полагалось, что использование мощностей, действующих в начале планового периода, составит 100% к концу планового периода.

Приведенная формулировка задачи может быть представлена системой линейных неравенств:

$$B_{11} - 1{,}347\,^{*} B_{29} + B_{12} - 1{,}347 B_{2,10} + B_{13} - 1{,}347 B_{2,11} + + B_{14} - 1{,}347 B_{2,12} \geqslant P_1, \qquad (1)$$

$$B_{11} - 1{,}347 B_{29} \geqslant 0, \qquad (2)$$

$$B_{12} - 1{,}347 B_{2,10} \geqslant 0, \qquad (3)$$

$$B_{13} - 1{,}347 B_{2,11} \geqslant 0, \qquad (4)$$

$$B_{14} - 1{,}347 B_{2,12} \geqslant 0, \qquad (5)$$

$$a_{22} B_{12} + B_{29} + B_{2,10} + B_{2,11} + B_{2,12} \geqslant P_2, \qquad (6)$$

$$a_{33} B_{13} + a_{34} B_{14} + B_{37} \geqslant P_3, \qquad (7)$$

$$a_{43} B_{13} + B_{46} \geqslant P_4, \qquad (8)$$

$$a_{54} B_{14} + B_{55} \geqslant P_5, \qquad (9)$$

$$a_{64} B_{14} + B_{68} \geqslant P_6 \qquad (10)$$

и функцией цели **.

$$f = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{12} S_{ij} B_{ij}. \qquad (11)$$

Необходимо найти $\min f$ при ограничениях (1)—(10).

Левая часть неравенств (1), (6)—(10) представляет собой количество продукта ($i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$), получаемого всеми рассматриваемыми способами. Отсюда следует, что неравенства (1), (6)—(10) эквивалентны требованию выпуска i-го продукта в количестве, не меньшем, чем его потребность P_i.

Неравенство (1) характеризует объем выпуска уксусной кислоты с учетом затрат ее на производство уксусного ангидрида методом пиролиза. Затраты на производство уксусного ангидрида пиролизом кислоты определяются стоимостью последней, зависящей от метода получения. Поэтому необходимо вести величину B_{2j} (при $j_{9,\,10,\,11,\,12}$), которая характеризует объем выпуска ангидрида из кислоты, полученной по j-му способу (при $j_{1,\,2,\,3,\,4}$). Естественно, что B_{2j} ограничено общим количеством кислоты B_{1j}, полученной по j-му способу. Эти условия и содержатся в неравенствах (2)—(5).

Функция цели f (11) минимизирует затраты на производство P_i продуктов.

Эта задача линейного программирования по определению оптимальной структуры производства низкомолекулярных кислот и попутно получаемых продуктов на 1970 г. была решена на ЭЦВМ Урал-2 во Всесоюзном научно-исследов. институте нефтехимических процессов. Результаты решения в сопоставлении с условными данными проекта плана приведены в таблице.

Следует отметить, что в проекте плана имеет место неполное удовлетворение потребностей в уксусной, муравьиной, пропионовой кислотах и метилэтилкетоне. И даже в этом случае суммарные приведенные затраты по оптимальному варианту ниже на 8130 тыс. руб. или на 9,8%. С учетом дополнительных затрат на покрытие дефицита общая сумма приведенных затрат по плану увеличится на 12 400 тыс. руб. и составит 95 566 тыс. руб. Это больше, чем по оптимальному варианту, на 27,3%.

Отметим также, что по всем рассматриваемым методам типовые мощности установок, вырабатывающих одноименные продукты, соизмеримы. Поверочные расчеты показали, что полученный оптимальный план может быть реализован путем строительства установок типовой мощности с колебаниями производительности отдельной установки в пределах 5—6%. При таком незначительном изменении производительности установки можно пренебречь изменением технико-экономических показателей ее работы.

Достоинство предлагаемого метода определения оптимальной структуры производства в том, что результаты расчета не зависят от принятого метода распределения затрат между различными продуктами в комплексном производстве. Это становится возможным благодаря введению коэффицентов a_{ij}, так как при этом затраты относятся на 1 $т$ суммарного продукта. Если же модель включает стадию дальнейшей

* 1,347 — расход уксусной кислоты на производство 1 $т$ уксусного ангидрида.
** Для случаев комплексного производства принимается S_j.

