*Таблица 2*

**Структура и динамика конечного продукта**

| Наименование показателя | Структура конечного продукта в 1963 г. (в действующих ценах) в процентах к итогу | | | Динамика конечного продукта в сопоставимых ценах: 1963 г. в процентах к 1959 г. | |
|---|---|---|---|---|---|
| | весь конечный продукт | в том числе: потребление (непроизводственное) | в том числе: накопление и прочие расходы | весь конечный продукт | в том числе потребление (непроизводственное) |
| Весь конечный продукт | 100 | 100 | 100 | 127 | 123 |
| В том числе: | | | | | |
| промышленные продукты — всего | 67,2 | 75,7 | 47,9 | 135 | 129 |
| тяжелая промышленность | 25,8 | 16,3 | 38,3 | 159 | 138 |
| легкая и пищевая промышленность | 41,4 | 59,4 | 9,6 | 122 | 127 |
| сельское хозяйство (продукты, не прошедшие промышленной переработки) | 11,1 | 16,6 | —0,2 | 84 | 99 |
| строительство (здания и сооружения) | 16,9 | — | 52,3 | 127 | — |
| прочие отрасли материального производства | 1,0 | 1,6 | — | 93 | 92 |
| амортизация (износ) непроизводственных фондов * | 3,8 | 6,1 | — | 148 | 148 |

* Возмещение износа производственных фондов показано по соответствующим отраслям.

ственного потребления материальных благ по развернутой номенклатуре продуктов. При этом из общего объема непроизводственного потребления выделено отдельно личное (индивидуальное) потребление населением материальных благ, потребление материальных благ в учреждениях и организациях, обслуживающих население (просвещение, здравоохранение, жилищно-коммунальное хозяйство и т. д.) в научных учреждениях и в управлении.

Исчисление показателей конечного продукта в динамике с выделением большого числа отраслей и продуктов имеет важное значение для анализа материально-вещественного состава и динамики непроизводственного потребления и накопления, для изучения роста жизненного уровня населения.

Данные о конечном продукте, особенно, если их взять в динамике, позволяют подробно исследовать конечные результаты общественного воспроизводства, проследить за изменениями в составе потребляемых и накопляемых продуктов и произвести ряд других экономических исследований в целях повышения эффективности общественного производства и подъема материального благосостояния народа.

Поступила в редакцию
22 III 1966

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1967
том III, вып. 4

# НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА СХЕМЕ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

В. З. БЕЛЕНЬКИЙ

(*Москва*)

Рассмотрение математических моделей народного хозяйства с использованием межотраслевого баланса занимает значительное место в работах советских экономистов-математиков. И это не случайно, ибо для социалистического планового хозяйства задача сбалансированного развития экономики встает в полный рост на всех уровнях планирования. В связи с этим представляет интерес математическое исследование простейших моделей и алгоритмов их решения.

В настоящей работе излагаются сначала некоторые математические вопросы, связанные с решением возникающих при этом задач. Полученные результаты носят достаточно общий самостоятельный характер и выделены в отдельный раздел. Полные доказательства теорем (весьма простые) даются в приложении, помещенном в конце статьи. Применение этих результатов к экономико-математическим моделям демонстрируется в разделе 2 на примерах линейных статических моделей; первый пример носит чисто иллюстративный характер, а второй более серьезен (он заимствован из [1]) и может быть положен в основу некоторых реальных моделей. В разделе 3 излагается нелинейная модель перспективного планирования, предложенная В. А. Волконским. Разработка алгоритма применительно к этой модели и численные расчеты проводятся совместно с А. О. Тхайцуковым.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основным объектом изучения является задача $x - f(x) \geqq b,\ x \geqq 0$, где $x$, $f$ и $b$ — векторы $n$-мерного пространства $R_n$. Эта задача на экономическом языке получает естественную интерпретацию, если считать, что $x$ — вектор выпуска, $f$ — вектор затрат, $b$ — вектор конечного продукта.

В каждом частном случае, когда $f(x)$ — линейная функция $f(x) = Ax$, задача приобретает вид обычных балансовых ограничений.

Для неравенств между векторами употребляются принятые в литературе обозначения (см. [2]), именно: $x \geqq y$ означает, что все компоненты вектора $w = x - y$ неотрицательны, $x \geq y$ — все компоненты $w$ неотрицательны и есть хотя бы одна строго положительная, $x > y$ — все компоненты $w$ строго положительны.

Всюду в дальнейшем $f(x)$ — вектор-функция, определенная и непрерывная в неотрицательном квадранте $R_n{}^+ (x \geqq 0)$ $n$-мерного пространства $R_n$. Размерность вектора $f$ также равна $n$. Кроме того, всегда будет предполагаться, что 1) $f(x)$ — неубывающая функция: если $x_1 \geqq x_2$, то $f(x_1) \geqq f(x_2)$; 2) $f(0) = 0$.

