переменная, записанная ранее в r_0-й строке таблицы Д переносится в соответствующую клетку множества Т; затем полагаем

$$\tilde{k}_{r_0} = 0, \quad \tilde{p}_{r_0} = p_0, \quad \tilde{q}_{r_0} = q_0, \quad \tilde{z}_{r_0} = \vartheta.$$

8. Преобразуем матрицу S. Матрица S преобразуется по «симплексным» правилам. В качестве ключевого столбца используется вектор β. Обозначим элементы этого столбца через s_{r0}. В случае а) в качестве ключевой строки используется r_0-я строка. Преобразование ведется по формулам:

$$\tilde{s}_{rt} = s_{rt} - \frac{s_{r0}\, s_{r_0t}}{s_{r_00}}, \quad r \neq r_0,$$

$$\tilde{s}_{r_0t} = \frac{s_{r_0t}}{s_{r_00}}.$$

В случае б) в качестве ключевой строки используется дополнительная строка (s_{0t}), получаемая по формулам:

$$s_{00} = 1, \quad s_{0t} = \frac{1}{\xi_{i_0j_0}} \sum_{r=1}^{L} s_{rt}\rho_r,$$

$$\rho_r = \begin{cases} 0, & \text{если } k_r \neq 0, \\ \delta_{i_0j_0}(p_r, q_r), & \text{если } k_r = 0. \end{cases}$$

Преобразование ведется по формуле $\tilde{s}_{rt} = s_{rt} - s_{r0}s_{0t}$. В случае в) преобразование ведется так же, как в случае б), а затем дополнительная (нулевая) строка записывается вместо r_0-й строки.

9. Изменяем вектор w по формуле $\tilde{w} = w - \Delta\gamma$, где $\gamma = e\tilde{S}$, а вектор $e = (e_r)$ определяется в случаях а) и в) формулами:

$$e_r = \begin{cases} 0, & \text{если } r \neq r_0, \\ 1, & \text{если } r = r_0, \end{cases}$$

в случае б)

$$e_r = -\frac{\rho_r}{\delta_{i_0j_0}(\rho_0, q_0)}.$$

Заметим, что при изменении вектора w используется уже измененная матрица $\tilde{S}$. После выполнения п. 9 переходим снова к п. 1.

Выскажем некоторые замечания по поводу построения исходного опорного плана и выбора значений Δ при улучшении плана. Очевидно, что величину Δ можно представить в виде линейной функции от M, т. е. $\Delta = \Delta' + \Delta''M$. Будем при улучшении плана выбирать такое значение $\Delta > \varepsilon$, для которого отношение $-\Delta' / \Delta''$ достигает минимального значения. Если исходный план нашей задачи был построен из оптимального плана задачи (3), то оптимальный план мы получим, как только обратятся в нуль все искусственные переменные. Этот способ выбора значений Δ был предложен В. А. Машем.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. В. Ким. Об использовании специфики условий задачи в методе улучшения плана. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 1.
2. Э. А. Мухачева. Транспортная задача на сети с дополнительными ограничениями. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 4.

Поступила в редакцию
4 X 1965

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1967
том III, вып. 4

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО И ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С. М. МОВШОВИЧ

(*Москва*)

Один из известных методов решения задач математического программирования заключается в отыскании безусловного минимума (или максимума) некоторой специально выбранной функции $F(x)$. Этот метод часто называют методом «штрафов», или методом «штрафных функций», так как суть его состоит в том, что ограничения исходной задачи математического программирования заменяются «штрафами» за их нарушение. Методу штрафов посвящены, например, работы [1—3].

В настоящей работе применительно к задачам линейного и выпуклого программирования исследуется близость решения исходной задачи и задачи на безусловный минимум функции $F(x)$. Этому вопросу посвящен раздел 1. Далее (раздел 2) исследуются условия монотонности и скорость сходимости одного процесса отыскания безусловного минимума функции $F(x)$.

1°. Рассматривается задача математического программирования. Необходимо отыскать вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R^n$, удовлетворяющий условиям

$$g_i(x) \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

и минимизирующий функцию

$$f(x) - \min. \tag{2}$$

Здесь $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, $f(x)$ — скалярные функции, b_i, $i = 1, \ldots, m$ — действительные числа.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим задачу отыскания безусловного минимума функции

$$F(x) = f(x) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \Phi(t_i(x)), \tag{3}$$

где

$$t_i(x) = g_i(x) - b_i. \tag{4}$$

При соответствующем выборе функций $\Phi(t)$ и константы $\alpha > 0$ из решения задачи (3)—(4) можно получить приближенное решение задачи (1)—(2).

