
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

**Гарантированный детерминистский подход
к маржированию на срочном рынке**

© 2021 г. С.Н. Смирнов, И.В. Полиматиди

С.Н. Смирнов,

Факультет ВМК МГУ, Москва; e-mail: s.n.smirnov@gmail.com

И.В. Полиматиди,

АО ЮниКредит Банк, Москва; e-mail: ipolimatidi@gmail.com

Поступила в редакцию 27.08.2020

Авторы благодарны коллегам из департамента риск-менеджмента Чикагской товарной биржи (СМЕ) за организацию семинара в 2002 г. для презентации нашей методики маржирования. Мы также признательны Луичи Висенте за полезные обсуждения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта 19-01-00613а.

Аннотация. В статье обсуждается современный подход к риск-менеджменту центрального контрагента, в первую очередь вопрос о достаточности его финансовых ресурсов, включая обеспечение участников клиринга, капитал центрального контрагента и фонд солидарной ответственности. Особое внимание уделено системе маржирования, отвечающей за адекватный уровень обеспечения участников клиринга и играющей важную роль в риск-менеджменте. Критически анализируется регулирование, принятое в настоящее время в международной практике. Описывается система маржирования портфеля из опционов и фьючерсов на срочном рынке, с дефолт-менеджментом, основанным на методологии, предложенной рядом авторов изобретения, зарегистрированного в 2004 г. Для этой системы строится математическая модель маржирования, т.е. определения требуемого уровня депозитной маржи (гарантийного обеспечения). Основная идея состоит в том, что измерение риска портфеля для целей маржирования должно учитывать метод дефолт-менеджмента, а вместо простейшей процедуры, состоящей в ликвидации позиций дефолтера, центральному контрагенту целесообразно использовать управление портфелем дефолтера. Новизна данной статьи заключается в использовании идеологии гарантированного детерминистского подхода к суперхеджированию, предложенного одним автором в ряде публикаций и основанного на теоретико-игровой интерпретации. Из экономического смысла задачи непосредственно выводятся уравнения Беллмана–Айзекса для требуемого уровня маржи. Изучаются свойства этих уравнений, в частности доказано свойство субаддитивности маржи портфеля — важное с экономической точки зрения требование к системе маржирования. Полученные уравнения приведены к форме, удобной для вычислений, они позволяют проводить численные эксперименты. Соответствующие результаты анализа работоспособности системы маржирования будут представлены в последующей публикации.

Ключевые слова: центральный контрагент, клиринг, дефолт-менеджмент, капитал, маржирование, опцион, фьючерс, уравнения Беллмана–Айзекса, субаддитивность обеспечения портфеля.

Классификация JEL: C61, C63, G23.

DOI: 10.31857/S042473880014918-8

ВВЕДЕНИЕ

После глобального финансового кризиса, начавшегося в 2007 г., сформировалась международная тенденция, заключающаяся в повышении роли клиринга через центрального контрагента (central counterparty, ССР) — унифицированного финансового института, замещающего стороны сделки, с целью снижения риска неисполнения участниками торгов своих обязательств. Подробно тематика клиринга изложена в книге (Майоров, 2015).

Клиринговая организация должна рассчитывать требования к депозитной марже¹ членов биржи, т.е. уровень средств, который необходимо поддерживать на клиринговом счете для обеспечения обязательств по портфелю участника биржи. Обеспечение может быть внесено как в денежной форме, так и в виде ценных бумаг и других высоколиквидных активов, связанных с соответствующими инструментами. Клиринговая организация осуществляет контроль над соблюдением требований по депозитной марже. При этом клиринговая организация может изменять требования по депозитной марже в течение срока действия контракта, но член биржи — участник торгов — обязан поддерживать количество средств на своем клиринговом счете на требуемом уровне. В случае если участник торгов не удовлетворяет требованиям по депозитной марже, клиринговая организация производит урегулирование ситуации с дефицитом маржи. В мировой практике общепринятым способом урегулирования является ликвидация (полная или частичная) портфеля участника, не удовлетворяющего требованиям по депозитной марже (дефолтера), по текущим рыночным ценам. В особых случаях при недостаточной ликвидности рынка (в частности, при крупных позициях дефолтера) может проводиться аукцион. Однако, по нашему мнению, дизайн аукциона должен быть тщательно продуман и подробно описан в правилах клиринга. При этом возникающие убытки портфеля дефолтера должны в первую очередь покрываться за счет обеспечения (депозитной маржи), внесенного данным участником, — это первый эшелон защиты центрального контрагента. Если этих средств окажется недостаточно, то используют его взнос в фонд солидарной ответственности членов клиринга. Если этого также недостаточно, то используют фонд, формируемый из капитала (собственных средств) центрального контрагента, — это второй эшелон защиты. А если и этого окажется недостаточно, то убытки погашаются за счет фонда солидарной ответственности участников клиринга (в этом случае участникам клиринга предлагают впоследствии пополнить этот фонд). Таким образом, создается несколько эшелонов защиты контрагента, совокупность которых на английском языке принято называть “default waterfall”. На русском языке терминология еще не сформировалась, поэтому мы будем использовать термин «дефолтное эшелонирование». Капитал центрального контрагента, используемый на покрытие убытков, так называемый “skin-in-the-game”², и фонд солидарной ответственности участников клиринга играют дополняющую роль к депозитной марже участников клиринга. Центральное место в дискуссии о достаточности финансовых ресурсов центрального контрагента, активно ведущейся в настоящее время, занимает вопрос о стимулах, создаваемых структурой дефолтного эшелонирования (см. (Cont, 2015, Carponi, Cheng, Sethuraman, 2017)).