Пусть $g(x) \equiv x - f(x)$. Назовем разрешимым множеством множество таких векторов $b$, для которых задача

$$g(x) \geqq b, \quad x \geqq 0 \tag{1}$$

разрешима. Всякий такой вектор $b$ будем называть разрешимым. Множество решений задачи (1) или множество допустимых векторов $x$ обозначим через $D(b)$.

Определение. Для произвольной пары векторов $\xi$, $\eta$ обозначим через $\langle \xi, \eta \rangle$ вектор, каждая компонента которого равна большей из соответствующих компонент образующей пары.

**Теорема 1.** *Для того чтобы вектор $b$ был разрешимым для задачи* (1), *необходимо и достаточно, чтобы последовательность векторов*

$$\{z^{(k)}\} : z^{(0)} = 0, \quad z^{(k+1)} = \langle z^{(k)}, f(z^{(k)}) + b \rangle$$

*сходилась. При этом предельный вектор $z = z(b)$ будет минимальным вектором множества $D(b)$, т. е. $z(b) \in D(b)$ и для любого другого $x$ из $D(b)$ $x \geqslant z(b)$.*

Существование у множества $D(b)$ минимальной точки было доказано еще в 1962 г. Ершовым Э. Б., но, к сожалению, его результат был опубликован лишь в ротапринте (см. [3]) и был автору неизвестен. Недавно упоминание о нем появилось в печати (см. [4]). Теорема 1 несколько усиливает результат Ершова и дает алгоритм для нахождения минимального решения. Э. Б. Ершов сообщил также автору, что им разработан конечный алгоритм для нахождения минимального вектора в линейном случае.

Замечание. Если á priori известен какой-либо вектор $y \geqslant 0$, ограничивающий снизу область $D(b)$, то в качестве начального члена последовательности $\{z^{(k)}\}$ можно взять $z^{(0)} = y$.

Следствие 1. Если в задаче (1) в качестве критерия ставится минимизация некоторой неубывающей функции от $x$, то независимо от конкретного вида этой функции решением всегда будет $x = z(b)$. Этот факт был также отмечен Ершовым.

Следствие 2. Если $b_1 \geqq b_2$, то $z(b_1) \geqq z(b_2)$. Это следует из того, что $z(b_1) \in D(b_2)$.

Следствие 3. Если $b \geqq 0$ и $b \in G$, то $g(z(b)) = b$. Действительно, в этом случае

$$z^{(0)} = 0; \quad z^{(1)} = b; \quad z^{(2)} = \langle b, f(b) + b \rangle =$$
$$= \langle f(z^{(0)} + b, f(z^{(1)}) + b \rangle = f(z^{(1)}) + b; \ldots$$
$$z^{(k+1)} = \langle f(z^{(k-1)}) + b, f(z^{(k)}) + b \rangle = f(z^{(k)}) + b, \ldots$$

и, следовательно, в пределе $z = f(z) + b$.

**Теорема 2.** *Если неубывающая функция $f(x)$ удовлетворяет при $x \geqq 0$ условию $f(tx) \leqq tf(x)$, $t \geq 1$, т. е. растет не быстрее линейной функции, и $g(x^0) > 0$ при некотором $x^0 \geqslant 0$, то задача* (1) *всегда разрешима. При этом для любого $b > 0$ решение уравнения $g(x) = b$ в области $R_n^+$ существует и единственно, т. е. в области $b > 0$ определена функция $g^{-1}(b)$ и в силу следствия 3 $z(b) = g^{-1}(b)$.*

Заметим, что условие, наложенное в теореме 2 на функцию $f(x)$, выполнено для любой вогнутой функции.

Объединяя теоремы 1 и 2, мы получаем следующее арифметическое правило.

Следствие 4. В условиях теоремы 2 из неравенства $g(x) \geqq b > 0$, $x \geqq 0$ следует, что $x \geqq g^{-1}(b) \geqq 0$.

Если усилить требования, предъявляемые к функции $f(x)$, и предположить, что она вогнута, то можно получить соответствующий результат и для задачи

$$g(x) \leqq b, \quad x \geqq 0. \tag{2}$$

Соответствующие множества будем обозначать $G^*$ и $D^*(b)$. Имеет место теорема 3.

**Теорема 3.** *Если дополнительно к условиям теоремы 2 предположить, что $f(x)$ — вогнута, и если $g^{-1}(b) > 0$, то $b \in G^*$ и $z^* = g^{-1}(b)$ является максимальной точкой множества $D^*(b)$, т. е. $z^* \in D^*(b)$ и для любого другого $x$ из $D^*(b)$ $x \leqq z^*$.*

Таким образом, в этом случае точка $g^{-1}(b)$ является общей вершиной «вертикальных» углов, в которых находятся множества $D(b)$ и $D^*(b)$ (см. рис. 1). В линейном случае, когда $f(x) = Ax$, $A = \|a_{ij}\|$, условие неубывания функции $f(x)$ означает, что $a_{ij} \geqq 0$.

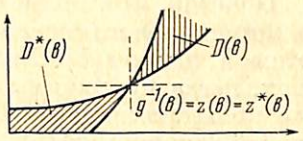

Рис. 1

Существенно различными оказываются случаи, когда спектральный радиус (см. [2, п. 8.2]) $r(A)$ матрицы $A$ меньше единицы и когда $r(A)$ больше или равен единице.