Будем рассматривать разрешимые задачи (1)—(2).

Задача (1)—(2) называется разрешимой, если множество $M = \{x : g_i(x) \leqslant b_i, i = 1, \ldots, m\}$ непусто и существует точка $x^* \in M$ такая, что $f(x^*) = \min\limits_{x \in M} f(x)$. Обозначим также $M_\varepsilon = \{x : g_i(x) \leqslant b_i + \varepsilon, i = 1, \ldots, m, \varepsilon > 0\}$.

Докажем сначала две леммы, необходимые для оценки близости решений задач (1)—(2) и (3)—(4).

Лемма 1. *Если задача* (1)—(2) *разрешима, функции* $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, $f(x)$ *выпуклые и существует точка* x^0 *такая, что* $g_i(x^0) < b_i$,

$i=1,\ldots,m$ *(условие Слейтера), то*

$$f(x^*)-k_0\varepsilon \leqslant \inf_{x\in M_\varepsilon} f(x) \leqslant f(x^*), \tag{5}$$

где k_0 не зависит от ε.

Доказательство. Рассмотрим функцию Лагранжа, соответствующую задаче (1) — (2):

$$\varphi(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^m \lambda_i(g_i(x)-b_i).$$

Из условий леммы следует справедливость теоремы Куна — Таккера [4], т. е. существует такой вектор $\lambda^*=(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)\geqslant 0$, что для всех x и $\lambda\geqslant 0$

$$\varphi(x,\lambda^*)\geqslant\varphi(x^*,\lambda^*)\geqslant\varphi(x^*,\lambda).$$

Положим

$$\varphi_\varepsilon(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)-\varepsilon\sum_{i=1}^m\lambda_i,$$

тогда

$$\inf_{x\in M_\varepsilon} f(x)=\inf_{x\in R^n}\sup_{\lambda\geqslant 0}\varphi_\varepsilon(x,\lambda),$$

поскольку

$$\sup_{\lambda\geqslant 0}\varphi_\varepsilon(x,\lambda)=\begin{cases} f(x), & x\in M_\varepsilon,\\ \infty, & x\notin M_\varepsilon.\end{cases}$$

Но

$$\varphi(x^*,\lambda^*)\geqslant\inf_{x\in R^n}\sup_{\lambda\geqslant 0}\varphi_\varepsilon(x,\lambda)\geqslant\inf_{x\in R^n}\varphi(x,\lambda^*)-\varepsilon\sum_{i=1}^m\lambda_i^*,$$

т. е.

$$f(x^*)\geqslant\inf_{x\in M_\varepsilon} f(x)\geqslant f(x^*)-\varepsilon\sum_{i=1}^m\lambda_i^*=f(x^*)-k_0\varepsilon. \tag{6}$$

Лемма 2. *Если* (1) — (2) — *разрешимая задача линейного программирования, то справедливы неравенства* (6).

Доказательство. Левое неравенство непосредственно следует из условия $M\subset M_\varepsilon$. Пусть теперь λ^* — оптимальный план задачи, двойственной к (1) — (2). Поскольку λ^* остается планом двойственной задачи при замене b_i на $b_i+\varepsilon$, то

$$f(x^*)-\varepsilon\sum_{i=1}^m\lambda_i^*=-\sum_{i=1}^m b_i\lambda_i^*-\varepsilon\sum_{i=1}^m\lambda_i^*\leqslant\min_{x\in M_\varepsilon} f(x).$$

Перейдем теперь к исследованию близости решений задач (1) — (2) и (3) — (4).

Назовем последовательность $\{x^k\}$, удовлетворяющую условию $\lim\limits_{k\to\infty}F(x^k)=\inf F(x)$, обобщенным решением задачи (3) — (4). В частности, при $F(\bar{x})=\inf F(x)$ будем называть $\bar{x}$ решением задачи (3) — (4).

Последовательность $\{x^k\}$ назовем расширенным ε-решением задачи (1) — (2), если при заданном $\varepsilon>0$ найдется такое K, что при $k>K$ выполняются условия $x^k\in M_\varepsilon$, $|f(x^k)-f(z^*)|\leqslant\varepsilon$.

Пусть функция $\Phi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

А1. $\Phi(t) \begin{cases} = 0, & \text{если } t \leqslant 0, \\ > 0, & \text{если } t > 0. \end{cases}$

А2. $\Phi(t)$ — монотонная функция t.

