ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2021, том 57, № 3, с. 17–31

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Метод оценки результатов функционирования иерархических социально-экономических систем на основе агрегированной производственной функции

Р.А. Жуков,
Финансовый университет при Правительстве РФ (Тульский филиал), Тула; e-mail: pluszh@mail.ru

Поступила в редакцию 22.12.2020

Аннотация. В статье представлен метод, развивающий методологию оценки функционирования иерархических социально-экономических систем. Методология включает формализованное описание объекта исследования и конструирование частных и интегральных показателей результативности. Показатели результативности вычисляются с использованием производственных функций. В основе метода лежит алгоритм построения агрегированной производственной функции, с ее помощью вычисляется нормативное (ожидаемое) значение результата функционирования объекта исследования. На примере регионов ЦФО по данным за 2007–2016 гг. проведены тестирование и сравнительный анализ четырех алгоритмов оценки параметров агрегированной производственной функции при построении интегрального показателя. В качестве результативных признаков выбраны объемы валового регионального продукта для разделов по ОКВЭД (C, D и E). Научная новизна исследования заключается в следующем. Предложены и апробированы три алгоритма построения плотности распределения агрегированной случайной величины, являющейся комбинацией остатков из эконометрических уравнений, которые описывают частные результаты функционирования элементов иерархической социально-экономической системы. Плотность распределения используется для поиска параметров агрегированной производственной функции. Для двумерного случая получено аналитическое выражение соответствующей плотности распределения вероятностей. Обоснован вывод о возможности применения метода для оценки результатов функционирования иерархических социально-экономических систем.

Ключевые слова: социально-экономическая система, иерархия, классификация, интегральный индикатор, производственная функция, оценка, плотность вероятности.

Классификация JEL: C10, C43, P25, R11, R15.

DOI: 10.31857/S042473880016428-9

1. ВВЕДЕНИЕ

Оценка состояния регионов, особенностей их функционирования, устойчивости к воздействию внешних негативных факторов требует развития действующих подходов, построения уточненных или создания новых моделей. Регион можно рассматривать как иерархическую социально-экономическую систему (ИСЭС). Изучение функционирования ИСЭС и ее элементов может быть осуществлено через призму их признаковых описаний. Выбор описаний зависит от принятой системы взглядов субъекта исследования, а также от экспертных заключений относительно объекта и предмета исследования (Айвазян, 2012).

Индикатор оценки, который является количественным отражением цели, должен учитывать соответствие полученного результата и норматива, например показатель технической эффективности (Айвазян, Афанасьев, 2014). В рамках исследования представлено развитие авторской методологии оценки результатов функционирования сложных систем (Жуков, 2019б), базирующейся на построении агрегированной производственной функции для подсистем ИСЭС.

Цель исследования — разработка метода оценки результатов функционирования ИСЭС и параметров агрегированной производственной функции, которая используется при вычислении соответствующих индикаторов оценки. Основными задачами исследования являются:

1) построение алгоритмов оценки параметров производственных функций (ПФ) и агрегированной производственной функции (АПФ) с применением плотности распределения вероятностей;

2) тестирование метода и вычисление интегральных показателей результатов функционирования подсистем ИСЭС на примере областей Центрального федерального округа (ЦФО) с использованием ПФ и АПФ.

2. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Теория и методология построения иерархических структур базируется на работах (Месарович, Мако, Такахара, 1973; Саати, 1993), а описание иерархии может быть осуществлено, например, с системных позиций (Клейнер, 2015).

Многообразие подходов к изучению систем определяет множественность их классификаций (например, классификация по разделам ОКВЭД, секторальная классификация (Колесников, Толстогузов, 2016), пространственно-временная классификация (Клейнер, 2016)).

Выбор признаков и индикаторов оценки для изучения ИСЭС, в том числе на региональном уровне, в большинстве случаев определяется самим автором либо в соответствии с принятыми и признанными индикаторами оценки объекта исследования (Айвазян, Афанасьев, Кудров, 2016). При этом используют абсолютные и относительные характеристики, темпы роста и т.п.

Для интегральной оценки функционирования ИСЭС применяют:

1) методы усреднения частных индикаторов;

2) метод анализа среды функционирования (Кривоножко, Лычев, 2010);

3) компонентный анализ (Макаров и др., 2014; Айвазян, Афанасьев, Кудров, 2018; и др.).

Для оценки результатов функционирования ИСЭС используют модели различной функциональной формы (Sayaria, Saria, Hammoudehb, 2018; Макаров и др., 2016; Афанасьев, Воронцов, 2018; Афанасьев, Пономарева, 2020), а для оценки параметров модели — ряд методов, среди которых обычный (OLS) и обобщенный методы наименьших квадратов (GLS), а также метод максимального правдоподобия (MLE), последний из которых, в рамках исследования, представляет особый интерес.

3. МЕТОДОЛОГИЯ И ДАННЫЕ

В качестве исходной методологии применяется авторская методология оценки результатов функционирования иерархических социально-экономических систем, включающая в себя формализованное описание ИСЭС и конструирование частных и интегральных показателей результативности, эффективности и гармоничности (Жуков, 2019а). Некоторые ее приложения отражены в ряде работ, например (Жуков, 2020б; Zhukov et al., 2019).

В рамках исследования будем рассматривать только один уровень ИСЭС — региональный. Под элементом региона k будем понимать совокупность экономических единиц — институциональных единиц–резидентов региона (в терминологии СНС), деятельность которых соответствует одному из разделов ОКВЭД.

Под подсистемой будем понимать совокупность элементов, сгруппированных в соответствии с возможными классификациями:

- пространственно-временная (объект, среда, процесс, проект);
- секторальная (сырьевой сектор, сектор обрабатывающих производств и т.д.);
- местоположения (согласно административно-территориальному делению) и т.д.

Примером пространственно-временной классификации может служить совокупность элементов, которые формируют результаты экономической деятельности по разделам C, D и E и входят в состав объектной региональной подсистемы (Клейнер, Рыбачук, 2019, с. 313).

Пусть каждая подсистема k ИСЭС имеет набор признаков 3 типов:

1) *результативный признак* $y_{i,k}(t)$ — фактический результат функционирования подсистемы в период времени t, $t=1,\dots,T$, T — число периодов, $i=1,\dots,I$, I — число результативных признаков,

совпадающее с числом элементов, входящих в состав подсистемы. В качестве результативных признаков выбраны объемы валового регионального продукта (ВРП) для разделов по ОКВЭД (C, D и E);

2) *факторный признак* $x_{i,j,k}(t)$ — условия функционирования подсистемы, $j = 1, \ldots, J$; J — число факторов. Условия функционирования являются существенными факторами производства, обеспечивающими деятельность подсистемы (например, основные фонды и численность занятых);

3) *нормативный признак* $\hat{y}_{i,k}(t)$ — нормативный (эталонный, ожидаемый) результат функционирования подсистемы. Существует неслучайная функция f, которая для каждой подсистемы k каждому набору значений $x_{i,j,k}(t)$ ставит в соответствие $\hat{y}_{i,k}(t)$:

$$\hat{y}_{i,k}(t) = f\,(x_{i,1,k}(t), \ldots, x_{i,j,k}(t), \ldots, x_{i,J,k}(t)). \tag{1}$$

Примером может служить степенная мультипликативная двухфакторная функция, связывающая объем ВРП со стоимостью основных фондов и среднегодовой численностью занятых для соответствующего раздела ОКВЭД.

Если рассматривать значения признаков как возможные значения случайных величин y_i, $x_{i,j}$, то связь между результативными и нормативными признаками можно представить в виде эконометрического уравнения

$$y_i = \hat{y}_i + \varepsilon_i, \tag{2}$$

где ε_i — стохастические случайные составляющие, которые в первом приближении будем считать нормальными случайными величинами.

Для оценки результата функционирования в качестве частного показателя результативности будем использовать индикатор ξ_i, значения которого для подсистемы k в период t определяются по формуле

$$\xi_{i,k}(t) = y^0_{i,k}(t) \,/\, \hat{y}^0_{i,k}(t), \tag{3}$$

$$y^0_{i,k}(t) = \frac{y^*_{i,k}(t) - \min\{y^*_{i,k}(t), \hat{y}^*_{i,k}(t)\}}{\max\{y^*_{i,k}(t), \hat{y}^*_{i,k}(t)\} - \min\{y^*_{i,k}(t), \hat{y}^*_{i,k}(t)\}}, \tag{4}$$

$$\hat{y}^0_{i,k}(t) = \frac{\hat{y}^*_{i,k}(t) - \min\{y^*_{i,k}(t), \hat{y}^*_{i,k}(t)\}}{\max\{y^*_{i,k}(t), \hat{y}^*_{i,k}(t)\} - \min\{y^*_{i,k}(t), \hat{y}^*_{i,k}(t)\}}. \tag{5}$$

$$y^*_{k,i}(t) = \left(y_{k,i} - M(y_i(t))\right) / \sigma(y_i(t)), \tag{6}$$

$$\hat{y}^*_{k,i}(t) = \left(\hat{y}_{k,i} - M(\hat{y}_i(t))\right) / \sigma(\hat{y}_i(t)), \tag{7}$$

где «*» обозначает, что величины приведены к стандартизованному виду, «0» — что значения приведены к шкале от 0 до 1; $M(y_i(t))$, $M(\hat{y}_i(t))$, $\sigma(y_i(t))$, $\sigma(\hat{y}_i(t))$ — соответствующие средние значения и стандартные отклонения.