Маржирование не только выступает в роли авангарда в дефолтном эшелонировании, но и, являясь наиболее чувствительным к риску эшелоном защиты, играет критическую роль в риск-менеджменте центрального контрагента. Поэтому регуляторы особое внимание уделяют проблеме маржирования. Исторически первый документ, *Report on margin* (IOSCO, 1996), определявший международные принципы регулирования, был разработан IOSCO еще в 1996 г. Регулирование центральных контрагентов с упором на практику управления рисками было кардинально усовершенствовано после мирового финансового кризиса. Это отражено в документе «Принципы инфраструктуры финансового рынка» (CPSS, IOSCO, 2012), имеющем характер глобального руководства для национальных регуляторов; в Европейском союзе роль такого регулирования играет EMIR³. В частности, EMIR требует, чтобы степень покрытия депозитной маржей была «достаточной для покрытия экспозиции к риску, которая, по оценкам центрального контрагента, может возникнуть вплоть до ликвидации⁴ соответствующих позиций»⁵. Мы же считаем более корректно использовать расширенное толкование критерия качества системы портфельного маржирования из Принципа 6 в «Принципах инфраструктуры финансового

¹ Терминология, использовавшаяся на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ). На Московской бирже, образованной в 2011 г. в результате слияния бирж ММВБ и РТС, принят термин «гарантийное обеспечение», использовавшийся на срочном рынке РТС.

² Афоризм на английском языке (дословный перевод — «шкура в игре»), распространен в бизнесе, финансах и азартных играх, а также в политике. В данном контексте — часть капитала центрального контрагента, которая может быть использована для покрытия убытков в случае дефолта участников рынка. В терминологии, принятой на Московской бирже, это выделенный капитал центрального контрагента.

³ The European Market Infrastructure Regulation. Действует с 2012 г.

⁴ Курсив наш.

⁵ The EMIR RTS No. 153/2013.

рынка». Незначительно перефразируя⁶, можно сформулировать это следующим образом: требуемый уровень депозитной маржи должен корректно и адекватно отражать риск портфеля участника клиринга, а именно обеспечивать заданную степень⁷ покрытия потерь, которые могут возникнуть в результате закрытия всех позиций в портфеле. Особо отметим, что закрытие позиций может происходить по определенной центральным контрагентом процедуре дефолт-менеджмента, отличной от простой ликвидации. Подробно современные требования к системе риск-менеджмента центрального контрагента изложены в (CPMI–IOSCO, 2017), а также в документе (ISDA, 2019), касающемся наилучших практик центрального контрагента.

В данной статье нас будут интересовать системы портфельного маржирования для торговли биржевыми производными финансовыми инструментами, фьючерсами и опционами. Наиболее популярной из систем портфельного маржирования, которые используются в мировой практике, является система SPAN⁸, разработанная еще в 1988 г. на Чикагской товарной бирже (CME). В настоящее время ею пользуются более чем в 50 биржевых и клиринговых организациях по всему миру⁹. Подробное изложение особенностей построения системы SPAN можно найти в (Долматов, 2007). С нашей точки зрения, на сегодняшний день наиболее продвинутой является система CORE, разработанная на бразильской бирже BM&FVovespa. Система CORE обобщает классический метод стресс-сценариев SPAN путем явного включения рыночной ликвидности финансовых инструментов посредством моделирования профиля ликвидности инструментов и механизма ликвидации на аукционе. Главным компонентом методологии CORE является определение стратегии закрытия позиций для портфеля дефолтера, ликвидации или урегулирования портфеля — от, возможно, простейшей стратегии закрытия — скорейшей ликвидации всех позиций портфеля (что можно назвать наивной стратегией) — до более сложного формата, основанного на определенных правилах. Идеология системы описана в (Avellaneda, Cont, 2013), ее технические аспекты — в (Vicente, 2012); см. также изобретение (Vicente et al., 2015), оно касается процесса оценки риска при закрытии позиций портфеля.

При разработке нами нового подхода к организации торгов срочными инструментами — фьючерсами и опционами на основе правил клиринга с оригинальной процедурой урегулирования ситуации с дефицитом маржи и системой портфельного маржирования — была использована идея детерминистского гарантированного оценивания опционов. Соответствующий способ моделирования неопределенности движения цен был опубликован значительно позже, в статье (Смирнов, 2018; Smirnov, 2021). Близкие идеи стали активно развиваться лет через 10–15 в работах ряда авторов в виде направления интервального оценивания (см. (Bernhard et al., 2013)) и модного сейчас направления робастного суперхеджирования (см., например, (Burzoni et al., 2019; Carassus, Oblój, Wiesel, 2019)), что стало признаваться альтернативой традиционному вероятностному подходу (современное изложение которого можно найти в книге (Föllmer, Schied, 2016)).