А3. $\Phi(t(x))$ — выпуклая вниз функция x.

Теорема 1. *Пусть имеют место условия леммы* 1, *либо леммы* 2, *а функция* $\Phi(t)$ *удовлетворяет условиям* А1 — А3. *Тогда при заданном* ε *найдется такое* $\alpha_0(\varepsilon)$, *что при* $\alpha \geqslant \alpha_0(\varepsilon)$ *обобщенное решение задачи* (3) — (4) *является расширенным* ε-*решением задачи* (1) — (2).

Доказательство. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon / m(2k_0 + 1)$ и зададимся положительными числами σ_1 и σ_2, удовлетворяющими условию $\sigma_1 + \sigma_2 k_0 = \varepsilon_1$. Так как $F(x^*) = f(x^*) \geqslant \inf F(x)$, то найдется такое $K(\sigma_1)$, что при $k > K(\sigma_1)$

$$F(x^k) < \inf F(x) + \sigma_1 \leqslant f(x^*) + \sigma_1. \tag{7}$$

Покажем, что при достаточно большом α

$$F(x) \geqslant f(x^*) + \sigma_1 \text{ при } x \notin M_{\varepsilon_1}. \tag{8}$$

Наряду с M_{ε_1} рассмотрим множество $M_{\varepsilon'}$, где $\varepsilon' = \varepsilon_1 + \sigma_2$, и $M' = M_{\varepsilon'} \setminus M_{\varepsilon_1}$. Из леммы 1 либо леммы 2 следует, что при $x \in M' \subset M_{\varepsilon'}$

$$F(x) = f(x) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \Phi(t_i(x)) \geqslant f(x^*) - k_0\varepsilon' + \alpha\Phi(\varepsilon_1).$$

Таким образом, при

$$\alpha \geqslant \alpha_0(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_1}{\Phi(\varepsilon_1)}(k_0 + 1) = \frac{\varepsilon}{\Phi(\varepsilon/m(2k_0 + 1))} \frac{(k_0 + 1)}{m(2k_0 + 1)} \tag{9}$$

и $x \in M'$ неравенство (8) выполняется. Докажем теперь (8) для остальных точек $x \notin M_{\varepsilon_1}$. Рассмотрим произвольную точку $x' \notin M_{\varepsilon'}$ и отрезок $x(\lambda) = (1 - \lambda)x^* + \lambda x'$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Нетрудно показать, что найдется такое λ', $0 < \lambda' < 1$, что $x(\lambda') \in M'$. Поскольку

$$F(x(\lambda')) \leqslant (1 - \lambda)F(x^*) + \lambda F(x'),$$

то

$$F(x') \geqslant f(x^*) + \frac{\sigma_1}{\lambda} \geqslant f(x^*) + \sigma_1.$$

Покажем теперь, что при условиях (9) и $k > K(\sigma_1)$

$$f(x^*) - \varepsilon \leqslant f(x^k) \leqslant f(x^*) + \varepsilon.$$

Действительно,

$$f(x^*) - k_0\varepsilon_1 \leqslant \inf_{x \in M_{\varepsilon_1}} f(x) \leqslant \inf_{x \in M_{\varepsilon_1}} F(x) \leqslant f(x^*)$$

и, поскольку $\inf\limits_{x \in M_{\varepsilon_1}} F(x) = \inf F(x)$, то при $k > K(\sigma_1) > K(\varepsilon_1)$

$$f(x^*) - k_0\varepsilon_1 \leqslant f(x^k) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \Phi(t_i(x^k)) \leqslant f(x^*) + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$f(x^*) - (2k_0 + 1)m\varepsilon_1 \leqslant f(x^k) \leqslant f(x^*) + \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Формула (9) позволяет в некоторых случаях оценить необходимую величину α_0 до начала решения задачи (3) — (4).

Пусть (1) — (2) — задача линейного программирования.

Обозначим $G = \{x : x \in M,\ f(x) \leqslant f(x^*)\}$ — множество ее оптимальных планов, $G_\varepsilon = \{x : x \in M_\varepsilon, f(x) \leqslant f(x^*) + \varepsilon\}$ и $\rho(x, G)$ — расстояние от точки x до множества G, т. е.

$$\rho(x, G) = \min_{y \in G} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Лемма 3*. *Пусть* (1) — (2) *— задача линейного программирования. Тогда существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $\max\limits_{x \in G_\varepsilon} \rho(x, G) \leqslant p\varepsilon$, где p не зависит от ε.