Отметим, что формулы (4)–(5) основаны на унифицированном преобразовании (Айвазян, 2012, с. 84). Однако у нас используются стандартизованные переменные, а минимальное и максимальное значения переменных определяются из набора, образованного и фактическими, и нормативными значениями стандартизованных переменных.

Для совокупности из I элементов, $i = 1, \ldots, I$, относящихся к одной подсистеме, определим интегральный (обобщенный) показатель результативности ξ, который учитывает взаимное влияние совокупности элементов и значения которого могут быть вычислены по формуле

$$\xi_k(t) = \frac{y^0_k(t)}{\hat{y}^0_k(t)} = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I}\sum_{i_2=1}^{I} r_{i_1,i_2}\, y^0_{i_1,k}(t)\, y^0_{i_2,k}(t)} \,\Big/ \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I}\sum_{i_2=1}^{I} \hat{r}_{i_1,i_2}\, \hat{y}^0_{i_1,k}(t)\, \hat{y}^0_{i_2,k}(t)}, \tag{8}$$

где r_{i_1,i_2}, $\hat{r}_{i_1,i_2}$ — соответствующие значения парного коэффициента корреляции Пирсона между переменными $y^0_{i_1}$, $\hat{y}^0_{i_1}$ и $y^0_{i_2}$, $\hat{y}^0_{i_2}$ $(i_1, i_2 = 1, \ldots, I)$, $y^0_k(t)$, $\hat{y}^0_k(t)$,— обобщенные фактические и нормативные значения результата функционирования подсистемы ИСЭС. Примером может служить оценка результатов функционирования совокупности хозяйствующих субъектов в Тульской области ЦФО по видам деятельности C, D и E в целом.

Если значения индикаторов ξ_i или/и ξ больше или равны единице, можно считать, что результаты функционирования элемента (подсистемы) будут удовлетворительными.

Значение, стоящее в знаменателе выражения (3), вычисляется с использованием формулы (2), имеющей смысл производственной функции. Тогда стоящее в знаменателе значение выражения (8) является значением, полученным из преобразованной комбинации ПФ, которую будем называть агрегированной ПФ (АПФ). Для того чтобы вычислить значения интегрального показателя результативности, необходимо оценить параметры АПФ.

Задача поиска параметров АПФ ставится следующим образом (Жуков, 2020a).

Пусть имеется совокупность случайных величин y_i, характеризующих частные результаты функционирования подсистемы k в периоды времени t. Будем рассматривать объединенную по k и t выборку. Перепишем формулу (2) в виде

$$y_i = f_i(C_{i,j}, x_{i,j}) + \varepsilon_i, \tag{9}$$

где i — индекс случайной величины ($i = 1, \ldots, m \in \mathrm{N}$), m — число результативных признаков, $C_{i,j}$ — параметры функций $f_i(\cdot) = \hat{y}_i$, ε_i — стохастические составляющие. В рамках исследования будем считать, что ε_i — нормально распределенные случайные величины (с.в.), $N(0; \sigma^2_{\varepsilon_i})$, а дисперсия $\sigma^2_{\varepsilon_i}$ предполагается неизвестной.

Тогда плотность распределения вероятностей ε^*, являющейся комбинацией ε^*_i, можно получить, воспользовавшись операцией свертки

$$f_P(\varepsilon^*) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{\Delta}} \frac{d}{dy^*} \int\int \ldots \int_D \exp\left[-\frac{1}{2\Delta} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} A_{i,j} \varepsilon^*_i \varepsilon^*_j\right] dD, \tag{10}$$

где Δ и $A_{i,j}$ — определитель и алгебраические дополнения корреляционной матрицы $\left\| r_{ij} \right\|$, элементами которой служат парные коэффициенты корреляции;

$$\varepsilon^*_i = (y^*_i - \hat{y}^*_i)^2 / (2\sigma^2_{y^*_i}); \tag{11}$$

D зависит от комбинации ε^*_i и, соответственно, y^* (комбинация y^*_i); $\sigma^2_{y^*_i}$ — дисперсия y^*_i.

Поскольку каждый из частных результатов функционирования подсистемы $y_{i,k}(t)$ представляется в абсолютных значениях, то для исключения влияния размерности (единиц измерения) целесообразно применять стандартизованные величины.

Оценку параметров АПФ можно осуществить двумя способами. Первый — предполагает поиск коэффициентов $\hat{y}_i$ по отдельности с помощью, например, OLS. Второй заключается в использовании MLE, где максимизируемая логарифмическая функция правдоподобия $\ln L(y^* \left| C^*_{i,j}, x^*_{i,j}(t), \sigma_{y*}\right.)$ составляется на основе (10):

$$\ln L(y^* \left| C^*_{i,j}, x^*_{i,j}(t), \sigma_{y*}\right.) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T} f(y^* \left| C^*_{i,j}, x^*_{i,j}(t), \sigma_{y*}\right.) \to \max. \tag{12}$$

Максимум (12) ищется по набору $C^*_{i,j}$ (параметры стандартизованной ПФ i) и σ_{y*}.

В общем случае уравнение может иметь несколько решений, которые определяются выбором начальной точки, т.е. первоначальных значений $C^*_{i,j}$. При этом в силу специфики плотности вероятности с.в. ε^* (математическое ожидание и наиболее вероятное значение не совпадают) можно ввести критерий, ограничивающий изменение $C^*_{i,j}$. В качестве первоначальных значений целесообразно выбрать $C^*_{i,j}$ из решений, полученных при поиске параметров моделей f_i $(C^*_{i,j}, x^*_{i,j}(t))$. Ограничением может выступать условие

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon^*_k(t))^2 \le \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon^*_k(t))^2_{[part]}, \tag{13}$$

где $\varepsilon^*_k(t)$ — значения случайной величины ε^* (остатки), вычисленные с помощью $C^*_{i,j}$, найденных по (12); [part] — остатки, вычисленные с использованием $C^*_{i,j[part]}$, определенных по (9).

Тогда алгоритм поиска параметров моделей функционирования ИСЭС будет состоять из этапов:

1) определение параметров моделей $C^*_{i,j[part]}$ для вычисления каждого из частных показателей результативности отдельно;

2) вычисление суммы квадратов остатков для интегрального показателя результативности $\sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon^*_{k[part]}(t))^2$ с использованием $C^*_{i,j[part]}$;

3) формирование логарифмической функции правдоподобия (12) для с.в. ε^*, имеющей плотность вероятности $f_p(\varepsilon^*)$ (10);

4) установка первоначальных значений параметров моделей $C^*_{i,j[part]}$;

5) нахождение параметров модели $C^*_{i,j}$ из решения задачи поиска максимума $\ln L(y^* \left| C^*_{i,j}, x^*_{i,j}(t), \sigma_{y^*}\right.)$ при наличии ограничения (13).

Представленный алгоритм может применяться для уточнения параметров моделей, используемых при формировании частных и интегрального показателей результативности, определяемых по (3) и (8) соответственно.

В качестве ПФ для формирования нормативов и тестирования подхода к оценке параметров АПФ были выбраны модели степенного мультипликативного вида, аналогичные функциональной форме модели Кобба–Дугласа, поскольку они хорошо себя зарекомендовали при изучении процессов на мезоуровне, к которому и относятся регионы:

$$\hat{y}_i = C_{i,0} x_{i,1}^{C_{i,1}} x_{i,2}^{C_{i,2}}, \tag{14}$$

где $\hat{y}_i$ — объем ВРП по виду i экономической деятельности; $x_{i,1}$ — стоимость основных фондов по полной учетной стоимости на конец года по виду i экономической деятельности (млн руб.); $x_{i,2}$ — среднегодовая численность занятых по виду i экономической деятельности (тыс. человек). Причем все значения признаков рассмотрены для каждой из 17 областей Центрального федерального округа (ЦФО) в период времени t. Стоимостные показатели были скорректированы на уровень инфляции[1] и приведены к 2007 г.:

$$(\cdot)_t = (\cdot) / \prod_{i=1}^{t} \left(1 + \pi_i / 100\right)^i, \tag{15}$$

где $(\cdot)_t$ — значение скорректированного показателя $(\cdot)$ в период t; π_i — уровень инфляции в периоде i,%; $i = 1$ соответствует 2008 г. Стоимость основных фондов была дополнительно скорректирована на паритет покупательной способности[2] (российских рублей к 1 долл США):

$$(\cdot)_t = (\cdot) \prod_{i=1}^{t} \left(1 + PPP_i / 100\right) / PPP_i, \tag{16}$$

где $(\cdot)_t$ — значение скорректированного показателя $(\cdot)$ в период t; PPP_i — паритет покупательной способности (рубли к долларам США) в периоде i,%; $i = 1$ соответствует 2007 г.

