ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1967
том III, вып. 4

О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ И ДЕМОГРАФИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

В. Ф. ШУКАЙЛО

(*Харьков*)

Последнее десятилетие отмечено интенсивным развитием ряда новых научных дисциплин, в частности теории надежности технических элементов и их систем. Это вызвано процессом усложнения технических систем, а также интенсификацией режима эксплуатации составляющих их элементов.

Теория надежности включает в себя ряд вполне сложившихся и специализированных направлений и в целом характеризуется довольно развитым математическим аппаратом. Вместе с тем укажем на определенную преемственность в ряде пунктов современной теории надежности и демографической статистики. Так, применяемые в технике функции выживания невосстанавливаемых элементов давно используются в таблицах смертности населения. Известное в технической литературе выражение для среднего остатка жизни элемента через функцию выживания приводится в демографической статистике еще в [1]. Имеется сходство в постановке ряда задач динамики воспроизводства населения [2] и теории восстановления [3, 4], что заслуживает детального сравнения и изучения.

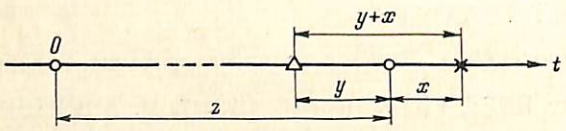

Рис. 1. t — ось абсолютного или исторического времени; z — координата контрольной точки; y — возраст элемента в момент $t = z$; x — время дожития элемента; $y + x$ — время жизни элемента

Представляется возможным и целесообразным рассмотрение групп населения, например, в масштабе государства, в определенных сугубо специальных отношениях как сложных систем, отдельные «элементы» которых подвержены «отказам» двух типов: 1) восстанавливаемым (например, излеченные болезни), 2) невосстанавливаемым (смерть от естественного старения или болезни).

Численность элементов этой системы весьма велика (что благоприятно для использования теории вероятностей) и изменяется со временем по сложным законам, определяемым закономерностями рождаемости и смертности, а в ряде случаев и другими факторами, например миграционными движениями.

В данной работе аналитически изучаются некоторые вопросы, связанные со смертностью и с динамикой воспроизводства населения и представляющие, по нашему мнению, интерес как для демографов, так и инженеров-исследователей, привлечение внимания которых к демографическим моделям, несомненно, полезно.

Для изучения вероятностных аспектов смертности введем функцию $l(x, y, z)$, равную условной вероятности элементу, достигшему в момент

$t = z$ возраста y, прожить еще время большее или равное x (рис. 1). Тогда обычная функция выживания определяется как:

$$l(x, 0, z) = \exp\left[-\int_0^x \lambda(\xi, z)\, d\xi\right]. \tag{1}$$

Здесь $\lambda(\xi, z)$ — мгновенный коэффициент смертности для момента $t = z$ или, как принято говорить в теории надежности, интенсивность отказов («λ-характеристика»). В стационарном случае (независимость от z)

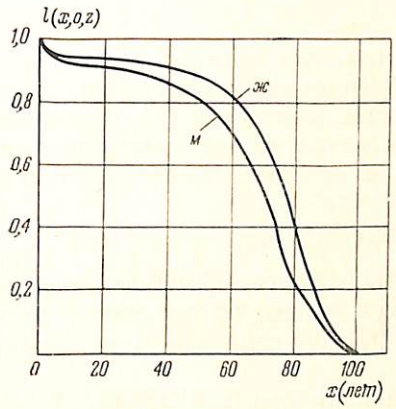

Рис. 2. Функция выживания $l(x, 0, z)$ мужского (м) и женского (ж) населения СССР по данным переписи ($z = 1959$ г.)