Разработанная нами методика¹⁰ прошла апробацию в 2002 г. в департаменте риск-менеджмента Чикагской товарной биржи (CME), а в 2004 г. был получен патент РФ на изобретение (Смирнов и др., 2004). Наш подход совместим с методологией CORE — достаточно прочитать Abstract на первой странице изобретения (Vicente et al., 2015), чтобы увидеть сходство идеологии изобретений (Vicente et al., 2015; Смирнов и др., 2004). Можно сделать вывод, что изобретение (Смирнов и др., 2004) опередило время лет на десять — в финансовой индустрии стали внимательно относиться к качеству математических моделей только после (и вследствие) глобального финансового кризиса. Изобретение (Смирнов и др., 2004) — конкретнее и детальнее по сравнению с (Vicente et al., 2015), поскольку относится к более узкой предметной области (срочный рынок).

⁶ В оригинале: "...initial margin models and parameters that are risk-based and generate margin requirements sufficient to cover its potential future exposure to participants in the interval between the last margin collection and the close out of positions following a participant default".

⁷ К сожалению, *заданная степень*, как правило, воспринимается буквально, т.е. как (статистический) доверительный уровень.

⁸ Standard Portfolio. Analysis of risk.

⁹ CME Group разработала следующее поколение системы маржирования — CME SPAN2, внедрение которой началось в 2020 г. Ожидается, что полное развертывание продлится до четырех лет, в течение которых SPAN и SPAN2 будут параллельно доступны для конечных пользователей. Методология системы не раскрывается.

¹⁰ Изначально методика создавалась в начале 2000-х годов с целью внедрения на фондовой бирже «Российская торговая система» — РТС, но в связи с уходом президента биржи И.А. Тырышкина в феврале 2003 г. проект не был реализован.

1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ МАРЖИРОВАНИЯ, ОСНОВАННОЙ НА ДЕТЕРМИНИСТСКОМ ГАРАНТИРОВАННОМ ПОДХОДЕ

Предлагаемая в (Смирнов и др., 2004) методика организации биржевых торгов производными финансовыми инструментами с оригинальной системой портфельного маржирования и процедурой урегулирования разработана с целью обеспечения устойчивой работы не только в случае нормального, но и низколиквидного рынка. Один из простейших вариантов реализации системы основан на урегулировании ситуации при дефиците маржи путем управления портфелем *ассигнора*¹¹ при помощи фьючерсных сделок, оставляя опционные позиции неизменными. Таким образом, достигается устойчивость работы системы в условиях низкой ликвидности рынка, поскольку опционы обладают значительно меньшей ликвидностью по сравнению с фьючерсами.

Система предназначена для электронной формы организации биржевых торгов. Каждая новая заявка участника торгов проверяется в режиме реального времени на допустимость¹²: это означает, что с учетом всех активных заявок и текущего портфеля участника торгов исполнение какой-либо части заявок не может привести к возникновению *дефицита маржи*. Тем самым гарантируется, что дефицит маржи не может возникнуть между клиринговыми сессиями. Перестройка портфеля, связанная с исполнением заявки, приводит к перерасчету требований к депозитной марже и, возможно, к изменению количества средств на клиринговом счете. По окончании торговой сессии проводится клиринговая сессия, по итогам которой определяется расчетная цена (цена закрытия) основы¹³, эта цена используется для определения новых требований по депозитной марже. Во время клиринговой сессии могут быть изменены параметры системы, такие как, например, *дневные лимиты изменения фьючерсной цены*, которые также влияют на требования по депозитной марже участников рынка.

Дефицит маржи определяется у участников торгов по результатам клиринговой сессии и подлежит урегулированию, начиная со следующего торгового дня. Предлагаемая процедура урегулирования ситуации дефицита маржи у участника торгов — если участник не смог самостоятельно урегулировать ситуацию путем перестройки портфеля или внесения необходимых средств на клиринговый счет в установленный правилами биржи срок (обычно несколько часов после открытия торгов) — использует переход права на управление портфелем, состоящим из фьючерсов и опционов, к клиринговой организации. При этом управление портфелем заключается в проведении понижающих риск портфеля корректирующих операций с фьючерсами от имени и по поручению участника рынка по алгоритму, заранее и полностью описанному в правилах клиринга центрального контрагента. Ситуация с дефицитом маржи ассигнора может быть урегулирована в результате:

- 1) исполнения контрактов (возможно, с использованием средств резервного или гарантийного фонда);
- 2) полного закрытия позиций участника (возможно, с использованием капитала центрального контрагента и средств фонда солидарной ответственности членов клиринга);
- 3) частичного закрытия позиций участника, приводящего к устранению дефицита маржи;
- 4) устранения дефицита маржи в результате управления центральным контрагентом портфелем ассигнора или изменения параметров торговой системы, например дневных лимитов изменения цены;
- 5) внесения участником необходимых средств на клиринговый счет.

В случаях 3, 4 и 5 участнику клиринга, имевшему статус ассигнора, возвращается право на проведение операций со своим портфелем, начиная со следующего торгового дня.

Уровень депозитной маржи определяется исходя из оптимального управления портфелем ассигнора при помощи *фьючерсной коррекции* (заключения центральным контрагентом фьючерсных контрактов от имени и по поручению ассигнора) без изменения его опционных позиций¹⁴. Это — одно из существенных отличий от систем типа SPAN, поведение которых можно назвать

¹¹ Данный термин является введенным нами неологизмом (от англ. assignor).

¹² В таком режиме в настоящее время работает торговая система на срочном рынке Московской биржи.

¹³ На английском языке underlying — базовый актив, или ценовой индекс.

¹⁴ Пример формализации задачи для случая европейских опционов приведен в следующем разделе.