Информационной базой исследования явились данные Росстата для регионов ЦФО за 2007–2016 гг.[3,4] (170 наблюдений) по видам экономической деятельности (разделы ОКВЭД): «C. Добыча полезных ископаемых», «D. Обрабатывающие производства», «E. Производство и распределение электроэнергии, газа и воды»).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

4.1. Плотность распределения агрегированной случайной величины. Случаи для 2, 3 и *m*- переменных

Для оценки параметров АПФ построим агрегированную случайную величину и соответствующую ей плотность распределения вероятностей.

Пусть имеются K подсистем, $k = 1, ..., K$ и набор из двух признаков (y_1^* и y_2^*), представляющих стандартизованные с.в., значения которых характеризуют частные результаты функционирования подсистемы k. Будем считать, что они подчиняются нормальному закону распределения $N(0;1)$. К такому выводу можно прийти, воспользовавшись формулой монотонного преобразования ε_i^* из (9).

---

[1] Инфляция по данным Росстата (https://rosinfostat.ru/inflyatsiya/).

[2] Паритет покупательной способности по данным Росстата (https://www.fedstat.ru/indicator/40707).

[3] Регионы России. Социально-экономические показатели: Статистический сборник. Росстат (https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13204).

[4] Труд и занятость в России: Статистический сборник. Росстат (http://old.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1139916801766).

Тогда обобщенный результат функционирования таких подсистем может быть определен с.в. $y^{*+} \geq 0$ по формуле:

$$y^{*+} = +\sqrt{(y_1^*)^2 + 2ry_1^* y_2^* + (y_2^*)^2}, \tag{17}$$

где y_1^* и y_2^* имеют совместную плотность вероятности

$$f_P(y_1^*, y_2^*) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}((y_1^*)^2 - 2ry_1^* y_2^* + (y_2^*)^2)\right], \tag{18}$$

r — парный коэффициент корреляции. Тогда плотность вероятности $y^{*+} \geq 0$ будет выражаться формулой

$$f_P(y^{*+}) = \frac{y^{*+}}{1-r^2} \exp\left[-\frac{1+r^2}{2(1-r^2)^2}(y^{*+})^2\right] I_0\left(\frac{r}{(1-r^2)^2}(y^{*+})^2\right), \tag{19}$$

где $I_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Замечание. В случае рассмотрения с.в. $y^* \in (-\infty; \infty)$ плотность вероятности (в формуле (19) вместо y^{+*} будет стоять $|y^*|$) является симметричной относительно оси ординат и имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию $(1+r^2)$, а вид ее левой и правой частей совпадает с видом плотности вероятности $f_P(y^{*+})$ (рис. 1а). На рисунке видно, что при увеличении значения коэффициента корреляции абсцисса вершины кривой (наиболее вероятное значение) смещается к 0.

Непосредственное интегрирование соотношения (19) от 0 до $+\infty$ показывает, что значение интеграла равно 1 и, следовательно, удовлетворяется одно из условий для функции распределения $F(y^{+*})$ y^* (рис. 1б), которая равна 0 при $y^{+*} = 0$ и является монотонно возрастающей.

Для трех с.в. плотность вероятности и соответствующую ее функцию можно построить с помощью численного интегрирования выражения (10) (рис. 1в).

В m-мерном случае при построении плотности вероятности вида (10) следует воспользоваться следующим алгоритмом.

1. Привести область интегрирования к каноническому виду с помощью метода Лагранжа и сделать замену переменных.

2. Перейти к m-мерным сферическим координатам.

3. Взять производную по y^*.

4. Численно проинтегрировать полученное выражение по угловым переменным. Переход к сферическим координатам обусловлен исключением необходимости дополнительного исследования поведения функции в особых точках, при которых знаменатель в выражении (10) обращается в 0.

4.2. Оценка параметров АПФ с двумя переменными

Для оценки параметров моделей были использованы авторская экспертная система «ЭФРА»[5] и MathLab2018b. На первом этапе в результате применения МНК были получены выражения:

$$\hat{y}_1 = \underset{(0{,}0000)}{40790} \times \underset{(0{,}0000)}{x_{1,1}^{0,662}} \times \underset{(0{,}0005)}{x_{1,2}^{0,392}} \quad (R^2 = 0{,}892, \quad \nu = 167); \tag{20}$$

$$\hat{y}_2 = \underset{(0{,}0000)}{20156} \times \underset{(0{,}0000)}{x_{2,1}^{0,765}} \times \underset{(0{,}0001)}{x_{2,2}^{0,261}} \quad (R^2 = 0{,}928, \quad \nu = 167); \tag{21}$$

$$\hat{y}_3 = \underset{(0{,}0000)}{19996} \times \underset{(0{,}0000)}{x_{3,1}^{0,492}} \times \underset{(0{,}0000)}{x_{3,2}^{0,744}} \quad (R^2 = 0{,}941, \quad \nu = 167). \tag{22}$$

Здесь $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$, $\hat{y}_3$ — объем ВРП по видам экономической деятельности, разделы C (B), D (C) и E (D, E) соответственно (в скобках обозначение по ОКВЭД 2); $x_{1,1}$, $x_{2,1}$, $x_{3,1}$ и $x_{1,2}$, $x_{2,2}$, $x_{3,2}$ — стоимость основных фондов и среднегодовая численность занятых по соответствующим ОКВЭД; R^2 — коэффициент детерминации, ν — число степеней свободы; $(\cdot)$ — достигнутый уровень значимости (p-value) при проверке гипотезы H_0: $C_{i,j} = 0$.

Тестирование остатков на уровне значимости 5% показало следующие результаты. Проверка на равенство 0 математического ожидания ряда остатков (данные рассматривались как обычная

[5] Жуков Р.А. «Программный комплекс для оценки функционирования сложных систем и принятия решений “ЭФРА” (“EFRA”)». Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU2020614151, 26.03.2020. Заявка № 2020613181 от 16.03.2020.

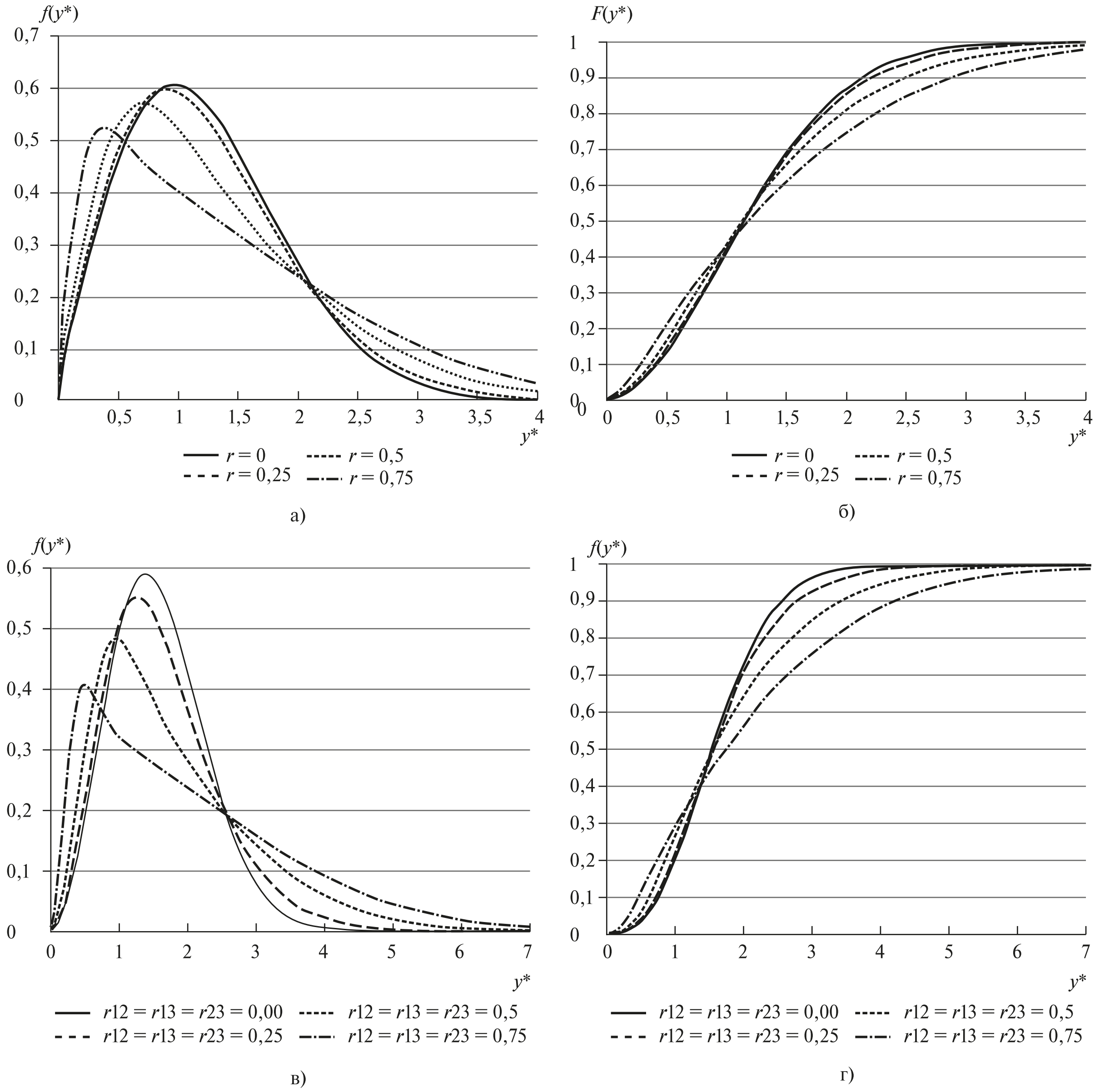

Рис. 1. Плотность вероятности $f_p(y^*) = f_p(y^{*+})$ для двух (а) и трех (в) переменных и функция распределения вероятностей $F(y^*) = F(y^{*+})$ для двух (б) и трех (г) переменных для некоторых значений r, r_{12}, r_{13}, r_{23}