Следствие. Если (1) — (2) — разрешимая задача линейного программирования, то найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$ и K_0, что при любом ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\alpha \geqslant \alpha_0(\varepsilon / p)$, $k > K_0$ справедливо неравенство $\rho(x^k, G) \leqslant \varepsilon$. Доказательство следует из лемм 2, 3 и теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* (1) — (2) *задача выпуклого программирования, множество G ее оптимальных планов непусто и ограничено, а функция* $\Phi(t)$ *удовлетворяет условиям* А1 — А3. *Тогда при заданном* ε *найдутся такие* $\alpha_0(\varepsilon)$ *и* K_0, *что при* $\alpha \geqslant \alpha_0(\varepsilon)$ *и* $k > K_0$ $\rho(x^k, G) < \varepsilon$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 в [5].

В заключение раздела 1° определим, какие функции удовлетворяют условиям А1 — А3.

Положим $\Phi(t) = \Psi(t_+)$, где $t_+ = (t + |t|) / 2$, т. е.

$$t_+ = \begin{cases} t & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Лемма 4. *Если* $\Psi(t) > 0$ *при* $t > 0$ *и* $\Psi(0) = 0$, *то* $\Phi(t)$ *удовлетворяет условию* А1. *Если, кроме того,* $\Psi(t)$ *при* $t \geqslant 0$ *— выпуклая вниз функция, то* $\Phi(t)$ *удовлетворяет условию* А2.

Если при этом $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ *— выпуклые вниз функции, то* $\Phi(t(x))$ *удовлетворяет условию* А3.

Доказательство. Первое утверждение очевидно.

Из соотношений $\Phi(t) = \Psi(t)$ при $t > 0$ и $\Psi(t_1) \leqslant \Psi(t_2)(t_1 / t_2) < \Psi(t_2)$ для любых t_1, t_2, $0 < t_1 < t_2$ следует строгая монотонность $\Phi(t)$ при $t > 0$. Так как при $t \leqslant 0$ $\Phi(t) = 0$, отсюда следует справедливость второго утверждения.

Из выпуклости функций $g_i(x)$ и монотонности $\Phi(t)$ следует

$$\Phi(g_i(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) - b_i) \leqslant \Phi(\lambda(g_i(x_1) - b_i) + (1 - \lambda)(g_i(x_2) - b_i)), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Из этого неравенства, выпуклости $\Psi(t)$ при $t \geqslant 0$ и монотонности $\Phi(t)$ следует третье утверждение.

Условиям леммы 4 удовлетворяют, например, функции $\Psi(t) = t^k$ при $k > 1$, $\Psi(t) = e^{\beta t^2}$ при $\beta > 0$ и т. д.

2°. В дальнейшем рассматривается задача (3) — (4). Исследуем теперь градиентный метод отыскания безусловного минимума функции $F(x)$. Обозначим $f'(x) = (\partial f(x) / \partial x_1, \ldots, \partial f(x) / \partial x_n)^T$ — градиент функции $f(x)$ и $\|x\|$ — норму вектора x. Градиентный метод минимизации $F(x)$ заключается в построении последовательности точек x^k, которые определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$x^{k+1} = x^k - \beta_k F'(x^k). \tag{10}$$

Исходная точка x^1 произвольна; β_k — некоторые константы, выбор которых влияет на сходимость процесса.

* Лемма 3 является перефразировкой результата, установленного в [7].

Теорема 3. *Если функция $F(x)$ дифференцируема и для производных x, y удовлетворяет условию*

$$\|F'(x+y)-F'(x)\| \leqslant R\|y\|, \tag{11}$$

последовательность x^k задается соотношениями (10) *и* $\varepsilon < \beta_k < (2/R)-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, *то последовательность $F(x^k)$ монотонно убывает с ростом k.*

Если, кроме того, (1) — (2) — *задача выпуклого программирования и множество $V = \{x : F(x) \leqslant F(x^1)\}$ ограничено, то последовательность $F(x^k)$ является обобщенным решением задачи* (3) — (4).