В случае $r(A) < 1$ выполнены условия теорем 2 и 3. Утверждения этих теорем можно несколько расширить. Сводка результатов такова (при $r(A) < 1$):

| | | |
|---|---|---|
| *Задача (1)* $(E - A)x \geqq b$, $x \geqq 0$ | $G = R_n$ | если $Rb \geqq 0$, то $z(b) = Rb$ |
| *Задача (2)* $(E - A)x \geqq b$, $x \geqq 0$ | $G^* = RR_n^+$ | $z^*(b) = Rb$ |

Здесь $R = (E - A)^{-1}$, $R_n$ — полное пространство векторов, $R_n^+$ — квадрант неотрицательных векторов.

Особо отметим еще, что в этом случае последовательность $\{z^{(k)}\}$ сходится при любой правой части $b$.

В случае $r(A) \geqslant 1$, напротив, последовательность $\{z^{(k)}\}$ сходится не всегда. При $b > 0$ она наверняка расходится. Вообще вопрос о сходимости последовательности $\{z^{(k)}\}$ оказывается весьма важным в приложениях (см. пример 2), когда разрешимость задачи существенно зависит от правой части. Дело в том, что при исследовании, например, задачи 1 с правой частью $b$, которая, непрерывно меняясь, переходит границу разрешимого множества $G$, может оказаться трудным отличить сходящуюся последовательность от расходящейся. В этом случае может оказаться полезной теорема 4.

**Теорема 4.** *Если спектральный радиус $r(A)$ матрицы $A$ с неотрицательными элементами больше или равен единице, то:*

*1) в случае, когда последовательность $z^{(0)} = 0$, $z^{(k+1)} = \langle z^{(k)}, Az^{(k)} + b\rangle$ сходится, предельный вектор $z$ обязательно будет иметь нулевые компоненты;*

*2) если матрица $A$ неразложима (см. [2, п. 8.2]) и последовательность $\{z^{(k)}\}$ расходится, то, начиная с некоторого номера, все члены последовательности будут строго положительны.*

Эту теорему в случае неразложимой матрицы $A$, спектральный радиус которой не меньше единицы, кратко можно сформулировать так: последо-

вательность $\{z^{(k)}\}$ расходится тогда и только тогда, когда при некотором $k$ будет $z^{(k)} > 0$.

К сожалению, в общем нелинейном случае не удается дать такой же простой и удобный признак расходимости. Хотя теоретически ситуация вполне может быть описана, в нелинейном случае аналог спектрального радиуса носит локальный характер (он связан с сопровождающей касательной гиперплоскостью) и для практического использования весьма затруднителен.

Отметим, наконец, еще одно простое свойство функции $z(b)$, всегда справедливое в линейном случае: если $b_1 \in G$ и $b_2 \in G$, то $b_1 + b_2 \in G$ и $z(b_1 + b_2) \leqq z(b_1) + z(b_2)$.

Действительно, из $(E - A)z(b_1) \geqq b_1$, $(E - A)z(b_2) \geqq b_2$ следует $(E - A)(z(b_1) + z(b_2)) \geqq b_1 + b_2$, т. е. $z(b_1) + z(b_2) \in D(b_1 + b_2)$.

Подводя итог, отметим, что изложенные результаты, помимо своего принципиального значения, содержат также и алгоритмы для построения угловой точки $z(b)$. Уже теорема 1 дает явный алгоритм. В тех же случаях, когда применимы теоремы 2 и 3, можно в каждом конкретном случае попытаться найти более эффективный алгоритм для вычисления обратной функции $g^{-1}(b)$.

Примечание. К исследуемому виду (1) можно привести и сопряженную задачу $x \leqq f(x) + b$, если известно, что решение ограничено сверху некоторым вектором $w$, и функция $f(x)$ в области $x \leqq w$ не убывает. Для этого достаточно сделать замену переменных $x = w - x'$, после чего задачу можно записать в виде $x' \geqq -f(w - x') + w - b$ или $g(x') \geqq b'$, $x' \geqq 0$, где $g(x') = x' - [f(w) - f(w - x')]$, $b' = -b + w - f(w)$.

## 2. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИЗЛОЖЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

**I. Задача на максимум комплекта.** Мы начнем с простенького примера, который сам по себе, видимо, не имеет значения, но, отправляясь от него, можно построить более реальные модели.

Задача ставится так:

$$\left.\begin{array}{c} (E - A)x \geqq b + \lambda c, \\ \\ Ux \leqq v, \\ x \geqq 0, \\ \max \lambda. \end{array}\right\} \qquad (2')$$

Здесь $A$ — леонтьевская матрица коэффициентов прямых затрат, вектор $c$ задает пропорции конечного потребления различных продуктов (комплект потребления), $\lambda$ — число комплектов, $b$ — фиксированная часть конечного потребления, $x$ — вектор валовых выпусков. Второе неравенство из системы (2′) можно интерпретировать как ограничения по мощностям; в него же можно включить и ограничения по трудовым ресурсам. Элементы всех векторов и матриц принимаются неотрицательными.