статистическая выборка) по критерию Стьюдента подтвердила, что гипотезу можно принять, а тест на случайность, основанный на поворотных точках,— что остатки случайны. Тест на автокорреляцию по критерию Дарбина–Уотсона (DW-критерий) ($DW_C = 1{,}9191$; $DW_D = 1{,}6083$; $DW_E = 1{,}9991$ при критических значениях границ $DW_L = 1{,}63$, $DWu = 1{,}73$) выявил отсутствие автокорреляции для разделов C и E (D — попал в область неопределенности). Проверка на гомоскедастичность по критерию Спирмена не обнаружила гетероскедастичности в остатках. R/S-критерий ($R/S_C = 5{,}1507$; $R/S_D = 5{,}9135$; $R/S_E = 5{,}4564$ — критические значения для $n = 100$ $R/S_L = 4{,}31$ и $R/S_U = 5{,}90$ соответственно, при увеличении n вилка увеличивается) подтвердил, что остатки обладают свойством гомоскедастичности.

Замечание. При подстановке фактических и нормативных значений в абсолютных единицах измерения в формулы (4) и (5) для каждого года по отдельности можно наблюдать, что такое распределение не является нормальным (например, для раздела «C. Добыча полезных ископаемых»). Однако в рамках исследования выборка бралась не как выборка по панельным данным, а как статистическая выборка для всех периодов одновременно. К тому же рассматривались с.в. вида $y - \hat{y}$,

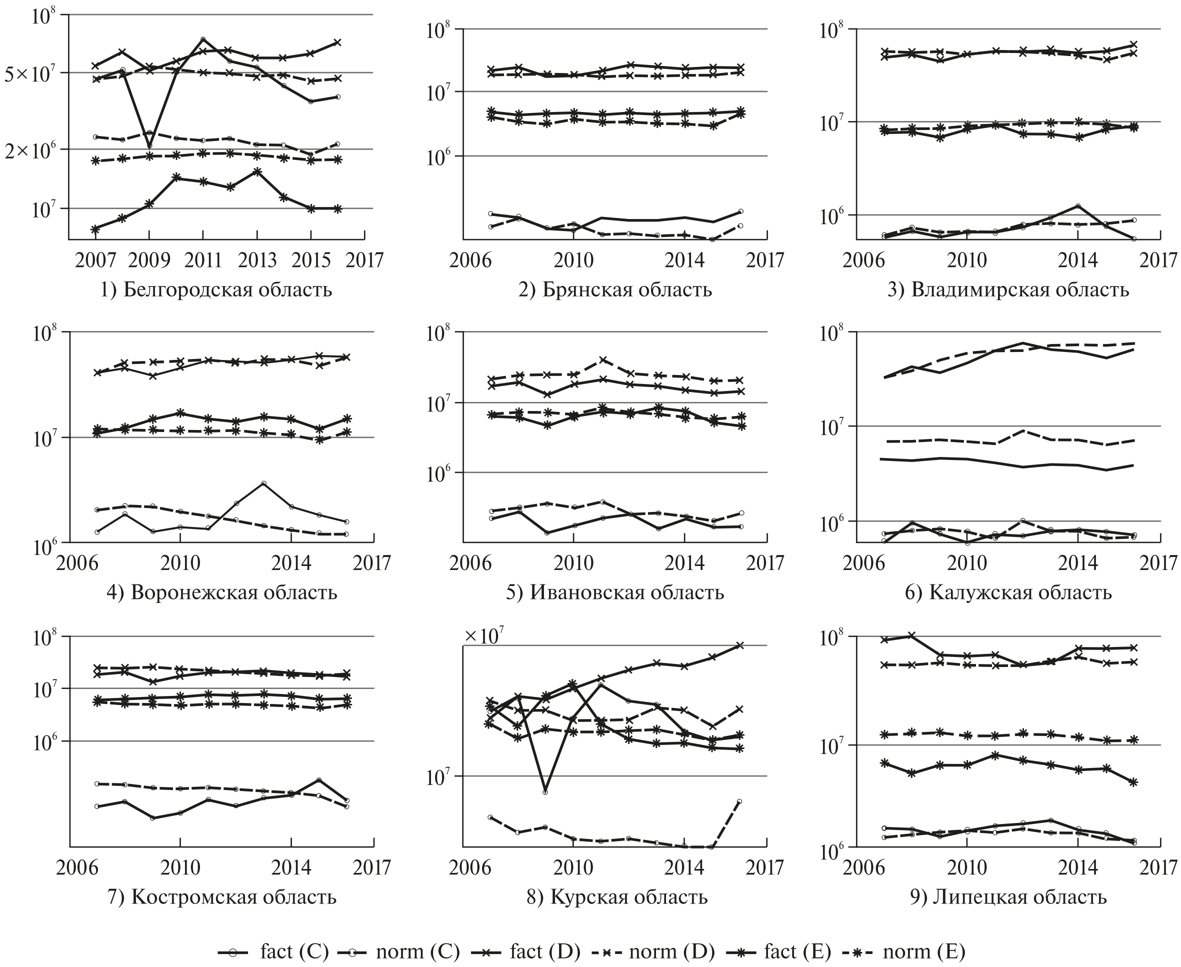

Рис. 2. Фактические (fact) и нормативные (norm) значения объема ВРП по видам экономической деятельности C, D и E для областей ЦФО (Белгородская — Липецкая области)

где $\widehat{y}$ имеет смысл математического ожидания, которое рассчитывается по регрессионной модели для каждой из реализации случайной величины отдельно. Если считать, что изучаемые признаки ненормальны, то в соответствии с центральной предельной теоремой их сумма также будет стремиться к нормальному распределению. Фактические и нормативные значения ВРП для разделов C, D и E в абсолютных единицах измерения представлены на рис. 2 и 3.

Рассмотрение соответствующих показателей в абсолютных единицах измерения дает лишь информацию об объеме, но не информацию о результативности функционирования ИСЭС с учетом конкретных для областей условий. Еще сложнее сравнить регионы по нескольким результатам одновременно. Частные и интегральные показатели результативности, построенные с использованием ПФ и АПФ, снимают эту проблему.

В соответствии с предложенным алгоритмом для оценки параметров АПФ линеаризованные и стандартизованные выражения (20)–(22) попарно были подставлены в (12), максимум которой был найден с помощью функции fmincon() MathLab с использованием алгоритма «interior-point». Плотность вероятности была взята в форме (19).

Вариант 1. Рассматривалась с.в., значения которой, по сути, представляют собой разность числителя и знаменателя (8), только для стандартизованных величин:

$$\varepsilon_k^* = \left(\sqrt{y_{1,k}^{*2} + 2r y_{1,k}^* y_{2,k}^* + y_{2,k}^{*2}} - \sqrt{\tilde{y}_{1,k}^{*2} + 2\widehat{r}\tilde{y}_{1,k}^* \tilde{y}_{2,k}^* + \tilde{y}_{2,k}^{*2}}\right) / \sigma_{\varepsilon^*}, \qquad (23)$$

где $r, \widehat{r}$ — парные коэффициенты корреляции, y_i^* $(i = 1,\ 2)$ — прологарифмированные стандартизованные значения выбранных показателей; «*» — стандартизованные переменные, $k = 1, \ldots, 170$,