Таблица

Наименование продуктов и методов производства	Обозначения	Данные (условные) проекта плана, тыс. т	Оптимальный (расчетный) вариант, тыс. т
Прямое окисление ацетальдегида: уксусная кислота	B_{11}	78,1	—
Окисление ацетальдегида по методу фирмы Спейшим:			
уксусная кислота	B_{12}	23,5	60,1
уксусный ангидрид	B_{22}	47,0	120,2
Окисление бензина:			
уксусная кислота	B_{13}	70,0	157,14
муравьиная »	B_{33}	14,9	33,1
пропионовая »	B_{43}	7,0	15,0
Окисление бутана:			
уксусная кислота	B_{14}	10	—
муравьиная »	B_{34}	0,112	—
метилэтилкетон	B_{54}	2,24	—
этилацетат	B_{64}	1,95	17
Метилэтилкетон из вторбутанола	B_{55}	—	8,0
Этилацетат из спирта и кислоты	B_{68}	8,0	—
Получение уксусного ангидрида пиролизом уксусной кислоты:			
из ацетальдегида	B_{29}	88,0	12,8
из бензина	$B_{2.11}$	—	
Суммарные приведенные затраты, тыс. руб.		83166	75036

переработки полученных продуктов, то выбор метода распределения затрат приобретает важное значение и становится самостоятельной проблемой.

При определении затрат на получение отдельных продуктов в условиях комплексного производства нами был применен наиболее простой — весовой метод распределения текущих и капитальных затрат.

Разработанная методика может быть применена не только при рассмотрении замкнутого круга химических и нефтехимических производств, но и применительно к отрасли в целом.

Поступила в редакцию
20 V 1966

ЗАДАЧА О РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТОЕВ (НЕСКОЛЬКО СМЕН)

В. Н. ШЕВЧЕНКО

(*Горький*)

В работе [1] была поставлена задача о нахождении максимальной комплексной производительности участка с n возможно взаимозаменяемыми станками, обрабатывающего m видов деталей в заданной пропорции, или, что почти то же самое, о минимизации времени T, необходимого для выполнения заданного плана. В [1] все виды деталей предполагаются однооперационными, т. е. каждая деталь обрабатывается на одном станке от начала до конца, так что порядок обработки деталей не существен. Работы [2—4] можно считать обобщением этой задачи на случай многооперационных деталей. В [5] введено следующее усложнение: предполагается, что каждый рабочий одновременно обслуживает только один станок, а число рабочих (полностью взаимозаменяемых) равно $n - k$, т. е. всегда простаивает не менее k станков $(0 \leqslant k < n)$. Можно минимизировать T при заданном k или наоборот, максимизировать k при заданном T. В задаче, рассматриваемой здесь, уже имеется s смен и в ν-ю смену $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ простаивает не менее k_ν станков $(0 \leqslant k_\nu < n)$. Предыдущая задача является частным случаем этой при $k_\nu = k$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$. С другой стороны, эта задача более проста, так как здесь в отличие от [2—5] все детали считаются однооперационными.

1°. Пусть $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$; $j \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$; задан план-вектор $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m) > 0$ и производительности $a_{ij} \geqslant 0$. Пусть t_{ij} обозначает время, которое i-й станок обрабатывает детали j-го вида, а t_{i0} — время простоя i-го станка. Обозначим через $I(j)$ множество всех тех i, для которых $a_{ij} > 0$, а через $J(i)$ — всех j, для которых $a_{ij} > 0$. Считаем все $I(j)$ и $J(i)$ не пустыми. Тогда минимальное время T_0 выполнения плана P и неизвестные t_{ij} находятся из следующей задачи L линейного программирования.

Найти $\min T = T_0$ при условиях

$$\left.\begin{aligned} &t_{i0} + \sum_{j \in J(i)} t_{ij} - T = 0, \qquad i \in N, \\ &\sum_{i \in N} a_{ij} t_{ij} = p_j, \qquad j \in M, \\ &t_{ij} \geqslant 0, \qquad j = 0, \qquad j \in J(i), \qquad i \in N. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Рассмотрим какое-нибудь, не обязательно оптимальное, решение системы (1), и определим для него множество $\bar{J}(i)$ следующим образом.