Предположим, как обычно, что спектральный радиус матрицы $A$ меньше единицы. Тогда в оптимальном плане можно положить $x = Rb + \lambda Rc$, где $R = (E - A)^{-1} \geqslant 0$, и, следовательно, должно быть $\lambda URc \leqq v - URb$, откуда получаем ответ

$$\lambda_{\max} = \min_j \frac{(v - URb)_j}{(URc)_j} \qquad (3)$$

(где $j$ — номер компоненты), причем, если условие $v - URb \geqq 0$ не выполняется, то при $\lambda \geqslant 0$ решения не существует.

Решение этой задачи отчетливо выявляет слабость ее постановки: из всех компонент ограничений $v$ вступает в силу лишь одна из них — та, которая доставляет минимум правой части в (3). Возникает естественная мысль несколько расширить стеснительные рамки ограничений $v$, разу-

мется, за счет дополнительных затрат. Мы приходим тогда к варианту задачи расширения мощностей (см. [2, п. 5]).

**II. Задача расширения мощностей.** Эта задача ставится так:

$$\left.\begin{array}{l}(E-A)x \geqq b+\lambda c+Qy, \quad Ux \leqq v+y,\\ (l,x) \leqslant L, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad \max \lambda.\end{array}\right\}$$

В дополнение к задаче I здесь $y$ — вектор расширения мощностей, $Q$ — матрица удельных затрат на единицу дополнительной мощности, $l$ — вектор трудоемкостей, $L$ — общий объем рабочей силы.

И в этом примере действует арифметическое правило

$$x \geqq R(b+\lambda c+Qy), \quad R=(E-A)^{-1} \geqslant 0$$

и, следовательно, $Ux \geqq UR(b+\lambda c+Qy)$.

Таким образом, получаем задачу относительно вектора $y$ дополнительных мощностей:

$$\lambda = \max, \ v+y \geqq UR(b+\lambda c+Qy), \ (l, R(b+\lambda c+Qy)) \leqslant L$$

или

$$\lambda = \max, \ (E-URQ)y \geqq URb-v+\lambda URc, \tag{4}$$

$$y \geqq 0, \quad (q,y)+\lambda \leqslant \delta, \tag{5}$$

где

$$q=\frac{1}{(l,Rc)}lRQ, \quad \delta=\frac{L-(l,Rb)}{(l,Rc)}.$$

Рассмотрим внимательнее эту задачу. Здесь возможны три качественно различные ситуации.

1) Спектральный радиус $r$ матрицы $URQ$ меньше единицы. В этом случае неравенство (4) разрешимо при любой правой части, и единственным лимитирующим условием является неравенство (5). На экономическом языке это можно интерпретировать так.

Условие $r(URQ)<1$ означает, что затраты на расширение мощностей малы и оказывается выгодным расширить производство настолько, насколько это позволяют трудовые ресурсы. Для дальнейшего роста необходимо изыскивать дополнительные источники рабочей силы.

Решение в этом случае легко выписывается:

$$y=(E-URQ)^{-1}(URb-v+\lambda URc)=-\xi+\lambda\eta,$$

$$(q,y)+\lambda=-(q,\xi)+\lambda(1+(q,\eta)) \leqslant \delta,$$

$$\lambda_{\max}=\frac{\delta+(q,\xi)}{1+(q,\eta)},$$

где

$$\xi=(E-URQ)^{-1}(v-URb) \geqq 0, \quad \eta=(E-URQ)^{-1}URc \geqq 0.$$

2) $URQ \geqslant E$, т. е. все элементы матрицы $E-URQ$ неположительны (из этого следует, в частности, что $r(URQ) \geqslant 1$). В этом случае левая часть в (4) есть невозрастающая функция от $y$ и, следовательно, $\lambda_{\max}$ будет при $y=0$ определяться из равенства (3).

Экономически это означает, что затраты на расширение мощностей столь велики, что любое увеличение их оказывается невыгодным, и оптимальное решение сводится к решению задачи I. В этом случае следует подумать о каком-либо ином способе изменения ограничений $v$ в задаче I.

3) $r(URQ) \geqslant 1$, но матрица $E - URQ$ имеет положительные элементы. В этом случае существует негривиальное решение задачи $\lambda_{\max} = \nu$, заключенное в пределах:

$$\lambda_1 = \min_j \frac{(v - URb)_j}{(URc)_j} \leqslant \nu \leqslant \max_j \frac{(v - URb)_j}{(URc)_j} = \lambda_2.$$

Левое неравенство объясняется тем, что $\lambda = \lambda_1$ достигается при $y = 0$ (см. равенство (3)). Правое неравенство следует из того, что при $\lambda > \lambda_2$ правая часть в (4) положительна и при $r(URQ) \geqslant 1$ задача неразрешима.