Доказательство (см. [6]). Первое утверждение сразу следует из цепочки соотношений

$$F(x^{k+1})-F(x^k) = -\beta_k(F'(x^k))^{\mathrm{T}}\int_0^1 F'(x^k+t\beta_k F'(x^k))\,dt =$$

$$= -\beta_k\|F'(x^k)\|^2-\beta_k(F'(x^k))^{\mathrm{T}}\int_0^1 (F'(x^k+t\beta_k F'(x^k))-F'(x^k))\,dt \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\beta_k}{2}(2-\beta_k R)\|F'(x^k)\|^2 \leqslant 0. \tag{12}$$

Второе утверждение следует из (12), выпуклости функции $F(x)$, ограниченности и замкнутости множества V.

Выделим условия, при которых функция $F(x)$ удовлетворяет условию (11).

Теорема 4. *Пусть функции $f(x)$, $\Psi(t)$ и $g_i(x)$, $i=1,\ldots,m$, дифференцируемы и их градиенты удовлетворяют условиям*

$$\begin{gathered}\|f'(x+y)-f'(x)\| \leqslant R_0\|y\|,\\ \|g_i'(x+y)-g_i'(x)\| \leqslant R_i\|y\|, \quad i=1,\ldots,m,\\ |\psi'(t+\tau)-\psi'(t)| \leqslant R_{m+1}|\tau|\end{gathered} \tag{13}$$

для произвольных точек x, y, t, τ. Тогда, если $\Psi'(0)=0$, $\Phi(t)=\Psi(t_+)$ и для любых x, y, t, τ и $i=1,\ldots,m$.

$$\|g_i'(x+y)-g_i'(x)\|\,|\psi'(t+\tau)-\psi'(t)| \leqslant C < \infty, \tag{14}$$

то градиент функции $F(x)$ существует и удовлетворяет условию (11).

Доказательство. Покажем прежде всего, что на отрезке $[x+y, x]$ найдутся такие точки y_i и x_i, что

$$\begin{gathered}\|\Phi_x'(g_i(x+y)-b_i)-\Phi_x'(g_i(x)-b_i)\| \leqslant\\ \leqslant \|\psi_x'(g_i(y_i)-b_i)-\psi_x'(g_i(x_i)-b_i)\|.\end{gathered} \tag{15}$$

Если $x+y \notin M$ и $x \notin M$, либо $x+y \in M$ и $x \in M$, то (15) очевидно при $y_i = x+y$, $x_i = x$. Рассмотрим случай, когда $x+y \notin M$, $x \in M$. Случай $x+y \in M$, $x \notin M$ рассматривается аналогично.

На отрезке $\lambda x+(1-\lambda)(x+y) = x+(1-\lambda)y$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, найдется точка $x_i = x+(1-\lambda_i)y$ такая, что $g_i(x_i) = b_i$, т. е. $\Psi_x'(g_i(x_i)-b_i) = 0$. Неравенство (15) при $y_i = x+y$ следует из того, что

$$\begin{gathered}\|\Phi_x'(g_i(x+y)-b_i)-\Phi_x'(g(x)-b_i)\| =\\ = \|\Psi_x'(g_i(x+y)-b_i)-\Psi_x'(g_i(x_i)-b_i)\|.\end{gathered}$$

Воспользовавшись неравенствами (13) и (15) и выпуклостью функций $g_i(x)$, получим после несложных преобразований

$$\|F'(x-y)-F'(x)\| = \Big\|f'(x+y)-f'(x)+\alpha\sum_{i=1}^{m}(\Phi_x'(g_i(x+y)-b_i)-$$

$$-\Phi_x'(g_i(x)-b_i))\Big\| \leqslant \|f'(x+y)-f'(x)\|+$$

$$+\alpha\sum_{i=1}^{m}\|\Phi_x'(g_i(x+y)-b_i)-\Phi_x'(g_i(x)-b_i)\| \leqslant \|y\|\Big(R_0+$$

$$+\alpha\sum_{i=1}^{m}\Big(\Big|\frac{d\Psi(g_i(y_i)-b_i)}{dt}\Big|R_i+\|g_i'(x_i)\|\max(\|g_i'(x_i)\|,\|g_i'(y_i)\|)R_{m+1}\Big)\Big).$$

Для завершения доказательства отметим, что из (14) и условия $\Psi'(0) = 0$ следует, что либо все $\|g_i'(x)\| \leqslant C_1$, $|\Psi'(t)| \leqslant C_2$ для любых x и t, либо $|\Psi'(t))|$ — неограниченная функция, но $R_i = 0$ для всех i.