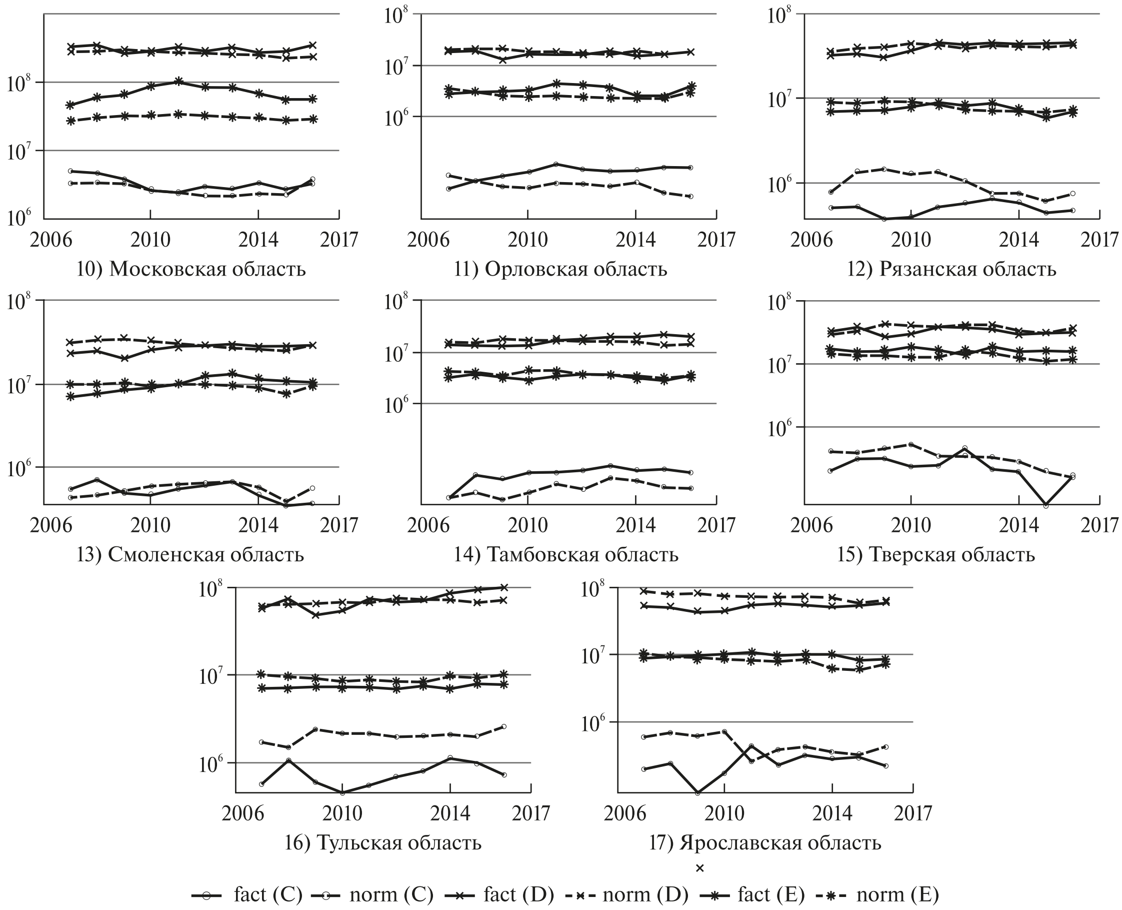

Рис. 3. Фактические (fact) и нормативные (norm) значения объема ВРП по видам экономической деятельности C, D и E для областей ЦФО (Московская — Ярославская области)

$$\tilde{y}^*_{i,k} = \ln(\hat{y}_{i,k})^* = C^*_{i,1}\ln(x_{i,1,k})^* + C^*_{i,2}\ln(x^*_{i,2,k}), \tag{24}$$

$C^*_{i,1}$, $C^*_{i,2}$, σ_{ε^*} — оцениваемые параметры. Точкой старта были выбраны начальные значения соответствующих параметров $C^*_{i,j[part]} = C_{i,j} S_{\ln(x_{i,j})} / S_{\ln(y_i)}$, где $C_{i,j}$ — параметры из (20)–(22), $S_{\ln(x_{i,j})}$, $S_{\ln(y_i)}$ — стандартные отклонения с.в. $\ln(x_{i,j})$ и $\ln(y_i)$ соответственно.

Вариант 2.

$$\varepsilon^*_k = \sqrt{\frac{(y^*_{1,k} - \tilde{y}^*_{1,k})^2}{\sigma^{*2}_1} + 2r\frac{\left(y^*_{1,k} - \tilde{y}^*_{1,k}\right)}{\sigma^*_1}\frac{\left(y^*_{2,k} - \tilde{y}^*_{2,k}\right)}{\sigma^*_2} + \frac{(y^*_{2,k} - \tilde{y}^*_{2,k})^2}{\sigma^{*2}_2}}, \tag{25}$$

где σ^*_i — стандартное отклонение с.в. $y^*_{i,k} - \tilde{y}^*_{i,k}$, $i = 1,2$ (σ^*_i вычислялось на каждом шаге численной оптимизации); r — парный коэффициент корреляции между y^*_1 и y^*_2; система ограничений:

$$C^*_{i,j} \in [0;1],\ \Delta\ln(L_p) = \ln(L_p(\varepsilon^*_{k[part]})) - \ln(L_p(\varepsilon^*_k)) \le 0, \tag{26}$$

$$\Delta_{\varepsilon^*} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{y^{*2}_{1,k} + 2ry^*_{1,k}y^*_{2,k} + y^{*2}_{2,k}} - \sqrt{\tilde{y}^{*2}_{1,k} + 2\tilde{r}\tilde{y}^*_{1,k}\tilde{y}^*_{2,k} + \tilde{y}^{*2}_{2,k}}\right)^2 -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{y^{*2}_{1,k} + 2ry^*_{1,k}y^*_{2,k} + y^{*2}_{2,k}} - \sqrt{\tilde{y}^{*2}_{1,k[part]} + 2\tilde{r}\tilde{y}^*_{1,k[part]}\tilde{y}^*_{2,k[part]} + \tilde{y}^{*2}_{2,k[part]}}\right)^2 \le 0,$$

$$\ln(L_p(\cdot)) = n\ln\frac{1}{1-r^2} + \sum_{i=1}^{n}\ln|(\cdot)| + n\ln\frac{1+r^2}{2(1-r^2)^2} - 2\sum_{i=1}^{n}(\cdot) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left[I_0\left(\frac{r}{(1-r^2)^2}(\cdot)^2\right)\right],$$

$(\cdot)$ — $\varepsilon^*_{k[part]}$, ε^*_k определяются соотношением (25) для оцениваемых параметров $C^*_{i,j}$ и их начальных значений $C^*_{i,j[part]}$.

Таблица 1. Результаты вычислений коэффициентов моделей с использованием плотности вероятности АПФ

Параметр / агрегируемая модель	Вариант	$(\ln(\hat{y}_1))^*, (\ln(\hat{y}_2))^*$ CD	$(\ln(\hat{y}_2))^*, (\ln(\hat{y}_3))^*$ ED	$(\ln(\hat{y}_1))^*, (\ln(\hat{y}_3))^*$ CE	Начальные значения $C^*_{i,j[part]}$
	1	0,1287	0,1829		
$C^*_{2,2}$	2	0,3205	0,0000		0,1876
	3	0,2916	0,0178		
	1		0,4885	0,6530	
$C^*_{3,1}$	2		0,5233	0,3270	0,4898
	3		0,4095	0,5274	
	1		0,4853	0,3995	
$C^*_{3,2}$	2		0,7064	0,4248	0,4764
	3		0,5467	0,3995	
	1	1,4164	1,4754	1,3662	2,0364
σ_{ε^*}	2				1,1295
	3				0,9913
	1	−329,4166	−343,2056	−346,1969	
Значение функции правдоподобия (Fval)	2	186,8194	161,1163	158,1559	–
	3	180,5007	152,6185	151,8495	
$\sum_{k=1}^{K}(\varepsilon^*_k)^2 - \sum_{k=1}^{K}(\varepsilon^*_{k[part]})^2$	1	$\sim -1\text{x}10^{-9}$	$\sim -1\text{x}10^{-8}$	$\sim -1\text{x}10^{-8}$	0
$\Delta\ln(L_p)$	2	−12,2323[б]	−14,2484	19,2105	–
	3	−16,4203	−5,8159	−15,0051	
Δ_{ε^*}	2	$\sim -1\text{x}10^{-8}$	$\sim -1\text{x}10^{-7}$	$\sim -1\text{x}10^{-7}$	0
	3	$\sim -1\text{x}10^{-8}$	$\sim -1\text{x}10^{-7}$	$\sim -1\text{x}10^{-7}$	

Таблица 2. Результаты проверки гипотезы H_0 на соответствие законам распределения

Параметры / агрегируемые модели	Вариант	$(\ln(\hat{y}_1))^*, (\ln(\hat{y}_2))^*$, CD	$(\ln(\hat{y}_2))^*, (\ln(\hat{y}_3))^*$, ED	$(\ln(\hat{y}_1))^*, (\ln(\hat{y}_3))^*$, CE
Критерий χ^2, критическое значение $\chi^2 = 7{,}8147$				
	1	6,1622	3,3399	5,6152
Нормальный закон	2	30,3625	24,5346	16,1652
	3	11,9413	8,7535	6,7774
	1	1797,5685	1851,8008	1596,0498
$F_p(y^*)$ (формула плотности (18))	2	8,1515	19,0737	13,2098
	3	6,7062	3,4908	4,0832

Примечание. Число интервалов определялось с помощью формулы Стерджесса: $k = 3{,}322\lg(n) + 1 = 8$, k — число интервалов, n — число наблюдений; критические значения определялись для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $\nu = 3$.

Вариант 3. В качестве значения парного коэффициента корреляции был выбран коэффициент r_ε, характеризующий взаимосвязь между $(y_1^* - \tilde{y}_1^*)/\sigma_1^*$ и $(y_2^* - \tilde{y}_2^*)/\sigma_2^*$, вычисляемый на каждом шаге численной оптимизации (табл. 1). Результаты проверки гипотез H_0 по критерию χ^2 на соответствие выбранному закону распределения отражены в табл. 2 и на рис. 4.