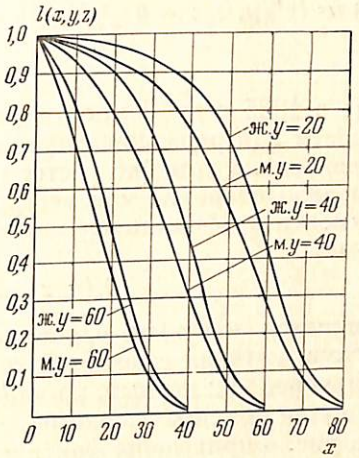

Рис. 3. Функция выживания $l(x, y, z)$ мужского (м) и женского (ж) населения СССР по данным переписи ($z = 1959$ г.)

выражение (1) широко используется в технической теории надежности [5, 6].

Событие смерти элемента в возрасте большем или равном $y + x$ есть произведение двух событий: 1) отсутствие отказа в интервале $(z - y, z)$ и 2) отсутствие отказа в интервале $(z, z + x)$, при условии, что не было отказа в $(z - y, z)$ (рис. 1).

По теореме умножения вероятностей:

$$l(y + x, 0, z - y) = l(y, 0, z - y)\, l(x, y, z). \tag{2}$$

Отсюда, с учетом (1), находим общее выражение для условной вероятности дожития $l(x, y, z)$:

$$l(x, y, z) = l(x + y, 0, z - y)\, l^{-1}(y, 0, z - y) = \exp\left[-\int_y^{y+x} \lambda(\xi, z - y)\, d\xi\right]. \tag{3}$$

Итак, зная $l(x, 0, z)$, можно построить $l(x, y, z)$. На рис. 2 построены по данным [7] функции выживания $l(x, 0, z)$ мужского и женского населения СССР, а на рис. 3 построены в соответствии с (3) соответствующие условные вероятности $l(x, y, z)$ дожития.

Нужно отметить, что вероятность $l(x, y, z)$ носит априорный характер, а ее построение основано на допущении $\lambda(\xi, z - y) = \lambda(\xi, z)$ и, следовательно, соответствует некоторому условному «замороженному» режиму смертности.

Зная $l(x, y, z)$, можно найти моменты k-го порядка для остатка жизни $X(y, z)$:

$$\overline{X^k}(y,z) = \int_0^\infty x^k \frac{\partial}{\partial x}[1 - l(x, y, z)]\,dx = k\int_0^\infty x^{k-1} l(x, y, z)\,dx. \tag{4}$$

В частности, полагая $k = 1$, найдем средний остаток жизни $\overline{X}(y, z)$.

С учетом (3) и (4) имеем для $\overline{X}(y, z)$ аналитические представления:

$$\overline{X}(y,z) = l^{-1}(y, 0, z-y)\int_y^\infty l(\eta, 0, z-y)\,d\eta = \int_y^\infty \exp\Big[-\int_0^\cdot \lambda(\xi, z-y)\,d\xi\Big]\,d\eta. \tag{5}$$

Еще в 1825 году Гомпертц [8] отметил, что логарифм коэффициента смертности для ряда животных и людей (начиная с некоторого возраста) приблизительно линейно растет во времени. Считается [8], что биологические модели старения человека должны удовлетворять экспоненциальной зависимости коэффициента смертности от времени. В соответствии с этим примем:

$$\lambda(y, z) = a(z)\exp[b(z)y]; \tag{6}$$

(6) является частным случаем несколько более общей аппроксимации Макегама, которая с позиций теории надежности представляет исторический интерес как первый, по-видимому, пример совместного учета «внезапных» и «постепенных» отказов.

На рис. 4 приведены фактические зависимости $\ln 1000\,\lambda(y, z)$ от возраста y для мужского и женского населения СССР по данным [7]; при этом $\lambda(y, z)$ определялись как:

$$\lambda(y, z) = 2q(y, z)[2 - q(y, z)]^{-1}. \tag{7}$$

Здесь $q(y, z)$ — вероятность элементу, имеющему в момент $t = z$ возраст y, умереть в $[y, y + 1]$. Очевидно, что $q(y, z) = 1 - l(1, y, z)$ (7) обычно получают разложением в ряд $q(y, z)$:

$$q(y, z) = 1 - \exp\Big[-\int_y^{y+1} \lambda(\xi, z-y)\,d\xi\Big]. \tag{8}$$

Вместо (7) можно предложить более точное выражение:

$$\lambda(y, z) = \frac{1}{2}\ln\{[1 - q(y, z)][1 - q(y-1, z)]\}^{-1}. \tag{9}$$

Разница между (7) и (9) существенна при $y \to \infty$. Действительно, для (7) $\lambda(\infty, z) = 2$, а для (9) $\lambda(\infty, z) = \infty$. Практически же при $y \leqslant 100$ лет (7) и (9) мало отличаются. Кроме того, сама технология подсчета $q(y, z)$ по данным переписи и смертности в примыкающие годы допускает погрешности, так что односторонние уточнения типа (9) пока практически нецелесообразны. Большое значение процедура (9) может иметь сейчас в технической теории надежности.

На рис. 4 показана линейная аппроксимация $\ln 1000\,\lambda(y, z)$ в соответствии с (6) в интервале $30 \div 100$ лет. Параметры $a(z)$ и $b(z)$ определялись методом наименьших квадратов. При этом для мужчин: $a(z) = 3{,}222 \cdot 10^{-4}$ 1/год, $b(z) = 7{,}059 \cdot 10^{-2}$ 1/год, а для женщин: $a(z) = 1{,}078 \cdot 10^{-4}$ 1/год, $b(z) = 7{,}952 \cdot 10^{-2}$ 1/год. Из рис. 4 можно заметить своеобразный колебательный характер отклонения $\ln 1000\,\lambda(y, z)$ от оптимальных линейных

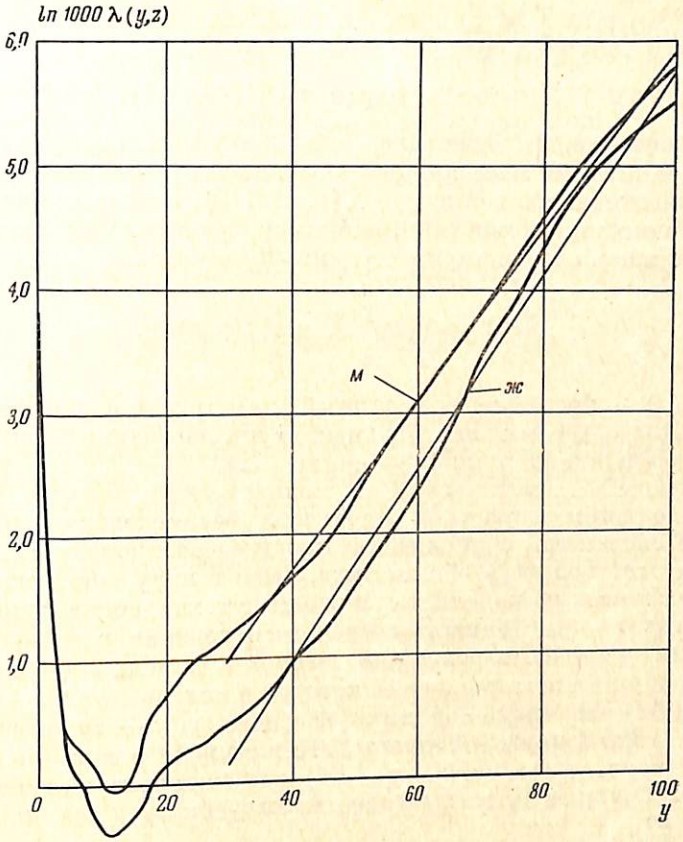

Рис. 4. Зависимость натурального логарифма коэффициента смертности от возраста для мужского (м) и женского (ж) населения СССР по данным переписи 1959 г.

аппроксимаций и замедление темпа роста $\ln 1000\,\lambda(y, z)$ при больших y. Последний эффект сильнее выражен у женщин.