Для нахождения искомого значения $\nu$ можно воспользоваться теоремой 1. По этой теореме решение задачи (4) при данном $\lambda$ существует тогда и только тогда, когда сходится соответствующая последовательность $\{z_\lambda^{(k)}\}$, причем в силу следствия 4 предельный вектор $z_\lambda$ есть неубывающая функция от $\lambda$, и если $z_\mu$ существует, то существует и $z_\lambda$ при любом $\lambda < \mu$.

Таким образом, мы имеем по существу одномерную задачу, в которой все величины монотонно увеличиваются при изменении параметра $\lambda$. Для того чтобы найти $\nu = \lambda_{\max}$, можно начать двигаться по параметру от начального значения $\lambda_1$ с некоторым шагом $h$, проводя на каждом шагу испытание последовательности $\{z^{\lambda(k)}\}$ на сходимость. В случае, если последовательность сходится к $z_\lambda$, надо проверить выполнение условия (5) при $y = z_\lambda$. Так можно двигаться по $\lambda$ до тех пор, пока последовательность не перестанет сходиться или в (5) не наступит равенство.

Можно действовать и иным методом. Так как «цель» $\nu$ поймана в априорную вилку $\lambda_1 \leqslant \nu \leqslant \lambda_2$, можно провести испытание на сходимость для среднего значения $\bar{\lambda} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, определить, в каком из полуинтервалов: $(\lambda_1, \bar{\lambda})$ или $(\bar{\lambda}, \lambda_2)$ — лежит $\nu$, и тем самым сузить вилку вдвое. Продолжая тот же процесс и деля каждый раз вилку пополам, можно поймать цель $\nu$ с любой точностью. Напомним, что в этом примере линейной модели результат испытания на сходимость определяется по теореме 4.

## 3. МОДЕЛЬ ПЕРСПЕКТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

В этом разделе будет описана рабочая модель, принятая к расчету в ЦЭМИ АН СССР. Эту модель можно рассматривать как модификацию $n$-отраслевой модели оптимального роста плановой экономики [5]. Из исследования именно этой модели и путей ее решения возникла настоящая статья. Модель предложена В. А. Волконским.

Рассматривается задача перспективного планирования для $n$ отраслей народного хозяйства на период $t = 0, 1, \ldots T$ лет. Каждый год планового периода характеризуется следующими экономическими показателями (все величины в денежном выражении): $x^t$ — вектор валовых выпусков за год $t$; $M^t$ — вектор мощностей на конец года $t$; $N^t$ — вектор завершенного строительства (вектор полностью освоенных мощностей) на конец года $t$; $S^t$ — вектор основных фондов на конец года $t$; $y^t$ — вектор конечного продукта (непроизводственное потребление) за год $t$.

Для любой величины $\xi^t$ положим $\Delta\xi^t = \xi^{t+1} - \xi^t$. В этих обозначениях между приведенными величинами должны выполняться следующие соотношения (см. [5]):

а) $$x^t \leqq M^t,$$

б) $$\Delta S_i^t = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^t \sum_{\tau \geqslant 1} \varphi_j(\tau)\, \Delta N_j^{t+\tau}$$

или

$$\Delta S^t = B^t \sum_{\tau \geqslant 1} \varphi(\tau)\, \Delta N^{t+\tau},$$

в) $$\Delta M_i^t = \sum_{\tau \geqslant 1} \psi_i(\tau)\, \Delta N_i^{t+\tau}$$

или

$$\Delta M^t = \sum_{\tau \geqslant 1} \psi(\tau)\, \Delta N^{t+\tau},$$

г) $$(E - A^t)\, x^t \geqq y^t + \Delta S^t + \gamma^t M^t,$$

д) $$(l^t, x^t) \leqq L^t.$$

Здесь $\varphi_i(\tau)$ — коэффициенты временного распределения капиталовложений на строительство новых мощностей; $\psi_j(\tau)$ — коэффициенты временного распределения освоения вновь вводимых мощностей; $B^t = \|b_{ij}{}^t\|$ — матрица фондоемкостей в год $t$; $A^t = \|a_{ij}{}^t\|$ — матрица прямых затрат в год $t$; $\gamma^t = \|\gamma_{ij}{}^t\|$ — матрица затрат на реновацию мощностей; $l^t$ — вектор трудоемкостей в год $t$; $h^t$ — общий объем трудовых ресурсов в год $t$. Эти величины считаются известными.

Далее, предполагается, что вектор потребления (нагрузки) $y^t$ изменяется со временем по закону $y^t = a + be^{\lambda t}$, где $a$ и $b$ — известные векторы, а $\lambda$ — темп прироста потребления,— является тем параметром модели, который предстоит максимизировать. Максимизация параметра $\lambda$ как критерий оптимальности для укрупненных народнохозяйственных моделей предлагается В. А. Волконским.