близоруком, поскольку там учитываются сценарии поведения рынка только на день вперед. Предлагаемая процедура урегулирования ситуации с дефицитом маржи, в отличие от общепринятого способа управления, заключающегося в полной или частичной ликвидации портфеля, приводит к более щадящему, с точки зрения участников рынка, способу — к сохранению опционных позиций и поддержанию сбалансированных портфелей с точки зрения их риска. Для того чтобы осуществить корректирующее управление портфелем ассигнора, необходимо рассчитать число длинных или коротких фьючерсных позиций, которые необходимо открыть за торговый день. При этом заключение этих контрактов целесообразно производить постепенно, небольшими порциями, чтобы минимизировать влияние на формирование рыночных цен.

Для обеспечения системной устойчивости рынка способ определения уровня депозитной маржи должен удовлетворять *принципу децентрализации*, что означает выполнение свойства субаддитивности требуемого обеспечения для портфелей из опционов и фьючерсов, а это обеспечивает конструкция предлагаемой системы. При этом к брокерам должно применяться правило, обязывающее их требовать от своих клиентов депозитной маржи в размере не ниже уровня, устанавливаемого системой маржирования клиринговой организации (обычно такое правило устанавливает регулятор рынка¹⁵). Члены клиринга, которые имеют клиентов, т.е. выполняют брокерские функции, в случае возникновения дефицита маржи у клиента, когда клиент не урегулирует данную ситуацию в течение времени, отведенного правилами клиринга, обязаны открыть клиенту *ассигнорский торговый счет* и *ассигнорский клиринговый счет*, на которые переводятся соответственно его позиции и его средства. Для каждого такого клиента открываются отдельные счета, т.е. соблюдается принцип сегрегации счетов с целью защиты клиентских средств. Далее центральный контрагент производит с этими клиентскими счетами такие же действия, как и со счетами ассигнора, являющегося членом клиринга.

При наличии лимитов изменения базового актива возможен гарантированный (безрисковый) вариант системы, который обеспечивает покрытие обязательств участников рынка при всех сценариях поведения рынка, включая полную потерю ликвидности. Разумеется, это подразумевает высокий уровень депозитной маржи, возможно, неприемлемый для участников клиринга. А это означает полное отсутствие рыночных и кредитных рисков для центрального контрагента и участников рынка¹⁶. При такой конструкции капитал центрального контрагента и фонд солидарной ответственности членов клиринга покрывают лишь операционный риск.

Другой вариант предлагаемой системы отвечает случаю, когда центральный контрагент принимает часть рисков на себя. При дефолте участника клиринга покрытие его обязательств может производиться с частичным использованием капитала центрального контрагента и фонда солидарной ответственности членов клиринга. Достоинство предлагаемой в (Смирнов и др., 2004) системы состоит в том, что сценарии неполного покрытия могут быть описаны конструктивно, т.е. центральный контрагент имеет возможность осознанно принимать риски, а также регулировать их путем изменения параметров системы.

В зависимости от выбора конкретных спецификаций опционов (американского или европейского типа, расчетные или поставочные, *традиционное маржирование опционов* или *фьючерсный стиль маржирования опционов*), а также в зависимости от наличия или отсутствия лимитов на дневное изменение фьючерсных цен возможны различные варианты реализации системы.

Хеджирующая (корректирующая) стратегия системы маржирования в (Смирнов и др., 2004) может быть встроена в стандартную процедуру клиринга различными способами. Так, например, для одного такого типа встраивания предлагается выделение этапа корректирующего управления портфелем участника в течение заранее заданного срока, если сам участник не смог вовремя урегулировать ситуацию дефицита маржи. Если в течение этого срока корректирующее управление позволило устранить дефицит, а срок исполнения еще не наступил, портфель возвращается участнику. В противном случае участник меняет статус с ассигнора на дефолтера, а портфель безвозвратно переходит к клиринговой организации. Клиринговая организация проводит процедуру финализации¹⁷, которая отличается от корректирующего управления тем,

¹⁵ См., например, (IOSCO, 1996).

¹⁶ Отметим, что исторически система, действовавшая с ноября 2000 г. на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ), являлась гарантированной, однако обеспечивала торговлю только фьючерсами.

¹⁷ Терминология наша.

что хеджирование производится всеми имеющимися на рынке средствами (в том числе путем проведения сделок с опционами, снижающими риск портфеля) с целью минимизировать функцию выплат портфеля в течение всего срока, оставшегося до исполнения или полного закрытия позиций портфеля. В случае корректирующего управления используются наиболее ликвидные инструменты — фьючерсы, а целью является устранение дефицита маржи. Процедуру можно упростить, оставив только финализацию, т.е. если участник не смог устранить дефицит самостоятельно в отведенный срок, он сразу становится дефолтером.

2. МАРЖИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФИНАНСОВОГО РЫНКА С ДЕТЕРМИНИСТСКОЙ ЭВОЛЮЦИЕЙ ЦЕН

Предположим, что клиринговая сессия производится один раз в день¹⁸ и в системе маржирования предписано проведение фьючерсных корректирующих сделок один раз в каждый торговый день, вплоть до экспирации, одинаковой для всех финансовых инструментов в портфеле, а срок корректирующего управления равен числу дней до экспирации.