Таким образом,

$$R = \begin{cases} R_0+\alpha C_2\sum_{i=1}^{m}R_i+\alpha C_1^2R_{m+1} \text{ — в первом случае,} \\ R_0+\alpha C_1^2R_{m+1} \text{ — в случае линейных ограничений.}\end{cases}$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполняются все условия теоремы 4, кроме (14), и множество V ограничено при любой исходной точке x'. Тогда при любом x^1 и любом k справедливо неравенство (12), причем

$$R = R_0+\alpha C_2\sum_{i=1}^{m}R_i+\alpha C_1^2R_{m+1},$$

а

$$C_1 = \max_{x\in V}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\|g_i'(x)\|, \quad C_2 = \max_{t\in T}|\psi'(t)|,$$

где

$$T = \{t : t = g_i(x)-b_i, \quad i = 1,\ldots,m, \quad x\in V\}.$$

Доказательство следует из непрерывной дифференцируемости функций $g_i(x)$ и $\Psi(t)$ и замкнутости и ограниченности множеств V и T.

Если для любого k справедливо неравенство (12) и, кроме того, функция $F(x)$ для любого x удовлетворяет условию

$$\|F'(x)\|^2 \geqslant r(F(x)-F_0), \tag{16}$$

где r — некоторое положительное число, то, как показано в [6], последовательность $F(x^k)$ сходится к F_0 со скоростью геометрической прогрессии. Действительно, из (11), (12), (16) и условия $\varepsilon < \beta < (2/R)-\varepsilon$ следует, что

$$F(x^{k+1})-F_0 \leqslant (F(x^k)-F_0)q, \tag{17}$$

где знаменатель прогрессии $q = 1-(\beta r/2)(2-\beta R) < 1$.

Теорема 5. *Пусть* (1)—(2) *— разрешимая задача линейного программирования,* $\Psi(t) = t^2$. *Тогда для всех* x, *таких, что* $F(x) \leqslant F^1 < \infty$, *выполняется условие* (16).

Доказательство. Рассмотрим множества

$$M_k = \{x : a_i x - b_i \geqslant 0, \quad i \in L_k; \quad a_i x - b_i \leqslant 0, \quad i \notin L_k\},$$

где L_k — произвольный набор индексов из множества $\{1, \ldots, m\}$. Очевидно, множество различных M_k конечно. Если $x \in M_k$, то

$$F(x) = a_{m+1} x + \alpha \sum_{i \in L_k} (a_i x - b_i)^2. \tag{18}$$

Обозначим $b_{(k)}$ — вектор с компонентами b_i, $i \in L_k$; A_k — матрицу со строками a_i, $i \in L_k$, $Q_k = \alpha A_k^{\mathrm{T}} A_k$, $q_k = (a_{m+1} - 2\alpha b_{(k)}^{\mathrm{T}} A_k)^{\mathrm{T}}$, $p_k = \alpha b_{(k)}^{\mathrm{T}} b_k$

Тогда из (18) следует, что $F(x) = x^{\mathrm{T}} Q_k x + q_k^{\mathrm{T}} x + p_k$, причем Q_k — симметрическая матрица, а квадратичная форма $x^{\mathrm{T}} Q_k x$ — неотрицательно определенная.

Ортогональным преобразованием $x = D_k y$ квадратичную форму $x^{\mathrm{T}} Q_k x$ можно привести к главным осям: $F(y) = y^{\mathrm{T}} \Lambda_k y + q_k^{\mathrm{T}} D_k y + p_k$, где $\Lambda_k = D_k^{\mathrm{T}} Q_k D_k = (\lambda_i^{(k)} \delta_{ij})_1^n$, $\lambda_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots, n$ — собственные значения матрицы Q_k; δ_{ij} — символ Кронекера. Очевидно, $\lambda_i^{(k)} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $\lambda_i^{(k)} = 0$ для $i \in I_k \subset \{1, \ldots, n\}$.

Возможны следующие два случая: 1) $(q_k^{\mathrm{T}} D_k)_i = 0$ для всех $i \in I_k$. 2) Найдется $i_0 \in I$ такое, что $(q_k^{\mathrm{T}} D_k)_{i_0} \neq 0$.

Рассмотрим сначала первый случай. В этом случае функция $F(y)$ не зависит от компонент y_i, $i \in I_k$.