Различия в коэффициентах $C^*_{i,j}$, вычисленных 4 способами (см. п. 4.3), объясняются особенностями построения с.в., а с экономической точки зрения — изменением характера влияния выделенных существенных факторов на обобщенный результирующий признак, который должен учитывать синергетический эффект от взаимодействия выбранных результатов функционирования ИСЭС. Если в формулу плотности вероятности в форме (18) для $y^* \in (-\infty;\infty)$ непосредственно подставлять с.в. вида (23), оказывается, что полученное распределение ближе к нормальному закону, чем к (19). Объяснение такого эффекта, вероятно, кроется в действии центральной предельной теоремы для одинаково распределенных с.в., имеющих устойчивый закон распределения.

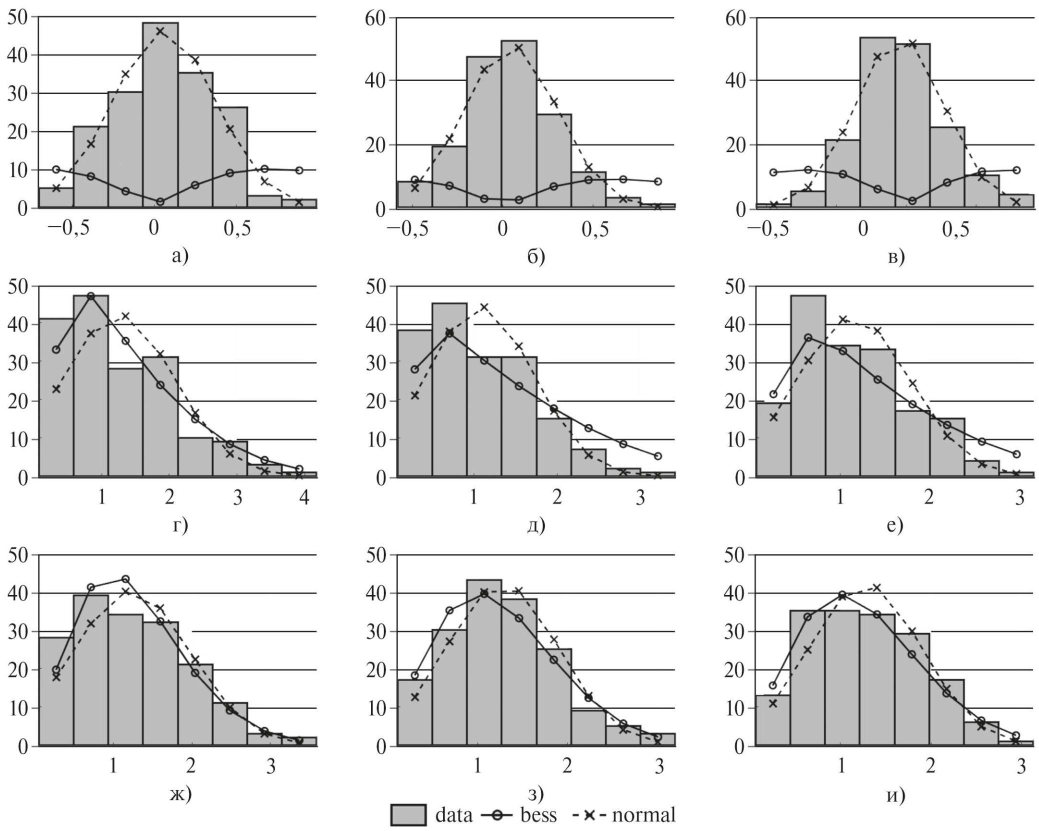

Рис. 4. Гистограммы агрегированной случайной величины ε^* (*data* — частоты с.в. ε^*; *bess* — теоретические частоты функции распределения ε^* с плотностью (19), *normal* — теоретические частоты нормальной функции распределения ε^*; а–в — гистограммы для разделов CD, ED и CE с.в. ε^* по (23) (вариант 1); г–е —по (25) (вариант 2), ж–и — результаты расчета частот с.в. ε^* по (25) с учетом r_ε (вариант 3))

Предложенный алгоритм оценки интегрального индикатора и поиска коэффициентов агрегированных моделей через функцию плотности вероятности можно расширить, если снять предположение о нормальности случайных величин, характеризующих частные результаты функционирования ИСЭС.

4.3. Оценка функционирования регионов ЦФО по интегральному показателю результативности

По формуле (8) были получены значения интегрального показателя результативности для регионов ЦФО (без г. Москва) за 2007–2016 гг. для сочетаний разделов CD, DE и CE и четырех вариантов вычисления параметров ПФ:

1) отдельно для каждого раздела;

2) по (23) (Ag1);

3) по (25) (Ag2);

4) по (25), коэффициент корреляции вычислялся на каждом шаге численной оптимизации (Ag3).

В качестве иллюстрации на рис. 5–6 представлены изменения значений интегрального показателя результативности для регионов ЦФО за 2007–2016 гг. для разделов CD, вычисленного по ПФ для каждого раздела отдельно (Int) и по АПФ, параметры которой рассчитаны в трех вариантах — (Ag1), (Ag2) и (Ag3). Нормативные значения (*norm*) отображены горизонтальной линией с единичной ординатой.

Графики на рис. 5 и 6 показывают, что формы траекторий значений интегрального показателя схожи (для разделов ED и CE траектории аналогичны). К тому же такое представление результатов функционирования более наглядно, чем в абсолютных единицах. При этом визуальное сравнение значений

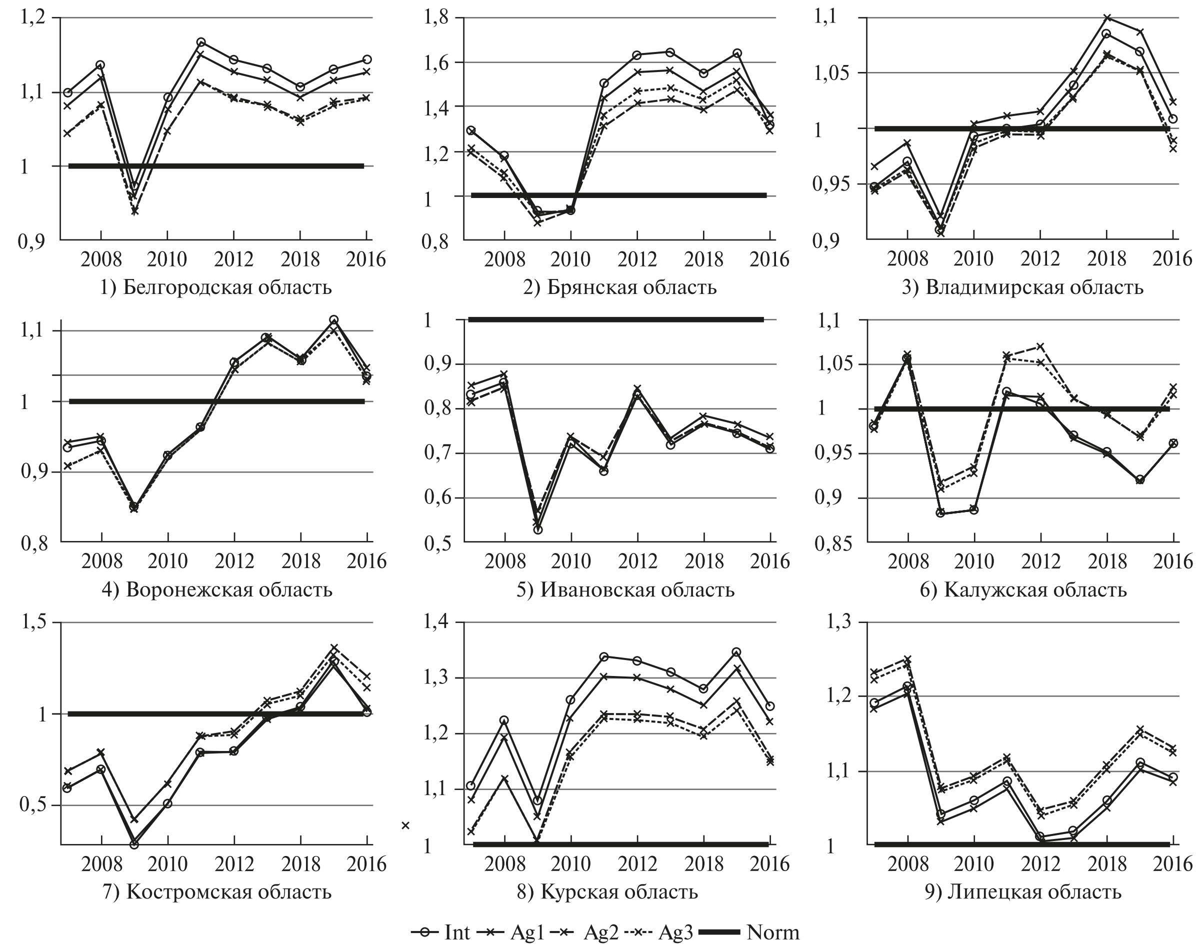

Рис. 5. Изменения значений интегрального показателя результативности для регионов ЦФО за 2007–2016 гг. для разделов C, D (Белгородская — Липецкая области)

с нормативом дает возможность оценить результативность функционирования областей уже с учетом конкретных условий.