Подставляя (6) в (5) и производя необходимые вычисления, находим аналитическое выражение для среднего остатка жизни $\overline{X}(y, z)$:

$$\overline{X}(y, z) = -b^{-1}(z)\exp\{a(z)\,b^{-1}(z)\exp[b(z)\,y]\}\times \\ \times Ei\{-a(z)\,b^{-1}(z)\exp[b(z)\,y]\}. \qquad (10)$$

Здесь $-Ei(-x)$ — табличная [9] интегральная показательная функция:

$$-Ei(-x)=\int_x^\infty \frac{1}{\eta}\,e^{-\eta}d\eta. \qquad (11)$$

В соответствии с (3) и (6) выпишем еще аналитическое выражение для $l(x, y, z)$:

$$l(x, y, z) = \exp\{-a(z)\,b^{-1}(z)\exp(b(z)\,y)[\exp(b(z)\,x)-1]\}. \qquad (12)$$

При $y = 0$ получаем встречающееся в технической теории надежности двойное экспоненциальное распределение. Например, в [5] рассматривается физическая модель коррозионного износа металлических труб камеры сгорания жидкостного реактивного двигателя ракеты, приводящая к двойному экспоненциальному распределению долговечности. Таким образом,

выражение (10) для $\overline{X}(y, z)$ имеет и технические приложения. В частности, при $y = 0$ получаем среднюю долговечность:

$$\overline{X}_0 = -b^{-1} \exp(ab^{-1}) Ei(-ab^{-1}). \tag{13}$$

В демографической статистике, зная плотность распределения $f(y, z)$ возрастов в данный момент времени $t = z$ для группы населения и используя аналитическое выражение для $\overline{X}(y, z)$ (10), можно вычислить некоторые более общие характеристики, например, среднее суммарное время $\overline{T}(z)$ предстоящей жизни для живущих в данный момент Z:

$$\overline{T}(z) = N(z) \int_0^\infty \overline{X}(y, z) f(y, z)\, dy. \tag{14}$$

Здесь $N(z)$ — численность в данный момент z мужского или женского населения. Для обычных значительных групп населения $\overline{T}(z)$ весьма близка к действительной случайной величине $T(z)$.

Значительный теоретический и практический интерес представляет вопрос об эволюции возрастной плотности распределения $f(y, t)$ во времени, тесно связанный с динамикой процесса воспроизводства населения. Рассмотрим этот вопрос в общем виде, имея в виду как важную саму по себе демографическую модель, так и сходные технические модели.

Пусть $N_ж(t)$ — численность женского населения в момент времени t, а $n_ж(t)$ — интенсивность рождений девочек в момент t, определяемая как предел отношения числа рождений девочек в интервале $(t, t + \Delta t)$ к интервалу Δt при $\Delta t \to 0$. Число женщин в возрасте $(y, y + dy)$ в момент t равно $N_ж(t) f_ж(y, t)\, dy$. С другой стороны, это же число равно числу рождений девочек в интервале $(t - y, t - y - dy)$, умноженному на вероятность прожить время большее y, т. е. на соответствующую функцию выживания $l_ж(y, 0, t - y)$.

Таким образом:

$$N_ж(t) f_ж(y, t)\, dy = n_ж(t - y) l_ж(y, 0, t - y)\, dy. \tag{15}$$

Отсюда сразу находим:

$$f_ж(y, t) = N_ж^{-1}(t) n_ж(t - y) l_ж(y, 0, t - y). \tag{16}$$

Из условия нормировки для $f_ж(y, t)$ находим $N_ж(t)$

$$N_ж(t) = \int_0^\infty n_ж(t - y) l_ж(y, 0, t - y)\, dy. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16), запишем $f_ж(y, t)$ в виде:

$$f_ж(y, t) = \frac{n_ж(t - y) l_ж(y, 0, t - y)}{\int_0^\infty n_ж(t - y) l_ж(y, 0, t - y)\, dy}. \tag{18}$$