$\bar{J}(i)$ содержит все те j, для которых $t_{ij} > 0$, в частности $j = 0 \in \bar{J}(i)$, если $t_{i0} > 0$. Тогда очевидно, что

$$\sum_{j \in \bar{J}(i)} t_{ij} = T, \qquad i \in N. \tag{2}$$

Назовем $r = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ *режимом*, если $j_i \in \bar{J}(i)$ $(i \in N)$. Тогда $\tau(r) = \tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — время, в течение которого 1-й станок обрабатывает деталь вида j_1, 2-й — вида j_2 и т. д.; наконец, n-й — j_n, причем «деталь вида 0» означает простой. Перенумеруем те i_μ, для которых $j_{i_\mu} = 0 - \mu = 1, 2, \ldots, h$. Назовем режим r B-режимом, если $h \geqslant k$. Пусть $\sum\limits_{j_i = j}$ означает суммирование по всем режимам, в которых $j_i = j$. Рассмотрим следующую систему относительно переменных $\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)$:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j_i = j} \tau(j_1, j_2, \ldots, j_n) = t_{ij}, \\ &\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n) \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \; j_i \in \bar{J}(i), \quad i \in N. \tag{3}$$

Она представляет собой n-мерную транспортную задачу — задачу T_{s-1} в обозначениях работы [6] — с нулевой линейной формой. Необходимым и достаточным условием существования ее решения является (см. [2] или [6]) $\sum\limits_{j \in J(i)} t_{ij} = T$ для всех $i \in N$, откуда следует, что по любому решению (1) всегда ввиду (2) нетрудно найти решение системы (3).

Назовем B-решением системы (3) такое ее решение, в котором $\tau(r) > 0$ только в том случае, если r — B-режим. В [5] приводится следующая теорема.

Теорема 1. *Чтобы система (3) имела B-решение, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{i \in N} t_{i0} \geqslant kT. \tag{4}$$

Замечание. Из доказательства теоремы 1 следует, что когда (4) выполняется как равенство, в B-решение системы (3) входят лишь такие режимы, для которых $h = k$, т. е. простои распределяются равномерно. Этим объясняется название статьи.

Следствие 1. Минимальное время выполнения заданного плана $(n - k)$ рабочими определяется из решения следующей задачи линейного программирования.

Найти $\min T$ при условиях:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i\in N} a_{ij}t_{ij} = p_j, \quad j\in M,\\ &t_{i0}+\sum_{j\in J(i)} t_{ij}-T=0, \quad i\in N,\\ &\sum_{i\in N} t_{i0}-kT\geqslant 0,\\ &t_{ij}\geqslant 0, \quad j=0, \quad j\in J(i), \quad i\in N. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Можно рассматривать задачу, обратную (5), т. е. искать $\max k$ при заданном $T (T\geqslant T_0)$.

Следствие 2. $\max k$ равняется целой части числа $T^{-1}\sum_{i\in N}\bar{t}_{i0}$, где $t_{i0} (i\in N)$ получено в результате решения следующей задачи линейного программирования:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i\in N} t_{i0} = \max \sum_{i\in N} t_{i0},\\ &\sum_{i\in N} a_{ij}t_{ij} = p_j, \quad j\in M,\\ &t_{i0}+\sum_{j\in J(i)} t_{ij}=T, \quad i\in N,\\ &t_{ij}\geqslant 0, \quad j=0, \quad j\in J(i), \quad i\in N. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

2. Пусть теперь заданы числа k_ν, α_ν ($\nu\in S=\{1, 2, \ldots, s\}$) такие, что $0\leqslant k_\nu<n$, k_ν — целые, $\alpha_\nu>0$ и $\sum_{\nu\in S}\alpha_\nu=1$. Пусть $\sum_{r\in R_\nu}\tau(r)=\alpha_\nu T$, где R_ν — множество режимов, используемых в ν-й смене. Режим r^ν, в котором простаивают не менее k_ν станков, будем называть B_ν-режимом. C-решением системы (3) назовем такое ее решение, в котором R_ν содержит только B_ν-режимы. Теперь можем сформулировать вытекающее из теоремы 1.

Следствие 3. Чтобы (3) имела C-решение, необходимо и достаточно, чтобы имела решение система

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu\in S} t_{ij}^\nu = t_{ij}, && \\ &\sum_{j\in \overline{J}(i)} t_{ij}^\nu = \alpha_\nu T, && i\in N,\\ &\sum_{i\in N} t_{i0}^\nu \geqslant k_\nu\alpha_\nu T && j\in \overline{J}(i),\\ &t_{ij}^\nu\geqslant 0 && \nu\in S. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь t_{ij}^ν — время ν-й смены, в течение которого i-й станок обрабатывает детали j-го вида.

Теорема 2 *. *Чтобы система (3) имела C-решение, необходимо и достаточно выполнение для любого подмножества S' множества S условия*

$$\sum_{i\in N}\min\left(t_{i0}, \sum_{\nu\in S'}\alpha_\nu T\right)\geqslant T\sum_{\nu\in S'}k_\nu\alpha_\nu. \tag{8}$$

Утверждение теоремы 2 будет вытекать из доказываемых ниже лемм.