Опишем метод расчета маржи на примере рынка европейских опционов на фьючерсы (европейский опцион характеризуется тем, что объем выплат определяется на основе цены закрытия дня исполнения данной серии опционов). На движение фьючерсных цен в модели наложены ограничения: изменение цены внутри дня не должно выводить цену за пределы коридора — интервала $I(x) = [x - \Delta^d, x + \Delta^u]$, где x — цена закрытия предыдущего торгового дня; $\Delta^d > 0$ и $\Delta^u > 0$ — нижний и верхний лимиты изменения цен фьючерсной цены соответственно. Размеры этих лимитов являются параметрами системы, они, в частности, могут зависеть от конкретного инструмента и от предыстории цен. Как правило, лимиты изменения фьючерсной цены устанавливаются в виде определенного процента от цены закрытия предыдущего торгового дня. Предположим в нашей модели, что фьючерсные цены положительные, $\Delta^d = \alpha x$, а $\Delta^u = \beta x$, где $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$ (на практике α и β бывают порядка нескольких процентов, причем, поскольку опасность падения цен обычно сильнее опасений их роста, разумно выбирать $\alpha \geq \beta$). Случаи потери ликвидности фьючерсного рынка следует относить к крайне маловероятным и экстремальным, так что для покрытия убытков, если они возникают, разумно использовать средства дефолтного эшелонирования, начиная с капитала центрального контрагента. При условии ликвидности фьючерсного рынка строится гарантированная система маржирования, при которой взимаемая с участника клиринга маржа гарантированно покрывает возможные потери центрального контрагента при неисполнении этим участником своих обязательств. Это достигается за счет исполнения центральным контрагентом предписанной процедуры урегулирования ситуации с дефицитом маржи и непосредственной связи требуемого уровня депозитной маржи с этой процедурой.

Предположим, что корректирующая фьючерсная сделка, производящаяся один раз в день, происходит по цене, входящей в интервал $I(x)$. Однако точное значение этой цены заранее неизвестно, так что в модели возникают косвенные транзакционные издержки, описывающие наиболее неблагоприятный сценарий при совершении этой сделки. С учетом этого обстоятельства введем целевую функцию $V_t(x, k)$ — неотрицательное количество денежных средств на счете в момент времени t , необходимых для покрытия потенциальных потерь портфеля участника, для которого будут проводиться корректирующие сделки раз в день вплоть до исполнения. Отметим, что целевая функция зависит не только от цены x , но и от числа фьючерсов¹⁹ k в корректируемом портфеле по итогам закрытия предыдущего торгового дня.

Рыночный риск портфеля из опционов европейского типа и фьючерсов определяется функцией выплат по портфелю $f(x)$ — размером средств, который получает (в случае положительного значения) или выплачивает (в случае отрицательного значения) владелец данного портфеля (в предположении его неизменности) в момент исполнения через срок T , в зависимости от цены закрытия x основы (фьючерсной цены) в этот момент. Предполагается, что эта функция удовлетворяет условию Липшица²⁰.

¹⁸ На самом деле клиринговая сессия может проводиться несколько раз в день, и это особенно оправдано в случае высокой волатильности рынка.

¹⁹ Поскольку от числа корректирующих фьючерсов в портфеле зависят косвенные транзакционные издержки.

²⁰ Что на самом деле вполне естественно, так как в случае комбинации опционов call и put (с одним сроком экспирации и разными ценами исполнения) функция будет кусочно-линейной с конечным числом интервалов линейности.

В терминальный момент должно выполняться $V_T(x, k) \geq -f(x)$, так что положим

$$V_T(x, k) = (-f(x))^+ = (f(x))^-; \quad (1)$$

здесь и далее используются $a^+ = \max(0, a)$ и $a^- = \max(0, -a)$, для $a \in \mathbb{R}$.

Для получения рекуррентных соотношений для целевой функции предположим, что на шаге $t < T$ после клиринговой сессии на счете имеется (неотрицательная) сумма и открыта позиция в размере k фьючерсов (а это — отрицательное число для коротких позиций и положительное — для длинных). Если корректирующая фьючерсная сделка покупки/продажи фьючерсов происходит по цене y , входящей в интервал — $I(x)$, а цена закрытия следующего дня ($t+1$) также входит в интервал $I(x)$ и равна z , то вариационная маржа составит величину $k(z-x) + m(z-y)$. Для покрытия потерь в терминальный момент необходимо, чтобы $v + k(z-x) + m(z-y) \geq V_{t+1}(z, k+m)$ для любых $y \in I(x)$ и $z \in I(x)$. При этом m , объем сделки (со знаком), можно выбрать оптимальным образом, так что

$$V_t(x, k) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} \max_{y \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) + kx - (k+m)z + my]^+; \quad (2)$$

здесь и далее \mathbb{Z} обозначает множество всех целых чисел. Нетрудно упростить формулу (2), явно находя максимум по y выражения my , который равен

$$\max_{y \in I(x)} my = mx + (m^- \Delta^d + m^+ \Delta^u) = mx + (\alpha m^- + \beta m^+)x = mx + c(x, m). \quad (3)$$

С экономической точки зрения неотрицательная величина

$$c(x, m) = m^- \Delta^d + m^+ \Delta^u = (\alpha m^- + \beta m^+)x$$

представляет собой косвенные транзакционные издержки²¹, максимально возможные за торговый день при сделанных предположениях относительно эволюции фьючерсной цены. Используя (3), рекуррентные соотношения для целевой функции приобретают вид следующих уравнений Беллмана—Айзкса²²:

$$V_t(x, k) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)]^+, \quad t = T-1, \dots, 0. \quad (4)$$