Для того чтобы замкнуть задачу, необходимо еще задать вектор $M^0$, который мы будем считать известным, и наложить какие-то ограничения на поведение вектора $N^t$ на некоторой период (лаг, например, 5 лет) после конца планового периода, поскольку от этого будут зависеть капиталовложения $\Delta S^t$ в конце планового периода (см. (б)) и ввод мощностей (см. (в)). Этот вопрос автоматически решается в рамках *основного предположения модели,* состоящего в том, что изменение во времени векторов $M^t$ и $N^t$ происходит по экспоненциальному закону

$$M_j{}^t = M_j{}^0 e^{\alpha_j t}, \quad N_j{}^t = N_j{}^0 e^{\alpha_j t}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где показатели $\alpha_j$ (темпы роста) подлежат определению. Из этого предположения вытекают следующие соотношения:

$$N_j{}^0 = \frac{1}{\sum\limits_{\tau \geqslant 1} \psi_j(\tau)\, e^{\alpha_j \tau}} M_j{}^0,$$

$$\Delta S_j{}^t = \sum_{i=1}^{n} b_{ji}{}^t M_i{}^0 e^{\alpha_i t} (e^{\alpha_i} - 1) \left( \sum_{\tau \geqslant 1} \varphi_i(\tau)\, e^{\alpha_i \tau} \Big/ \sum_{\tau \geqslant 1} \psi_i(\tau)\, e^{\alpha_i \tau} \right) \equiv \Phi_j{}^t(\alpha).$$

Расчет показывает, что функции $\varphi_j(\tau)$ и $\psi_j(\tau)$ таковы, что $\Phi_j{}^t(\alpha)$ — неубывающие функции от $\alpha$.

Далее рассматриваются два возможных варианта математической формулировки задачи.

*I вариант.* В этом более простом варианте предполагается дополнительно, что $x^t \equiv M^t$. Тогда приходим к следующей задаче с неизвестными $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\lambda$:

$$\left.\begin{aligned} (E - (A^t + \gamma^t))\, M^t &\geqq a + be^{\lambda t} + \Delta S^t, \\ (l^t,\ M^t) &\leqslant L^t, \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} (6) \\ (7) \end{matrix}$$

где

$$M_i{}^t = M_i{}^0 e^{\alpha_i t},\ \Delta S_i{}^t = \Phi_i{}^t(\alpha),\quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\alpha \geqq 0,\quad \lambda \geqslant 0,\quad t = 0, 1, \ldots, T.$$

Для того чтобы привести задачу к канонической форме, воспользуемся приемом, предложенным А. О. Тхайцуковым [6]. Запишем (6) в виде:

$$\begin{aligned} \alpha &\geqq \alpha + \varepsilon^t \{a + be^{\lambda t} + \Delta S^t - [E - (A^t + \gamma^t)] M^t\} = \\ &= (\alpha - \varepsilon^t M^t) + \varepsilon^t [a + be^{\lambda t} + \Delta S^t + (A^t + \gamma^t) M^t], \end{aligned} \quad (8)$$

где коэффициент $\varepsilon^t$ выбран таким, чтобы правая часть в этом неравенстве была неубывающей функцией от $\alpha$. Так как члены в квадратной скобке не убывают, то для этого достаточно, чтобы член $\alpha - \varepsilon^t M^t$ тоже был неубывающим, т. е. чтобы было

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j}(\alpha_j - \varepsilon^t M_j{}^0 e^{\alpha_i t}) = 1 - \varepsilon^t t M_j{}^0 e^{\alpha_j t} \geqslant 0.$$

Если нам известна априорная оценка решения $\alpha \leqslant \beta$, то достаточно выбрать $\varepsilon^t$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$1 - \varepsilon^t \cdot t M_j{}^0 e^{\beta_j t} \geqslant 0,\quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е.

$$\varepsilon^0 = \sim,\quad \varepsilon^t = \min_j \frac{1}{t M_j{}^0} e^{-\beta_j t},\quad t = 1, 2, \ldots, T.$$

Еще лучше считать $\varepsilon^t$ диагональной матрицей

$$\varepsilon^t = \begin{pmatrix} \varepsilon_1{}^t & & & \\ & \varepsilon_2{}^t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_n{}^t \end{pmatrix}.$$

Тогда можно положить

$$\varepsilon_j{}^0 = \sim,\quad \varepsilon_j{}^t = \frac{1}{t M_j{}^0} e^{-\beta_j t},\quad t = 1, 2, \ldots, T.$$

Теперь наша задача приведена к форме:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \geqq F_\lambda{}^t(\alpha),\quad (l^t, M^t(\alpha)) \leqslant L^t, \\ &\max \lambda,\quad \alpha \geqq 0,\quad t = 0, 1, 2, \ldots, T, \end{aligned}\right\}$$

где $F_\lambda{}^t(\alpha)$ — сокращенное обозначение правой части в (8) — неубывающая функция от $\alpha$ и $\lambda$; $M^t(\alpha)$ — также неубывающая функция.

Для того чтобы применить теорию, надо ее несколько обобщить. Нам потребуется следующая теорема.