Итак, $f_ж(y, t)$ определяется двумя функциями: интенсивностью рождения и вероятностью выживания девочек. Известно [2], что интенсивность рождений девочек определяется интегральным уравнением:

$$n_ж(t) = \int_0^\infty n_ж(t - y) r_ж(y)\, dy, \tag{19}$$

где $r_{ж}(y)$ — функция воспроизводства [2], равная $\varphi(y) l_{ж}(y)$. Здесь $\varphi(y)$ — фертильность женщин в возрасте y, предполагаемая неизменной во времени t. Однако это существенное ограничение. С течением времени функция $\varphi(y)$ изменяется и, более точным, хотя и более сложным, будет представление фертильности функцией $\varphi(y, t)$. Соответственно и функцию выживания следует записать в общем виде $l_{ж}(y, 0, t-y)$. Таким образом, наиболее общая запись функции воспроизводства:

$$r_{ж}(y, t) = \varphi(y, t) l_{ж}(y, 0, t-y), \tag{20}$$

а соответствующего интегрального уравнения воспроизводства:

$$n_{ж}(t) = \int_{0}^{\infty} n_{ж}(t-y) r_{ж}(y, t)\, dy. \tag{21}$$

Некоторые трудности связаны, как отмечалось в [2], с решением интегрального уравнения воспроизводства. Однако то обстоятельство, что интенсивность рождений обычно известна за длительный отрезок времени, предшествующий настоящему моменту ($z = 0$), позволяет свести общее уравнение типа Фредгольма (21) к другому, более удобному виду. Произведем в (21) замену переменных $t - y = \xi$. Тогда получим:

$$n_{ж}(t) = \int_{-\infty}^{0} n_{ж}(\xi) r_{ж}(t-\xi, t)\, d\xi + \int_{0}^{t} n_{ж}(\xi) r_{ж}(t-\xi, t)\, d\xi. \tag{22}$$

Первый интеграл в (22) можно считать известной функцией $\psi(t)$, что дает для $n_{ж}(t)$ интегральное уравнение Вольтерра II-го рода:

$$n_{ж}(t) = \psi(t) + \int_{0}^{t} n_{ж}(\xi) r_{ж}(t-\xi, t)\, d\xi. \tag{23}$$

Выпишем отдельно, с учетом (20), функцию $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{0} n_{ж}(\xi) \varphi(t-\xi, t) l_{ж}(t-\xi, 0, \xi)\, d\xi. \tag{24}$$

Вообще, только функции $n_{ж}(\xi)$ и $l_{ж}(t-\xi, 0, \xi)$ определяются предысторией. В отношении фертильности $\varphi(t-\xi, t)$ требуется при $t > 0$ прогнозирование, которое является сложной социально-биологической [10] и, в конечном счете, математической проблемой. Зная $\psi(t)$, можно прогнозировать в соответствии с (23) на разумном отрезке $(0, t)$ эволюцию $n_{ж}(t)$, $N_{ж}(t)$ и $f_{ж}(y, t)$. Строго говоря, в интеграле (23) необходимо еще прогнозировать $l_{ж}(t-\xi, 0, \xi)$ при $0 < \xi \leqslant t$. Правда, при $t < 15$ лет фертильность $\varphi(t-\xi, t)$ можно положить равной нулю, что даст сразу решение для интенсивности рождений $n_{ж}(t) \simeq \psi(t)$. При долгосрочном же прогнозе $n_{ж}(t)$ необходимо прогнозирование функций выживания и решение интегрального уравнения воспроизводства. В этом случае решение целесообразно проводить на ЭВМ методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} n_{ж}^{(1)}(t) &= \psi(t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_{ж}^{(k)} &= \psi(t) + \int_{0}^{t} n_{ж}^{(k-1)}(\xi) r_{ж}(t-\xi, t)\, d\xi. \end{aligned} \tag{25}$$

Так как $\psi(t) \leqslant n_{ж}(t)$, то все последовательные приближения (25) являются нижними оценками $n_{ж}(t)$, причем $n_{ж}^{(k-1)}(t) \leqslant n_{ж}^{(k)}(t)$.