В действительности нет необходимости брать положительную часть от квадратных скобок в (4), т.е. для целевой функции имеют место уравнения

$$V_T(x, k) = (f(x))^-,$$

$$V_t(x, k) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)], \quad t = T-1, \dots, 0. \quad (5)$$

В самом деле, $V_T(x, k) = (f(x))^- \geq 0$, а для $t < T$, предполагая, что в (5) выполняется $V_{t+1}(x, k) \geq 0$, и, учитывая неравенство

$$\begin{aligned} & \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)] \geq \\ & \geq \max_{z \in I(x)} [-(k+m)(z-x) + c(x, m)] = c(x, -(k+m)) + c(x, m), \end{aligned} \quad (6)$$

получаем, что для целевой функции $V_t(x; k)$ выполняется неравенство

$$V_t(x, k) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)] \geq 0. \quad (7)$$

С учетом (7), для целевой функции, определяемой уравнениями (5), имеют место рекуррентные уравнения (4), равносильные уравнениям (5). Уравнения (5) позволяют дать интерпретацию задаче фьючерсной коррекции как специальной задаче суперхеджирования²³ для европейского опциона с функцией выплат $(f(x))^-$, с транзакционными издержками $c(x; m)$ и дискретной (целочисленной) стратегией хеджирования фьючерсами с нулевым числом фьючерсов в начальный момент, рассматривая количество средств на счете как безрисковый актив с торговым

²¹ Более реалистичная модель определяла бы косвенные транзакционные издержки на основе книги заявок.

²² Использование максимума, а не точной верхней грани, оправдано благодаря предположению о липшицевости функции f , так как в этом случае функции $x \rightarrow V_t(x, k)$ также удовлетворяют условию Липшица; оценки констант Липшица для целевой функции получаются методом, сходным с опубликованным в статье (Smirnov, 2019), и будут приведены в последующей публикации.

²³ Для обусловленного обязательства (contingent claim), возникающего у продавца опциона, выплаты по которому определяются на основании эволюции цен определенных торгуемых активов, фьючерсов или рыночных индексов, суперхеджирующая (суперреплицирующая) стратегия проведения операций на соответствующем финансовом рынке (допустимая с учетом возможных торговых ограничений) позволяет полностью покрыть обязательства (в отличие от других видов хеджирования) при минимальном начальном капитале (премии, взимаемой с покупателя опциона), см., например, главу 7 в книге (Föllmer, Schied, 2016).

ограничением — запретом овердрафта. Имея решения уравнений (5) с терминальным условием (1), в качестве требуемого уровня депозитной маржи в текущий момент при фьючерсной цене для портфеля с функцией выплат $f(x)$ через срок T можно выбрать величину

$$M(f, T, x_0) = V_0(x_0, 0). \tag{8}$$

При этом очевидно, что

$$M(f, T - s, x) = V_s(x, 0). \tag{9}$$

В работе (Artzner et al., 1999), где впервые были введены аксиомы показателя риска портфеля²⁴, фигурирует аксиома субаддитивности, которую мы считаем основной, а с практической точки зрения — существенным требованием к системе маржирования, обеспечивающим корректность при маржировании нескольких клиентских портфелей, а также переносимость позиций несегрегированных портфелей (portability) в случае дефолта члена клиринга. Если обозначить через $\varrho(V)$ неотрицательный показатель риска для текущей стоимости портфеля V , то принцип децентрализации, т.е. свойство субаддитивности, означает неравенство $\varrho(V_1 + V_2) \leq \varrho(V_1) + \varrho(V_2)$.

Предложение 1. *Требуемый уровень депозитной маржи удовлетворяет свойству субаддитивности, т.е.*

$$M(f_1 + f_2, T, x_0) \leq M(f_1, T, x_0) + M(f_2, T, x_0). \tag{10}$$

Доказательство. Установим более общее неравенство, из которого (10) вытекает по определению (8). Пусть $V_t^i(x, k)$ — целевые функции, отвечающие портфелям с функциями выплат f_i , $i = 1, 2, 3$, где $f_3 = f_1 + f_2$, тогда

$$V_t^3(x, k_1 + k_2) \leq V_t^1(x, k_1) + V_t^2(x, k_2). \tag{11}$$

Покажем справедливость (11) по индукции. Для $t = T$ это вытекает из (1) и неравенства $(a + b)^- \leq (a)^- + (b)^-$. Пусть (11) выполняется для $t = T, \dots, s + 1$, где $s \in \{0, \dots, T - 1\}$. Далее справедливо неравенство $c(x, m_1 + m_2) \leq c(x, m_1) + c(x, m_2)$; с использованием этого неравенства и индуктивного предположения имеем

$$\begin{aligned} V_s^3(x, k_1 + k_2) &= \min_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{s+1}^3(x, k_1 + k_2 + m_1 + m_2) - \\ & - (k_1 + k_2 + m_1 + m_2)(z - x) + c(x, m_1 + m_2)] \leq \min_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \{ \max_{z \in I(x)} [V_{s+1}^1(x, k_1 + m_1) - \\ & - (k_1 + m_1)(z - x) + c(x, m_1)] + \max_{z \in I(x)} [V_{s+1}^2(x, k_2 + m_2) - (k_2 + m_2)(z - x) + c(x, m_2)] \} = \\ &= \min_{m_1 \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{s+1}^1(x, k_1 + m_1) - (k_1 + m_1)(z - x) + c(x, m_1)] + \\ &+ \min_{m_2 \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{s+1}^2(x, k_2 + m_2) - (k_2 + m_2)(z - x) + c(x, m_2)] = V_s^1(x, k_1) + V_s^2(x, k_2). \end{aligned}$$

Отметим, что свойство (11) имеет интересную экономическую интерпретацию, заключающуюся в возможности у центрального контрагента в его процедуре дефолт-менеджмента в случае нескольких ассигноров (с одинаковым сроком до исполнения опционов в их портфелях) использовать оптимальную стратегию коррекции совокупного портфеля всех таких ассигноров. Эта особенность системы маржирования будет продемонстрирована на модельном примере в последующей публикации.