**Обобщенная теорема 1.** *Для того чтобы задача* $x \geqq f^t(x)$, $x \geqq 0$, $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ *была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы после-*

*довательность векторов*

$$\{z^{(k)}\} : z^{(0)} = 0,\ z^{(k+1)} = \langle z^{(k)},\ f^0(z^{(k)}),\ f^1(z^{(k)}), \ldots,\ f^T(z^{(k)})\rangle$$

*сходилась. При этом предельный вектор z будет минимальным допустимым вектором.*

Здесь, как и раньше, $\langle\ \rangle$ означает выбор покомпонентного максимума перечисленных векторов, а функции $f^t(x)$ предполагаются неубывающими.

Доказательство этой теоремы является простым повторением доказательства теоремы 1.

Применяя эту теорему к нашей задаче, мы можем воспользоваться методом движения по параметру $\lambda$, описанным выше в примере 2.

Таким образом, постановка и метод решения задачи в 1-м варианте полностью описаны.

*II вариант.* В этом варианте не делается предположения о равенстве выпуска и мощностей $x^t \equiv M^t$.

Из условия (г) в силу арифметического правила следует:

$$x^t = R^t(y^t + \Delta S^t + \gamma^t M^t), \qquad R^t = (E - A^t)^{-1} \geqq 0, \tag{9}$$

а затем из условия (а) $M^t \geqq R^t(y^t + \Delta S^t + \gamma^t M^t)$. Используя опять прием А. О. Тхайцукова, запишем это соотношение в виде: $\alpha \geqq (\alpha - \varepsilon^t M^t) + \varepsilon^t R^t(y^t + \Delta S^t + \gamma^t M^t)$.

Таким образом, основные соотношения (г) и (а) и в этом варианте приобретают вид $\alpha \geqq F_\lambda{}^t(\alpha)$, $t = 0, 1, 2, \ldots, T$, где $F_\lambda{}^t(\alpha)$ — неубывающая функция от $\alpha$ и $\lambda$. Ограничение (д) в силу (9) также имеет вид: $H_\lambda{}^t(\alpha) \leqslant L^t$, где $H_\lambda{}^t(\alpha)$ — неубывающая функция от $\alpha$ и $\lambda$.

В конце концов и в этом варианте мы приходим к задаче

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \geqq F_\lambda{}^t(\alpha), \quad \alpha \geqq 0, \quad \lambda \geqslant 0, \\ &H_\lambda{}^t(\alpha) \leqslant L^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T, \end{aligned}\right\}$$

в которой применимы обобщенная теорема 1 и метод движения по параметру $\lambda$.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Доказательства теорем

**Теорема 1.** Ясно, что $\{z^{(k)}\}$ — неубывающая последовательность, поэтому она сходится, если она ограничена сверху.

Пусть теперь $D(b)$ не пусто и $x \in D(b)$, т. е. $x \geqq 0$, $x - f(x) \geqq b$; тогда $x \geqq z^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Действительно, по условию $x \geqq z^{(0)} = 0$, и если $x \geqq z^{(k-1)}$, то $x \geqq f(x) + b \geqq f(z^{(k-1)}) + b$. Таким образом, из индуктивного предположения $x \geqq z^{(k-1)}$ вытекает, что $x \geqq \langle z^{(k-1)}, f(z^{(k-1)}) + b\rangle = z^{(k)}$.

Итак, если $D(b)$ не пусто, то последовательность $\{z^{(k)}\}$ ограничена сверху любым вектором $x$ из $D(b)$ и сходится к пределу $z = z(b)$, для которого, очевидно, выполнено равенство $z = \langle z, f(z) + b\rangle$, и, следовательно, $z \geqq f(z) + b$, т. е. $z \in D(b)$ и при этом является минимальным вектором.

В обратную сторону теорема очевидна, так как если последовательность $\{z^{(k)}\}$ сходится, то ее предел $z \in D(b)$.

Доказательство теоремы 1 закончено.

**Теорема 2.** Заметим, прежде всего, что при $t \geqslant 1$

$$g(tx) = tx - f(tx) \geqq tx - tf(x) = \operatorname{tg}(x).$$

Пусть теперь $y = g(x^0) > 0$, тогда для любого вектора $b$ найдется такое $t \geqslant 1$, что $g(tx^0) \geqq tg(x^0) = ty > b$, т. е. $tx^0 \in D(b)$. Следовательно, в этом случае область $G$ совпадает со всем пространством $R_n$. Если к тому же $b \geqq 0$, то в силу следствия 3 уравнение $g(x) = b$ имеет своим корнем $x = z(b)$.

Докажем теперь, что при $b > 0$ не может быть двух различных корней этого уравнения в положительном квадранте $R_n^+$.

Действительно, пусть есть два решения $x = \xi \geqq 0$ и $x = \xi + w \geqq 0$, причем, не теряя общности, можно предполагать, что среди компонент вектора $w$ найдутся строго положительные. Тогда будем иметь $\xi - f(\xi) = \xi + w - f(\xi + w) = b > 0$ или $f(\xi + w) = f(\xi) + w$.