Если заранее известно, что $n_{ж}(t)$ не убывает, то из (23) можно найти двухстороннюю оценку для $n_{ж}(t)$:

$$\psi(t) \leqslant n_{ж}(t) \leqslant \psi(t)\left[1 - \int_0 r_{ж}(t-\xi, \xi)\, d\xi\right]^{-1}. \tag{26}$$

Комбинирование верхних и нижних оценок полезно в методе последовательных приближений. Функция $\psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, так как $n_{ж}(\xi) \leqslant n_{ж}(0)$ или, во всяком случае, ограничена сверху другой постоянной, а $l(t-\xi, 0, \xi)\varphi(t-\xi, t) \to 0$ при $t \to \infty$ $(\xi \leqslant 0)$. Для населения с возрастающей $n_{ж}(t)$ должно быть:

$$\int_0^\infty r_{ж}(t-\xi, t)\, d\xi = \int_0^\infty \varphi(t-\xi, t)\, l_{ж}(t-\xi, 0, \xi)\, d\xi > 1. \tag{27}$$

Таким образом, при некотором t верхняя оценка в (26) становится бесконечной. Предполагаемая качественная картина оценок (26) представлена на рис. 5.

Отметим еще, что если принять смертность и фертильность независимыми от t, то уравнение (23) в принципе точно решается методом преобразования Лапласа (по y):

$$n_{ж}^{*}(s) = \psi^{*}(s)\,[1 - r^{*}(s)]^{-1}. \tag{28}$$

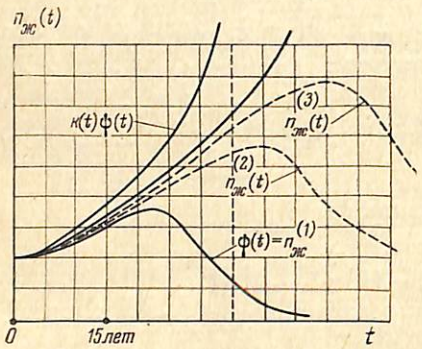

Рис. 5. Графики нижней и верхней оценок решения $n_{ж}(t)$ интегрального уравнения воспроизводства населения (пунктиром показаны последовательные приближения к $n_{ж}(t)$ снизу)

Выпишем теперь по аналогии с (18) возрастную плотность распределения мужского населения $f_{м}(y, t)$:

$$f_{м}(y, t) = \frac{n_{м}(t-y)\, l_{м}(y, 0, t-y)}{\int_0^\infty n_{м}(t-y)\, l_{м}(y, 0, t-y)\, dy}. \tag{29}$$

Интенсивность рождений мальчиков несколько больше интенсивности рождений девочек. Для СССР [10] можно принять $n_{м}(t) = 1{,}06 n_{ж}(t)$. Таким образом, можно прогнозировать процесс изменения во времени численности мужского и женского населения, а также их возрастных распределений. Зная эти процессы, можно прогнозировать целый ряд вторичных практически важных характеристик. Например, рост суммы $Q(t)$ пенсионного обеспечения определится выражениями, пропорциональными суммарному времени жизни пенсионеров каждого пола в $[0, i]$.

$$Q_{м,ж}(t) = k_{м,ж} \int_0^t d\xi \int_{y_{п(м,\,ж)}}^\infty N_{м,ж}(\xi) f_{м,ж}(y, \xi)\, dy. \tag{30}$$

Внутренний интеграл в (30) дает расшифровку используемой в [1] функции $Y(x, t)$, равной числу всех элементов в момент t, возраст которых больше или равен x.

Аналогично вычисляются численности различных контингентов в определенный отрезок времени, что важно для планирования производства, обороны и пр. Располагая медицинской статистикой заболеваний по возрастам, можно планировать объем средств здравоохранения. Ряд других имеющих непосредственное практическое значение расчетов, вытекающих из анализа динамики воспроизводства населения, рассмотрен в [2]. Сейчас после рассмотрения общей модели воспроизводства населения укажем на некоторые более частные, но сходные технические модели, изучаемые теорией надежности.