Рассмотрим подпространство $Z_k \subset R^n$ векторов $z = (y_{i_1}, \ldots, y_{i_{s_k}})^{\mathrm{T}}$, где $i_j \notin I_k$, $j = 1, \ldots, s_k$, и соответственно усеченные матрицу $\overline{\Lambda}_k$ и вектор $q_k^{\mathrm{T}} \overline{D}_k$. Функция $F(y) = F(z) = z^{\mathrm{T}} \overline{\Lambda}_k z + q_k^{\mathrm{T}} \overline{D}_k z + p_k$ достигает минимума F_k на подпространстве Z_k, поскольку $\overline{\Lambda}_k$ — положительно определенная матрица. Так как $F'(z) = 2\overline{\Lambda}_k z + q_k^{\mathrm{T}} \overline{D}_k$, то минимум достигается в точке $z_k^* = -{}^1/_2 (\overline{\Lambda}_k)^{-1} q_k^{\mathrm{T}} \overline{D}_k$ и равен $F_k = p_k - {}^1/_4 q_k^{\mathrm{T}} \overline{D}_k (\overline{\Lambda}_k)^{-1} \overline{D}_k^{\mathrm{T}} q_k$.

Покажем теперь, что

$$\|F'(z)\|^2 \geqslant r_k (F(z) - F_k), \tag{19}$$

где

$$0 < r_k \leqslant 4 \min_{i:\, \lambda_i^{(k)} > 0} \{\lambda_i^{(k)}\}. \tag{20}$$

Исследуем для этого функцию

$$R_k(z) = \|F'(z)\|^2 - r(F(z) - F_k) = z^{\mathrm{T}} (4\overline{\Lambda}_k^{\mathrm{T}} \overline{\Lambda}_k - r\overline{\Lambda}_k) z + {}$$
$$+ (4 q_k^{\mathrm{T}} \overline{D}_k \overline{\Lambda}_k - r q_k^{\mathrm{T}} \overline{D}_k) z + q_k^{\mathrm{T}} \overline{D}_k \overline{D}_k^{\mathrm{T}} q_k - \frac{1}{4} r q_k^{\mathrm{T}} \overline{D}_k (\overline{\Lambda}_k)^{-1} \overline{D}_k^{\mathrm{T}} q_k.$$

Если $r \leqslant 4 \min\limits_{i:\lambda_i^{(k)} > 0} \{\lambda_i^{(k)}\}$, то матрица $4\overline{\Lambda}_k^{\mathrm{T}} \overline{\Lambda}_k - r\overline{\Lambda}_k$ положительно определена и минимум функции $R_k(z)$ достигается в точке z_0, для которой

$R_k'(z_0) = 0$. Отсюда следует, что

$$R_k(z_0) = -\frac{1}{4}(4q_k{}^{\mathrm{T}}\overline{D}_k\overline{\Lambda}_k - rq_k{}^{\mathrm{T}}\overline{D}_k)(4\overline{\Lambda}_k{}^{\mathrm{T}}\overline{\Lambda}_k - r\overline{\Lambda}_k)^{-1}(4q_k{}^{\mathrm{T}}\overline{D}_k\Lambda_k -$$

$$- rq_k{}^{\mathrm{T}}\overline{D}_k)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{4}q_k{}^{\mathrm{T}}\overline{D}_k(4E - r(\overline{\Lambda}_k)^{-1})\overline{D}_k{}^{\mathrm{T}}q_k = 0.$$

Здесь E — единичная матрица.

Таким образом, из (20) следует, что при любых $z \in Z_k$ справедливо соотношение (19). Так как $F(x) = F(z)$ при $x \in M_k$ и преобразование D_k ортогонально, то из (19) следует

$$\|F'(x)\|^2 \geqslant r_k(F(x) - F_k), \quad x \in M_k, \text{ где } r_k = 4 \min_{i:\, \lambda_i^k > 0} \{\lambda_i^{(k)}\} > 0. \tag{21}$$

Если $F_k \leqslant F_0$, то из (21) сразу следует, что

$$\|F'(x)\|^2 \geqslant r_k(F(x) - F_0), \quad x \in M_k. \tag{22}$$

Покажем, что при $F_k > F_0$

$$\inf_{x \in M_k} \|F'(x)\| = \nu_k > 0. \tag{23}$$

Предположим, что (23) неверно, т. е. существует последовательность $x^l \in M_k$, $l = 1, \ldots$, такая, что $F_i'(x^l) = \partial F(x^l) / \partial x_i \to 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$ при $l \to \infty$. Рассмотрим задачу линейного программирования, состоящую в минимизации t при условиях $-t \leqslant F_i'(x) \leqslant t$, $i = 1, \ldots, n$, $x \in M_k$. Эта задача разрешима, так как множество ее планов непусто и $t \geqslant 0$. Последовательности x^l соответствует последовательность $t^l \to 0$, причем (x^l, t^l) — планы задачи. Отсюда следует, что оптимальное значение $t = 0$, т. е. существует точка $x_k{}^* \in M_k$ такая, что $\|F'(x_k{}^*)\| = 0$. Следовательно, $F_k = F_0$, что противоречит условию $F_k > F_0$. Полученное противоречие доказывает справедливость соотношения (23).