---

* Этот результат аналогичен теореме Гейла [7, стр. 92] в теории транспортных сетей.

Лемма 1. *Система*

$$\sum_{\nu\in S} x_{i\nu} = \alpha_i, \quad 0 \leqslant x_{i\nu} \leqslant \beta_{i\nu}, \quad i \in N, \quad \nu \in S \tag{9}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant \sum_{\nu\in S} \beta_{i\nu}. \tag{10}$$

Необходимость следует из $0 \leqslant \sum_{\nu\in S} x_{i\nu} = \alpha_i = \sum_{\nu\in S} \beta_{i\nu}$. Пусть выполнено (10), тогда найдется такое $\bar\nu \leqslant s$, что

$$\min\left(\alpha_i, \sum_{\mu=1}^{\bar\nu} \beta_{i\mu}\right) = \alpha_i, \quad \text{а} \quad \min\left(\alpha_i, \sum_{\mu=1}^{\bar\nu-1} \beta_{i\mu}\right) = \sum_{\mu=1}^{\bar\nu-1} \beta_{i\mu}.$$

Нетрудно проверить теперь, что

$$x_{i\mu} = \begin{cases} \beta_{i\mu} & \text{при } 1 \leqslant \mu < \bar\nu, \\ \alpha_i - \sum\limits_{\mu=1}^{\bar\nu-1} \beta_{i\mu} & \text{при } \mu = \bar\nu, \\ 0 & \text{при } \bar\nu < \mu \leqslant s \end{cases}$$

есть решение (9).

Рассмотрим следующие системы:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i\in N} x_{i\nu} = b_\nu, \\ &\sum_{\nu\in S} x_{i\nu} \leqslant a_i, \\ &0 \leqslant x_{i\nu} \leqslant c_{i\nu} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} i \in N, \\ \nu \in S \end{matrix} \qquad (11) \qquad \left.\begin{aligned} &\sum_{i\in N} z_{i\nu} \geqslant b_\nu, \\ &\sum_{\nu\in S} z_{i\nu} = a_i \\ &0 \leqslant z_{i\nu} \leqslant c_{i\nu} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} i \in N, \\ \nu \in S. \end{matrix} \tag{12}$$

Относительно них имеет место лемма 2.

Лемма 2. *Если* $a_i \leqslant \sum_{\nu\in S} c_{i\nu}$ *и* $b_\nu \geqslant 0$, *то системы (11) и (12) одновременно имеют или не имеют решения.*

Пусть (11) имеет решение. Обозначим через $x_{is+1} = a_i - \sum_{\nu\in S} x_{i\nu}$. Система

$$\sum_{\nu\in S} y_{i\nu} = x_{is+1}, \quad 0 \leqslant y_{i\nu} \leqslant c_{i\nu} - x_{i\nu}$$

имеет в силу леммы 1 решение, так как

$$0 \leqslant x_{is+1} = a_i - \sum_{\nu\in S} x_{i\nu} \leqslant \sum_{\nu\in S} (c_{i\nu} - x_{i\nu}).$$

Нетрудно проверить, что $z_{i\nu} = x_{i\nu} + y_{i\nu}$ $(i \in N, \ \nu \in S)$ есть решение (12).

Аналогично, обозначив через $z_{n+1\nu} = \sum_{i\in N} z_{i\nu} - b_\nu$, где $z_{i\nu}$ — решение (12), убедимся, что имеет решение система

$$\sum_{i\in N} y_{i\nu} = z_{n+1\nu}, \quad 0 \leqslant y_{i\nu} \leqslant z_{i\nu}, \text{ так как } 0 \leqslant \sum_{i\in N} y_{i\nu} = z_{n+1\nu} \leqslant \sum_{i\in N} z_{i\nu}.$$

Тогда $x_{i\nu} = z_{i\nu} - y_{i\nu}$ есть решение (11), что и требовалось.

Приведем теперь следующий из теоремы Гейла [7, стр. 92] результат относительно системы (11). Пусть $a_i \geqslant 0$, $b_\nu \geqslant 0$, $c_{i\nu} \geqslant 0$ $(i \in N, \nu \in S)$.