Рассмотрим систему из постоянного числа N элементов, которые в процессе эксплуатации при отказах заменяются аналогичными новыми (при $t = 0$ все элементы новые). Найдем плотность распределения $f(y, t)$ возраста элементов в момент времени t. Полагая в (16) $N_{\text{ж}}(t) = N$, $n_{\text{ж}}(t - y) = Nh(t - y)$, где $h(t)$ — плотность восстановлений [3, 4], равная пределу отношения среднего числа отказов элемента в $(t, t + \Delta t)$ к Δt при $\Delta t \to 0$, а функцию выживания не зависящей от $t - y$, т. е. равной $l(y)$, найдем, что при $0 \leqslant y < t$

$$f(y, t) = h(t - y)\, l(y). \tag{31}$$

Очевидно, что $f(y, t) = 0$ при $y > t$. Событие $y = t$ возможно и имеет конечную вероятность, равную $l(t)$. Можно записать, используя дельта-функцию Дирака, что $f(y, t) = \delta(t - y)\, l(y)$ при $y = t$. В аналогичной форме приводится, правда без доказательства, $f(y, t)$ в [5]. Плотность восстановления $h(t)$, как известно [3, 4], удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра II-го рода:

$$h(t) = -l'(t) - \int_0^t h(t - z)\, l'(z)\, dz. \tag{32}$$

При $t \to \infty$ $h(t) \to (\overline{X}_0)^{-1}$, где $\overline{X}_0$ — средний срок службы элемента.

Зная $f(y, t)$, можно найти интегральную функцию распределения возраста $F(y, t)$:

$$F(y, t) = \begin{cases} \int_0^t h(t - y)\, l(y)\, dy, & y < t, \\ \int_0^t h(t - y)\, l(y)\, dy + l(t), & y \geqslant t. \end{cases} \tag{33}$$

Зная плотность распределения $f(y, t)$, найдем средний возраст $\overline{Y}_t$ элемента в момент t:

$$\overline{Y}_t = \int_0^t yh(t - y)\, l(y)\, dy + tl(t). \tag{34}$$

Из (34) можно получить асимптотическую формулу для $\overline{Y}_t$ при $t \to \infty$. Очевидно, что $tl(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Далее $h(t - y)$ при больших t может быть заменена постоянной $(\overline{X}_0)^{-1}$. Погрешность при больших y (близких к t) уничтожается весьма малыми при этом значениями $l(y)$ в подынтегральном выражении.

Таким образом:

$$\lim_{t\to\infty} \overline{Y}_t = \frac{\int_0^\infty yl(y)\,dy}{\int_0^\infty l(y)\,dy} = \frac{1}{2}\frac{\overline{X_0^2}}{\overline{X}_0}. \tag{35}$$

Точное выражение для $\overline{Y}_t$ может быть получено лишь в некоторых случаях. Например, если элементы не подвержены старению, то функция выживания может быть принята экспоненциальной $l(t) = \exp\left[-(\overline{X}_0)^{-1}t\right]$. В этом случае для $\overline{Y}_t$ имеем точное выражение:

$$\overline{Y}_t = \overline{X}_0\{1 - \exp\left[-(\overline{X}_0)^{-1}t\right]\}. \tag{36}$$

При t, равном $3 \div 4$ средним срокам службы элемента, процесс устанавливается и средний возраст элемента совпадает со средним сроком службы элемента $\overline{X}_0$. Как следует из (35), такое совпадение возможно лишь в весьма частных случаях.

Соотношения типа (36) можно получить и для систем с переменной численностью элементов $N(t)$. Например, если $N(t) = N(0)\exp(\alpha t)$, а $l(t)$, как и выше, экспоненциальная, то:

$$\overline{Y}_t = [\alpha + (\overline{X}_0)^{-1}]^{-1}\{1 - \exp\left[-\alpha - (\overline{X}_0)^{-1}t\right]\}. \tag{37}$$

Из (37) следует, что при $\alpha > 0$ установившийся средний возраст в системе меньше $\overline{X}_0$, т. е. имеем эффект омоложения совокупности.