Аксиома монотонности, означающая, что неравенство $V_1 \leq V_2$ влечет $\varrho(V_1) \geq \varrho(V_2)$, также представляется разумным требованием к системе маржирования и выполняется в нашем случае. Пусть $V_t^i(x, k)$ — целевые функции, отвечающие портфелям с функциями выплат f_i , $i = 1, 2$ и $f_1 \leq f_2$. Поскольку функция $u \mapsto (u)^-$ является монотонно невозрастающей, то $V_t^1(x, k) \geq V_t^2(x, k)$. По индукции, непосредственно из соотношений (5), получаем неравенства $V_t^1(x, k) \geq V_t^2(x, k)$ для $t = T - 1, \dots, 0$, откуда $M(f_1, T, x_0) \geq M(f_2, T, x_0)$. Что касается свойства положительной однородности, т.е. $\varrho(\lambda V) = \lambda \varrho(V)$, $\lambda \geq 0$, то, по нашему мнению, оно не является естественным с экономической точки зрения и вполне может не выполняться для малых портфелей²⁵. В нашем случае это связано с целочисленными позициями по фьючерсам. Если показатель риска ϱ удовлетворяет свойству субаддитивности, то последовательность $\varrho(nV)/n$, $n = 1, 2, \dots$ сходится по лемме Фекете (Fekete, 1923) к пределу $\varrho^*(V) = \inf\{\varrho(nV)/n, n = 1, 2, \dots\}$; для $\varrho^*(\cdot)$, очевидно, выполняется свойство

²⁴ Также называемого *мерой риска* (risk measure).

²⁵ При этом на типичном срочном (биржевом) рынке преобладают малые или средние портфели.

субаддитивности. Если, кроме того, функция $\lambda \mapsto \varrho(\lambda V)$, $\lambda \geq 0$ является монотонно неубывающей²⁶, то $\varrho(\lambda V) / \lambda \rightarrow \rho^*(V)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, причем $\varrho^*(\lambda V) = \lambda \varrho^*(V)$ для всех $\lambda \geq 0$, т.е. свойство положительной однородности для $\varrho^*(\cdot)$ выполняется. Таким образом, для больших портфелей можно говорить об асимптотической положительной однородности $\varrho(\cdot)$; при этом $\varrho(\cdot) \geq \varrho^*(\cdot)$.

В нашем случае в силу неотрицательности и положительной однородности функции $u \mapsto (u)^-$ функция $\lambda \mapsto M(\lambda f, T, x_0)$, $\lambda \geq 0$ является монотонно неубывающей, что проверяется по индукции аналогично приведенным выше рассуждениям, касающимся свойства монотонности. При этом, если бы параметры m и k принимали не целочисленные, а вещественные значения, то свойство положительной однородности, как нетрудно видеть, было бы выполнено. Поэтому в рамках нашей модели эффект асимптотической положительной однородности можно интерпретировать как снижение роли гранулированности для большого портфеля.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Идея изобретения (Смирнов и др., 2004), описывающая способ определения уровня обеспечения и способ урегулирования ситуации с дефицитом маржи, основанного на фьючерсной коррекции, проиллюстрирована на конкретной реализации. Математическая модель определения требуемого уровня депозитной маржи строится по аналогии с идеологией гарантированного детерминистского подхода к суперхеджированию, описанной в работе (Смирнов, 2018): из экономического смысла задачи выводятся уравнения Беллмана–Айзекса. Доказан ряд свойств модели, естественных с экономической точки зрения, в частности субаддитивность маржи.