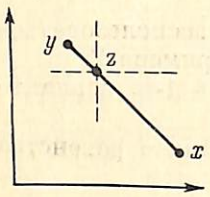

Рис. 2

Так как $\xi = f(\xi) + b \geqq b > 0$, то найдется такое $\mu > 0$, что $\mu\xi \geqq w$, причем хотя бы для одной из положительных компонент $w_j$ будет равенство $\mu\xi_j = w_j$.

Тогда в силу условия, наложенного на функцию $f(x)$, будет

$$f(\xi + w) \leqq f(\xi + \mu\xi) = f((1 + \mu)\xi) \leqq (1 + \mu)f(\xi).$$

Следовательно, $(1 + \mu)f(\xi) + w$ или $\mu f(\xi) \geqq w$, и, в частности, для $j$-й компоненты $\mu f_j(\xi) \geqslant w_j = \mu\xi_j$, т. е. $f_j(\xi) \geqslant \xi_j$, а это противоречит тому, что $\xi - f(\xi) = b > 0$.

Таким образом, единственность решения доказана, чем и завершается доказательство теоремы 2.

**Теорема 3.** По теореме 2 вектор $z = g^{-1}(b)$ является минимальной точкой множества $D(b)$ допустимых векторов задачи (1). Предположим, что теорема 3 неверна, тогда найдется такой вектор $x$ из $D^*(b)$, что вектор $w = x - z$ будет иметь строго положительные компоненты (см. рис. 2). Так как по условию теоремы $z > 0$, то при достаточно малом $\varepsilon$ вектор $y = z - \varepsilon w \in R_n^+$.

Далее, так как $g(x)$ выпукла, что очевидным образом следует из условия вогнутости $f(x)$, то ввиду равенства

$$z = \frac{1}{1+\varepsilon} y + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} x$$

будем иметь

$$b = g(z) = g\left(\frac{1}{1+\varepsilon} y + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} x\right) \leqq \frac{1}{1+\varepsilon} g(y) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} g(x)$$

или

$$g(y) \geqq (1 + \varepsilon)b - \varepsilon g(x) = b + \varepsilon(b - g(x)) \geqq b,$$

так как $x \in D^*(b)$.

Таким образом, мы получили, что $y \in D(b)$ и, следовательно, должно быть $y \geqq z$. Но это не так, потому что вектор $-\varepsilon w = y - z$ имеет строго отрицательные компоненты. Это противоречие доказывает справедливость теоремы 3.

**Теорема 4.** Докажем сначала первое утверждение. Допустим противное, именно, что последовательность $\{z^{(k)}\}$ сходится к строго положительному вектору $z > 0$. Так как $r(A) \geqslant 1$, то существует вектор $y \geqslant 0$ такой, что $Ay \geqq y$ или $(E - A)y \leqq 0$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ будет $w = z - \varepsilon y > 0$ и $(E - A)w = (E - A)z - \varepsilon(E - A)y \geqq b$, т. е. $w \in D(b)$ и $w \leqslant z$, что противоречит теореме 1, согласно которой $z$ — минимальный допустимый вектор.

Переходя к доказательству второго утверждения, напомним сначала, что матрица $A$ неразложима в том случае, когда не существует такого подмножества индексов $S$, что $a_{ij} = 0$ при $j \in S$, $i \notin S$.

Последовательность $\{z^{(k)}\}$ — это неубывающая последовательность неотрицательных векторов. Если она расходится, то существует непустое множество $S$ индексов $j$, для которых $z_j^{(k)} \to \infty$ при $k \to \infty$.

Покажем, что $S$ совпадает с полным набором $j = 1, 2, \ldots, n$. Действительно, пусть $i \notin S$, т. е. $z_i^{(k)}$ ограничены при всех $k$. Но тогда при всех $k$ будут ограничены и $(Az^{(k)})_i$, т. е. величины $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j^{(k)}$, что возможно только в том случае, если $a_{ij} = 0$ при $j \in S$.

Мы показали, таким образом, что если множество $S$ не совпадает с полным набором значений индексов, то $A$ разложима. Так как по условию $A$ неразложима, то, следовательно, при любом $j$ $z_j^{(k)} \to \infty$, откуда следует второе утверждение теоремы 4.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Об одном методе количественного анализа упрощенных экономических моделей. В сб. Применение математики в экономических исследованиях. т. 2. М., Соцэкгиз, 1961.
2. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., Мир, 1964.
3. Э. Б. Ершов. Решение обобщенной статической модели межотраслевого баланса. Материалы к конференции по опыту и перспективам применения математических методов и ЭВМ в планировании. Новосибирск, 1962 (ротапринт НИЭИ Госплана).
4. Э. Б. Ершов. Математические методы в статической модели межотраслевого баланса. В сб. Методы планирования межотраслевых пропорций. М., Экономика, 1965.
5. Ю. Н. Гаврилец, Б. Н. Михалевский, Ю. Р. Лейбкинд. Линейная модель оптимального роста плановой экономики. В сб. Применение математики в экономических исследованиях. т. 3. М., Мысль, 1965.
6. А. Тхайцуков. Дипломная работа. МГУ, мех.-мат. факультет, кафедра вычислительной математики, 1966.

Поступила в редакцию
5 IV 1966