Рассмотренные технические модели имеют определенные черты сходства с процессами простого и расширенного воспроизводства населения, а также и очевидные внутренние качественные отличия.

Для демографических моделей аналогично может быть вычислен средний возраст населения в момент t. Общая формула для $\overline{Y}_t$ получается из выражений (16) и (29) для плотности распределений возрастов:

$$\overline{Y}_t = \frac{\int_0^\infty yn(t-y)\,l(y,0,t-y)\,dy}{\int_0^\infty n(t-y)\,l(y,0,t-y)\,dy}. \tag{38}$$

Функция распределения возрастов населения, в отличие от рассмотренной выше технической (33), не имеет скачков и является непрерывной. Это объясняется существованием большой, практически неограниченной, предыстории рождений и смертей. Вычисление $\overline{Y}_t$ по (38), конечно, более сложное, чем для рассмотренных технических моделей. С качественной стороны следует отметить, что $\overline{Y}_t$ при больших t может не стремиться (в отличие от рассмотренных технических моделей) к определенному пределу при переменном режиме воспроизводства, характеризуемом переменной фертильностью и смертностью. Вообще же доказательства существования и способы получения асимптотических формул в демографических моделях воспроизводства населения являются весьма сложными вопросами, по-видимому, еще не изученными. Во всяком случае, они более сложны, нежели в довольно развитой современной математической теории восстановления.

Мы не рассматриваем в данной статье более подробно особенности демографических и технико-экономических моделей, а также родственность и перспективы взаимосвязи математической демографии с другими областями. Отметим лишь, что воспроизводство основных фондов имеет черты сходства с демографическими процессами [11], а динамика брачности [12] с процессами массового обслуживания [13]. Определенный интерес представляют работы Лотка по математической теории популяций (динамика численности, эволюция возрастной структуры). Ряд выводов Лотка, относящихся в основном к стационарному населению, излагается и обсуждается в [14, 15].

Изложенные в данной работе результаты имеют как демографические, так и технические приложения. Подчеркнем также, в качестве общего вывода, как важность сравнительного изучения соприкасающихся вопросов технической теории надежности и демографической статистики, так и необходимость дальнейшей разработки сходных для обеих областей математических моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Борткевич. Смертность и долговечность мужского православного населения Европейской России. С.-П, 1890.
2. А. Я. Боярский. Курс демографической статистики. М. Госпланиздат, 1945.
3. D. R. Cox. Renuwal Theory. London, 1962.
4. В. Л. Смит. Теория восстановления. Сб. переводов, Математика, 1961, т. 5, № 3 (Изд-во иностр. лит.).
5. Д. Ллойд, М. Липов. Надежность М., «Советское радио», 1964.
6. Г. В. Дружинин. Надежность устройств автоматики. М.— Л., «Энергия», 1964.
7. Итоги Всесоюзной переписи населения 1959 г. М., Госстатиздат, 1962.
8. Б. Стреллер. Время, клетки, старение. М., «Мир», 1964.
9. Е. Янке, Ф. Эмде. Таблицы функций. М., Физматгиз, 1959.
10. Б. Ц. Урланис. Рождаемость и продолжительность жизни в СССР. М., Госстатиздат, 1963.
11. А. Я. Боярский. Математико-экономические очерки. М., Госстатиздат, 1962.
12. М. В. Птуха. Очерки по статистике населения. М., Госстатиздат, 1960.
13. Т. Л. Саати. Элементы теории массового обслуживания. М., «Советское радио», 1965.
14. Э. Макфедьен. Экология животных. М., «Мир», 1965.
15. Т. Харрис. Теория ветвящихся случайных процессов. М., «Мир», 1966.

Поступила в редакцию
16 VII 1965