В следующей публикации будут представлены результаты численного эксперимента, подтверждающие эффективность предлагаемого подхода к маржированию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Долматов А.С. (2007). Математические методы риск-менеджмента. М.: Экзамен. [Dolmatov A.S. (2007). *Mathematical methods in risk-management*. Moscow: Ekzamen (in Russian).]
- Майоров С. (2015). Клиринг на финансовых рынках. М.: Статистика России. [Mayorov S. (2015). *Clearing in the financial markets*. Moscow: Statistika Rossii (in Russian).]
- Смирнов С.Н. (2018). Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения и уравнения Беллмана–Айзекса // *Математическая теория игр и ее приложения*. Т. 10. № 4. С. 59–99. [Smirnov S.N. (2018). A guaranteed deterministic approach to superhedging: financial market model, trading constraints and Bellman–Isaacs equations. *Mathematical Game Theory and Its Applications*, 10, 4, 59–99 (in Russian).]
- Смирнов С.Н., Захаров А.В., Полимати́ди И.В., Балабушкин А.Н. (2004). Способ электронной биржевой торговли производными финансовыми инструментами, способы определения уровня депозитной маржи, способы урегулирования ситуации с дефицитом маржи. Патент РФ № 2226714. [Smirnov S.N., Zakharov A.V., Polimatidi I.V., Balabushkin A.N. (2004). *Method of electronic exchange trading in derivative financial instruments, methods for determining the level of deposit margin, methods for resolving margin deficit*. Patent of Russian Federation No. 2226714 (in Russian).]
- Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9, 3, 203–228.
- Avellaneda M., Cont R. (2013). Close-out risk evaluation (CORE): A new risk management approach for central counterparties. *SSRN Electronic Journal*.
- Bernhard P., Engwerda J.C., Roorda B. et al. (2013). *The interval market model in mathematical finance: Game-theoretic methods*. N.Y.: Springer.
- Burzoni M., Frittelli M., Hou Z., Maggis M., Obloj J. (2019). Pointwise arbitrage pricing theory in discrete time. *Mathematics of Operations Research*, 44, 3, 1034–1057.
- Capponi A., Cheng W.A., Sethuraman J. (2017). *Clearinghouse default waterfalls: Risk-sharing, incentives, and systemic risk*. Available at: <https://ssrn.com/abstract=2930099>
- Carassus L., Oblój J., Wiesel J. (2019). The robust superreplication problem: A dynamic approach. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 10, 4, 907–941.
- Cont R. (2015). The end of the waterfall: Default resources of central counterparties. *Journal of Risk Management in Financial Institutions*, 8, 4, 365–389.

²⁶ Доказательство асимптотической линейности субаддитивной монотонно невозрастающей функции см., например, в (Смирнов, 2018, п. 6, замечание 14.1, с. 275, 276), включая комментарий в сноске 16.

- CPMI–IOSCO (2017). *Resilience of central counterparties (CCPs): Further guidance on the PFMI*. Available at: <https://www.bis.org/cpmi/publ/d163.pdf>
- CPSS, IOSCO (2012). *Principles for financial market infrastructures*. Available at: <https://www.iosco.org/library/pubdocs/pdf/IOSCOPD396.pdf>
- Fekete M. (1923). Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. *Mathematische Zeitschrift*, 17, 1, 228–249.
- Föllmer H., Schied A. (2016). *Stochastic finance. An introduction in discrete time*. 4th edition. N.Y.: Walter de Gruyter.
- IOSCO (1996). *Report on margin*. Available at: <https://www.iosco.org/library/pubdocs/pdf/IOSCOPD50.pdf>
- ISDA (2019). *CCP best practices*. Available at: <https://www.isda.org/2019/01/24/ccp-best-practices/>
- Smirnov S.N. (2019). Guaranteed deterministic approach to superhedging: Lipschitz properties of solutions of the Bellman–Isaacs equations. In: L.A. Petrosyan, V.V. Mazalov, N.A. Zenkevich “*Frontiers of Dynamic Games*”. Berlin: Springer, 267–288.
- Smirnov S.N. (2021). A guaranteed deterministic approach to superhedging: Financial market model, trading constraints and Bellman–Isaacs equations. *Automation and Remote Control*, 82, 4, 722–743.
- Vicente L.A.B.G. (2012). *Risk assessment processes for closeout of a portfolio*. Google patents, US Patent App. 13/462,091.
- Vicente L.A.B.G., Cerezetti F., Faria S. de, Iwashita T., Pereira O. (2015). Managing risk in multi-asset class, multimarket central counterparties: The CORE approach. *Journal of Banking & Finance*, 51, 119–130.

A guaranteed deterministic approach to margining on exchange-traded derivatives market

© 2021 S.N. Smirnov, I.V. Polimatidi

S.N. Smirnov,

Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; e-mail: s.n.smirnov@gmail.com

I.V. Polimatidi,

UniCredit Bank Russia, Moscow, Russia; e-mail: ipolimatidi@gmail.com

Received 27.08.2020

The authors are grateful to the colleagues from CME for organizing the Seminar in 2002 to present our margining methods. We thank Luicie Vicente for effective discussion.

This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 19-01-00613a).

Abstract. The article discusses a modern approach to risk management of the central counterparty, primarily the issue of the sufficiency of its financial resources, including the provision of clearing members, the capital of the central counterparty and the mutual liability fund. The main subject is the margining system, responsible for an adequate level of collateral for clearing members, that plays an important role in risk management. The regulation that is currently accepted in international practice is critically analyzed. A system of margining a portfolio of options and futures in the derivatives market is described, with default management based on the methodology proposed by a number of inventors, registered in 2004. For this system, a mathematical model of margining (i.e. determining the required level of the collateral) is built. The main idea is that the measurement of portfolio risk for margining purposes should take into account the default management method, and instead of the simple procedure of liquidating the defaulted positions, the central counterparty should use the default portfolio management. The novelty of this article is in the use of the ideology of a guaranteed deterministic approach to superhedging, proposed by one author in a number of publications and based on a game-theoretic interpretation. The Bellman–Isaacs equations for the required margin level are directly derived from the economic meaning of the problem. The properties of these equations are studied, in particular, the property of subadditivity of the portfolio margin is proved, which is an important requirement for the margin system from an economic point of view. The equations are reduced to a form convenient for calculations, allowing to carry out numerical experiments; the results of analysis of the margin system’s performance will be presented in a subsequent publication.

Keywords: central counterparty, clearing, default management, capital, margining, option, futures, Bellman–Isaacs equations, subadditivity of portfolio margin.

Classification JEL: C61, C63, G23.

DOI: 10.31857/S042473880014918-8