Из (23) и условий теоремы следует, что при

$$r_k \leqslant \nu_k{}^2 / (F^1 - F_0) \tag{24}$$

выполняется неравенство (22).

На этом рассмотрение первого случая заканчивается. Если имеет место второй случай, то

$$\|F'(y)\|^2 \geqslant \sum_{i \in L_k} ((q_k{}^{\mathrm{T}}D_k)_i)^2 = \nu_k > 0.$$

Поэтому (22) справедливо, если r_k определено в соответствии с (24). Полагая $r = \min_k \{r_k\} > 0$, получим (16). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. W. Carrol. The created response surface technique for optimizing nonlinear restrained systems. Opns. Res., 1961, v. 9, № 2.
2. Н. П. Бусленко, Г. А. Соколов. Об одном классе задач оптимального распределения. Экономика и матем. методы, 1965, т. 1, вып. 1.
3. T. Pietrzykowski. On an iteration method for maximizing a concave function on a convex set. Prace ZAM, 1961, sec. A, N 13.
4. К. Д. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. М. В. Рыбашов. Градиентный метод решения задач выпуклого программирования на электронной модели. Автоматика и телемеханика, 1965, т. XXVI, № 11.
6. Б. Т. Поляк. Градиентные методы минимизации функционалов. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 4.
7. A. J. Hoffman. On approximate solutions of systems of linear inequalities. J. Res. Nat. Buro Standarts, 1952, v. 49, № 4.

Поступила в редакцию
29 IV 1966

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1967
том III, вып. 4

НАУЧНЫЕ КОНСУЛЬТАЦИИ

БАЛАНС ФИНАНСИРОВАНИЯ НАКОПЛЕНИЯ

Л. Ф. КУРЧЕНКО

(*Москва*)

Развитие народного хозяйства страны в огромной степени зависит от накопления, его структуры и размеров. Поэтому при составлении отчетного баланса общественного продукта и национального дохода большое место отводится таблицам расчетов основных фондов и оборотных средств, в экспериментальном порядке составляется отчетный баланс основных фондов. Но в имеющихся статистических отчетных балансах ЦСУ накопление показывается только со стороны материально-вещественной структуры, совершенно не затрагивается финансовая сторона накопления, не рассматриваются источники и формы его финансирования. При наличии же денежного хозяйства, когда движение товаров связано с соответствующим движением денежных средств, нельзя игнорировать финансовую сторону всех областей экономики, поэтому, на наш взгляд, и накопление следует отражать в двух аспектах: материально-вещественном и финансовом.

При планировании накопления также в первую очередь обращают внимание на материально-вещественную структуру. Планы капитальных вложений и нормативы оборотных средств определяются главным образом на основе производственных заданий и опираются на имеющиеся материальные ресурсы и возможность обеспечения накопления материалами и оборудованием. И хотя финансовые планы всецело подчиняются производственным планам, финансовое планирование накопления тем не менее необходимо, поскольку оно определяет возможность обеспечения составленных планов финансовыми ресурсами. Поэтому, чтобы добиться реальности планов, их следует рассматривать с двух точек зрения — материальной и финансовой.

Увязка материальных и финансовых факторов капитальных вложений по всей структуре народного хозяйства требует того, чтобы накопление рассматривалось в общей системе народнохозяйственных связей. Эта цель может быть достигнута, если исследовать накопление в рамках сводного материально-финансового баланса. Для этого необходимо, чтобы баланс финансирования накопления, разрабатываемый как специальный инструмент анализа этого народнохозяйственного процесса, в агрегированном виде непосредственно входил в сводный материально-финансовый баланс *.

В настоящей консультации рассматривается один из возможных вариантов такого баланса.

Баланс финансирования накопления составляется в виде блочной матрицы, по строкам которой показывается формирование денежных ресурсов на накопление, а по столбцам — расходование их. Баланс состоит из пяти

* О материально-финансовом балансе см. консультацию Э. В. Детневой в журнале «Экономика и математические методы», том. II, вып. 1, 1966 г.