На рис. 7 представлены средние относительные ошибки между значениями интегрального показателя Int и значениями интегральных показателей Ag1, Ag2 и Ag3 (обозначены соответственно Int-Ag1, Int-Ag2, Int-Ag3). Ошибки определены как для регионов ЦФО в целом (индекс 0), так и отдельно для каждой области (индексы 1–17) за период 2007–2016 гг.

Различия в значениях интегральных показателей для регионов ЦФО могут быть связаны со следующими причинами. Основные из них — это предположение о нормальности плотности вероятности для результативных признаков всех регионов и алгоритм оценки параметров агрегированной ПФ. Это вносит искажение в результаты оценок, полученных разными способами.

Однако средняя относительная ошибка между оценками варьируется около приемлемого 5%-го уровня. Это означает, что в случае формирования норматива для результатов функционирования регионов такой подход к оценке является приемлемым. Выбор способа оценки параметров агрегированной ПФ может быть обоснован исходя из следующих соображений. Для упрощения вычислений можно определять коэффициенты ПФ отдельно. Для уточнения параметров целесообразно использовать плотность вероятности агрегированной случайной величины. На рис. 5 и 6 видно, что траектории изменения значений интегральных индикаторов для различных вариантов оценки параметров ПФ, за редким исключением, не пересекаются. То есть они формируют верхнюю (наиболее низкое (слабое) требование к значению индикатора) и нижнюю (в противном случае) границу норматива (ожидаемого значения), построенного с использованием АПФ. Следовательно, выбор алгоритма оценки можно связать с приоритетами развития того или иного

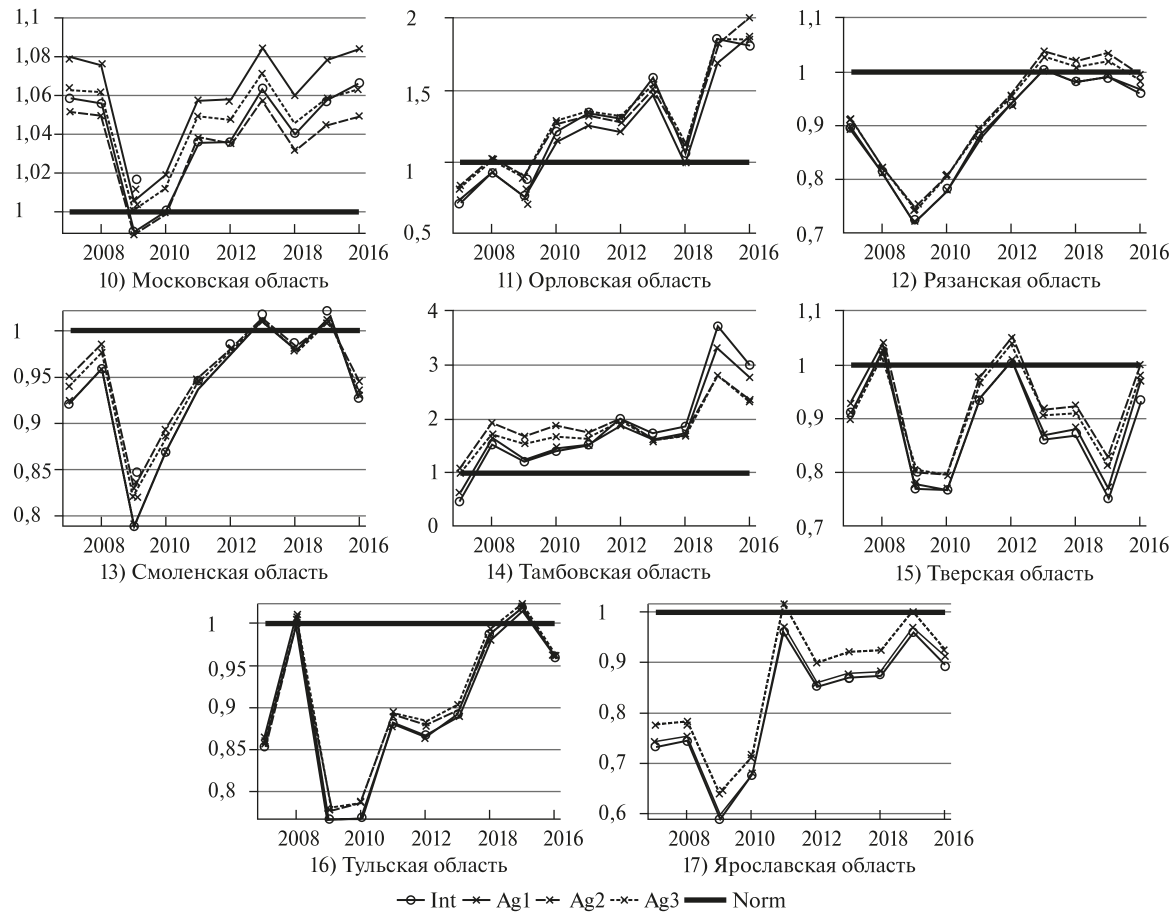

Рис. 6. Изменения значений интегрального показателя результативности для регионов ЦФО за 2007–2016 гг. для разделов C, D (Московская — Ярославская области)

региона. Если, например, развитие обрабатывающих производств и добывающей отрасли является наиболее важным, то норматив необходимо установить более строгим и выбрать такой алгоритм вычисления параметров ПФ, который дает самые низкие, по сравнению с другими алгоритмами, оценки интегрального показателя результатов функционирования ИСЭС и ее подсистем на заданном уровне иерархии.

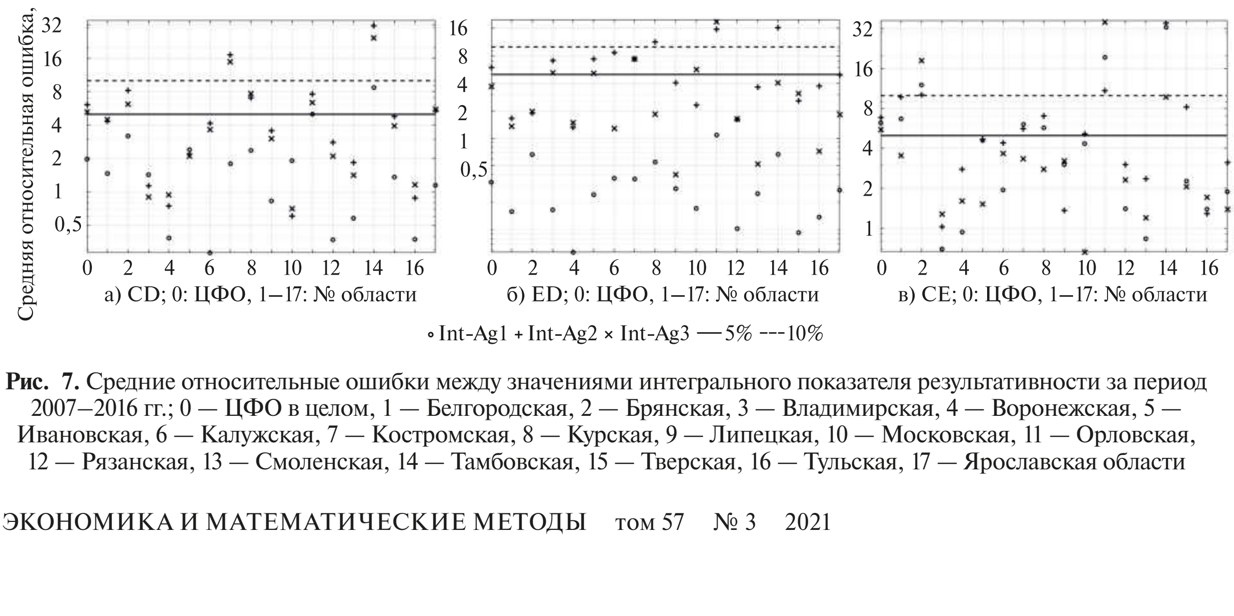

Рис. 7. Средние относительные ошибки между значениями интегрального показателя результативности за период 2007–2016 гг.; 0 — ЦФО в целом, 1 — Белгородская, 2 — Брянская, 3 — Владимирская, 4 — Воронежская, 5 — Ивановская, 6 — Калужская, 7 — Костромская, 8 — Курская, 9 — Липецкая, 10 — Московская, 11 — Орловская, 12 — Рязанская, 13 — Смоленская, 14 — Тамбовская, 15 — Тверская, 16 — Тульская, 17 — Ярославская области

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен новый метод оценки результатов функционирования иерархической социально-экономической системы, ее подсистем и элементов. Для подсистемы оценка проводится с помощью интегрального показателя результативности, который вычисляется с помощью агрегированной производственной функции. Ее параметры могут быть получены двумя способами. Первый предполагает использование коэффициентов, полученных из эконометрических уравнений для каждого результата функционирования ИСЭС по отдельности. Второй способ, составляющий научную новизну исследования, так же как и его апробация, основан на построении плотности распределения вероятностей агрегированной случайной величины, которая потребуется при поиске параметров АПФ. Для двумерного случая получено аналитическое выражение такой плотности распределения.

Тестирование метода по статистическим данным для регионов ЦФО за 2007–2016 гг. показало, что для большинства областей наблюдаются незначительные расхождения в значениях интегрального индикатора, вычисленных на основе представленных способов определения параметров АПФ. Предложен вариант обоснования выбора алгоритма для оценки параметров АПФ.