Лемма 3. *Чтобы система (11) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого подмножества S' множества S выполнялось условие*

$$\sum_{i\in N}\min\left\{a_i, \sum_{\nu\in S'} c_{i\nu}\right\}\geqslant \sum_{\nu\in S'} b_\nu. \qquad (13)^*$$

Рассмотрим системы:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i\in N} t_{i0}^\nu \geqslant k_\nu\alpha_\nu T,\\ &\sum_{\nu\in S} t_{i0}^\nu = t_{i0},\\ &0\leqslant t_{i0}^\nu\leqslant \alpha_\nu T\end{aligned}\right\}\ \begin{matrix} i\in N,\\ \nu\in S\end{matrix} \qquad (14) \qquad \left.\begin{aligned}&\sum_{\nu\in s} t_{ij}^\nu = t_{ij},\\ &\sum_{j\in J(i)} t_{ij}^\nu = \alpha_\nu T - t_{i0}^\nu,\\ &t_{ij}^\nu\geqslant 0,\end{aligned}\right\}\ \begin{matrix} i\in N,\\ j\in J(i),\\ \nu\in S.\end{matrix} \qquad (15)$$

Так как $t_{i0}\geqslant 0$, $\alpha_\nu T\geqslant 0$, $k_\nu\alpha_\nu T\geqslant 0$, $t_{i0}\leqslant \sum_{\nu\in S}\alpha_\nu T = T$, то в силу лемм 2 и 3 условие (8) является необходимым и достаточным для того, чтобы (14) имела решение. Так как $t_{ij}\geqslant 0$,

$$\alpha_\nu T - t_{i0}{}^\nu\geqslant 0, \qquad \sum_{j\in J(i)} t_{ij} = \sum_{\nu\in S}(\alpha_\nu T - t_{i0}{}^\nu),$$

то система (15) представляет условия транспортной задачи со сбалансированным «спросом» и «предложением» и потому имеет решение. Воспользовавшись следствием 3, получим доказательство теоремы 2.

Рассмотрим подробнее важный для приложений случай $s = 2$. Условия (8) дают

$$\sum_{i\in N} t_{i0}\geqslant T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) \qquad \text{при } S' = \{1, 2\},$$

$$\sum_{i\in N}\min(t_{i0}, \alpha_1 T)\geqslant k_1\alpha_1 T \qquad \text{при } S' = \{1\},$$

$$\sum_{i\in N}\min(t_{i0}, \alpha_2 T)\geqslant k_2\alpha_2 T \qquad \text{при } S' = \{2\}.$$

Пусть $\bar t_{ij}$ ($j = 0$, $j\in J(i)$, $i\in N$) — решение задачи (12) при каком-то $T\geqslant T_0$. Часто оказывается важным максимизировать k_2, т. е. минимизировать число рабочих во второй смене, не уменьшая $\sum_{i\in N}\bar t_{i0}$ и не увеличивая T. Для этого, по доказанному, достаточно положить $t_{i0}{}^2 = \min(\bar t_{i0}, \alpha_2 T)$, $t_{i0}{}^1 = \bar t_{i0} - t_{i0}{}^2$ получить $t_{ij}{}^\nu$ из (15) и найти C-решение задачи (3), где k_ν равно целой части числа $T^{-1}\sum_{i\in N} t_{i0}{}^\nu (\nu = 1, 2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. Математические методы в организации и планировании производства. Л., Изд-во ЛГУ, 1939.
2. Ю. В. Глебский, В. Н. Шевченко. О составлении оптимального графика работ. В сб. Проблемы кибернетики, вып. 10, М., Физматгиз, 1963.
3. Ю. В. Глебский, В. Н. Шевченко. О составлении оптимального расписания работы на n станках. В сб. Труды по вопросам применения ЭВМ в народном хозяйстве (Горьковский исследовательский физико-технический институт; Научно-техническое общество радиотехники и электросвязи им. А. С. Попова, Горьковское правление). Горький, 1964.
4. Ю. В. Глебский, В. Н. Шевченко. О составлении оптимального плана работ. В сб. Научные труды Московского инженерно-экономического института, вып. 20. М., 1964.
5. В. Н. Шевченко. Задача оптимального календарного планирования с ограничением на число рабочих. Изв. вузов, Радиофизика, 1965, т. VIII, № 3 (Изд. Горьковск. гос. ун-та).
6. Б. С. Верховский. Симметричные многоиндексные транспортные задачи. В сб. Проблемы оптимального планирования, проектирования и управления производством. М., Изд-во МГУ, 1963.
7. К. Берж. Теория графов и ее применения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила в редакцию
15 X 1965

* В [7, стр. 251] этот результат приводится с опечаткой: вместо «min» стоит «max».