 90, 44, 63$. Значения выигрышей и ущербов покупателя (в других условных единицах) $c_{11} = 2$, $c_{22} = 5$, $c_{21} = 4$, $c_{12} = 1$. Хорошие и плохие товары встречаются на рынке предположительно в разных пропорциях: $p_1 = p_2 = 0{,}5$. По (4) определяем величину порога: $h = 3$. Принимая гипотезу гауссовости, рассчитаем параметры распределений $\mu_1 = 84{,}2$, $\mu_2 = 67{,}5$, $D_1 = 250{,}8$, $D_2 = 287{,}5$.

Составляем квадратное уравнение (8): $0{,}0005x^2 = 0{,}2x + 12{,}625 = 0$. Его решения: $x_1 = 321$, $x_2 = 79$. Условию максимума вероятного выигрыша отвечает решение: $x^* = 79$. Именно такой должна быть договорная цена.

Принимая гипотезу паусcоновости, вычислим: $\lambda_1 = 84{,}2$, $\lambda_2 = 67{,}5$. Подставляя эти значения в формулу (13), получим $x^* = (84{,}2 - 67{,}5 + \ln 3) / (\ln 84{,}2 - \ln 67{,}5) = 78$. Как видим, различие в гипотезах о характере распределений мало влияет на окончательное решение. Это свидетельствует о робастности рассмотренной проблемы [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wald A.* Statistical Decision Functions. N.Y.: Wiley, 1950.
2. *Хьюбер Дж.П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию
25 XII 1994