Метод применим для ИСЭС и их подсистем на различных уровнях иерархии (хозяйствующий субъект, муниципальное образование, регион, округ) и может быть интересен широкому кругу исследователей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ /REFERENCES

Айвазян С.А. (2012). Анализ качества и образа жизни населения. М.: Наука. [**Aivazian S.A.** (2012). *Quality of life and living standarts analysis*. Moscow: Nauka (in Russian).]

Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю. (2014). Моделирование производственного потенциала на основе концепции стохастической границы. Методология, результаты статистического анализа. М.: Красанд. [**Aivazian S.A., Afanasiev M.Yu.** (2014). *Production potential modeling based on stochastic frontier concept. Methodology, results of statistical analysis*. Moscow: Krasand (in Russian).]

Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В. (2016). Метод кластеризации регионов РФ с учетом отраслевой структуры ВРП // *Прикладная эконометрика*. Т. 1 (41). С. 24–46. [**Aivazian S.A., Afanasiev M. Yu., Kudrov A.V.** (2016). Clustering methodology of the Russian Federation regions with account of sectoral structure of GRP. *Applied Econometrics*, 1 (41), 24–46 (in Russian).]

Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В. (2018). Индикаторы экономического развития в базисе характеристик региональной дифференциации // *Прикладная эконометрика*. Т. 2 (50). С. 4–22. [**Aivazian S.A., Afanasiev M. Yu., Kudrov A.V.** (2018). Indicators of economic development in the basis of the characteristics of regional differentiation. *Applied Econometrics*, 2 (50), 4–22 (in Russian).]

Афанасьев А.А., Воронцов А.А. (2018). Модифицированная вычислимая модель общего равновесия экономики России с газовой отраслью RUSEC-PAO «GAZPROM» // *Экономика и математические методы*. Т. 54 (2). С. 29–49. [**Afanasiev A.A., Vorontsov A.A.** (2018). Modified computable general equilibrium model of the Russian economy with the gas industry RUSEC-PAO «GAZPROM». *Economics and Mathematical Methods*, 54 (2), 29–49 (in Russian).]

Афанасьев А.А., Пономарева О.С. (2020). Народнохозяйственная производственная функция России в 1990–2017 гг. // *Экономика и математические методы*. Т. 56 (1). С. 67–78. [**Afanasiev A.A., Ponomareva O.S.** (2020). The macroeconomic production function of Russia in 1990–2017. *Economics and Mathematical Methods*, 56 (1), 67–78 (in Russian).]

Жуков Р.А. (2019а). Оценка эффективности функционирования иерархических социально-экономических систем // *Мягкие измерения и вычисления*. Т. 25 (12). С. 56–64. [**Zhukov R.A.** (2019a). Evaluation of the effectiveness of hierarchical socio-economic systems. *Soft Measurements and Computing*, 25 (12), 56–64 (in Russian).]

Жуков Р.А. (2019б). Социо-эколого-экономические системы: теория и практика: монография. М.: ИНФРА-М. [**Zhukov R.A.** (2019b). *Socio-ecological and economic systems: Theory and practice*. Moscow: INFRA-M (in Russian).]

Жуков Р.А. (2020а). К вопросу о формировании интегральных показателей результативности функционирования иерархических социально-экономических систем: вероятностный подход // *Вестник Тульского филиала Финуниверситета*, 1, 297–298. [**Zhukov R.A.** (2020a). The question of the formation of integrated indicators of the functioning of the hierarchical socio-economic systems: a probabilistic approach. *Bulletin of the Tula branch of the Financial University*, 1, 297–298 (in Russian).]

Жуков Р.А. (2020б). Подход к оценке функционирования ИСЭС и принятию решений на базе программного комплекса ЭФРА // *Бизнес информатика*. Т. 14 (3). С. 82–95. [**Zhukov R.A.** (2020b). An approach to assessing the functioning of hierarchical socio-economic systems and decision-making based on the EFRA software package. *Business Informatics*, 14 (3), 82–95 (in Russian).]

Клейнер Г.Б. (2015). Государство — регион — отрасль — предприятие. Каркас системной устойчивости экономики России. Часть 1 // *Экономика региона*. № 2. С. 50–58. [**Kleiner G.B.** (2015). State — region — field— enterprise: Framework of economics system stability of Russia. Part 1. *Economy of region,* 2, 50–58 (in Russian).]

Клейнер Г.Б. (2016). Экономика. Моделирование. Математика. Избранные труды. М.: ЦЭМИ РАН. [**Kleiner G.B.** (2016). *Economy. Modeling. Mathematics. Selected Works.* M.: CEMI RAN (in Russian).]

Клейнер Г.Б., Рыбачук М.А. (2019). Системная сбалансированность экономики России. Региональный разрез // *Экономика региона*. Т. 15 (2). С. 309–323. [**Kleiner G.B., Rybachuk M.A.** (2019). System balance of the Russian economy: Regional perspective. *Economy of Region*, 15 (2), 309–323 (in Russian).]

Колесников Н.Г., Толстогузов О.В. (2016). Структурные изменения экономики Северо-Запада России: пространственный аспект // *Балтийский регион*. Т. 8 (2). С. 30–47. [**Kolesnikov N.G., Tolstoguzov O.V.** (2016). Structural changes in the economy of the Russian northwest: Spatial dimension. *Baltic Region*, 8 (2), 30–47 (in Russian).]

Кривоножко В.Е., Лычев А.В. (2010). Анализ деятельности сложных социально-экономических систем. М.: Макс Пресс. [**Krivonozhko V.E., Lychev A.V.** (2010). *Analysis of activity of complex socio-economic systems*. Moscow: Maks Press (in Russian).]

Макаров В.Л., Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Бахтизин А.Р., Нанавян А.М. (2016). Моделирование развития экономики региона и эффективность пространства инноваций // *Форсайт*. Т. 10 (3). С. 76–90. [**Makarov V.L., Ayvazyan S.A., Afanasyev M.Yu., Bakhtizin A.R., Nanavyan A.M.** (2016) Modeling the development of regional economy and an innovation space efficiency. *Foresight and STI Governance*, 10 (3), 76–90 (in Russian).]

Макаров В.Л., Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Бахтизин А.Р., Нанавян А.М. (2014). Оценка эффективности регионов РФ с учетом интеллектуального капитала, характеристик готовности к инновациям, уровня благосостояния и качества жизни населения // *Экономика региона*. № 4. С. 9–30. [**Makarov V.L., Ayvazyan S.A., Afanasyev M.Yu., Bakhtizin A.R., Nanavyan A.M.** (2014). The estimation of the regions' efficiency of the Russian Federation including the intellectual capital, the characteristics of readiness for innovation, level of well-being, and quality of life. *Economy of region,* 4, 9–30 (in Russian).]

Месарович М., Мако Д., Такахара И. (1973). Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир. [**Mesarovich M., Mako D., Takahara I.** (1973). *Theory of hierarchical multilevel systems*. Moscow: Mir (in Russian).]

Саати Т. (1993). Принятие решений: метод анализа иерархий. М.: Радио и связь. [**Saati T.** (1993). *Decision making. Hierarchy analysis method*. Moscow: Radio i svyaz' (in Russian).]

Sayaria N., Saria R., Hammoudehb S. (2018). The impact of value added components of GDP and FDI on economic freedom in Europe. *Economic Systems*, 42 (2), 282–294.

Zhukov R., Kuznetsov G., Manokhin E., Gorodnichev S., Nazyrova E., Melay E. (2019). Comparative analysis of results of assessing the Central federal district's regions' economic development by using linear and non-linear models. *Statistika: Statistics and Economy Journal*, 99(3), 272–286.

Method for assessing the results of hierarchical socio-economic systems' functioning based on the aggregated production function

R.A. Zhukov,
Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch), Tula, Russia;
e-mail: pluszh@mail.ru

Received 22.12.2020

Abstract. The article presents a method that develops methodology for assessing the functioning of hierarchical socio-economic systems. The methodology includes formalized description of the object of research and the construction of partial and integral performance indicators. Performance indicators are calculated using production functions. The method is based on an algorithm for constructing an aggregated production function, which is used to calculate the normative (expected) value of the functioning results of the research object. Using the example of the regions in Central Federal District and data for 2007–2016 testing and comparative analysis of four algorithms for estimating the parameters of the aggregate production function in the construction of the integral indicator are carried out. The gross regional product for the NACE sections (C, D and E) was chosen as effective indicators. The scientific novelty of the study is as follows. Three algorithms for constructing the distribution density of an aggregated random variable, which is a combination of residuals from econometric equations that describe the particular results of the functioning of elements of a hierarchical socio-economic system, are proposed and tested. The distribution density is used to find the parameters of the aggregated production function. For the two-dimensional case, analytical expression of the corresponding probability distribution density is obtained. The conclusion about the possibility of using the method to evaluate the results of the functioning of hierarchical socio-economic systems is substantiated.

Keywords: socio-economic system, hierarchy, classification, integral indicator, production function, assessment, probability density.

JEL Classification: C10, C43, P25, R11, R15.

DOI: 10.31857/S042473880016428-9