ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2021, том 57, № 3, с. 97–109

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Стоимостная оценка машин, подвергающихся винеровскому процессу деградации

С.А. Смоляк,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: smolyak1@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.04.2021

Аннотация. Предлагается модель, описывающая уменьшение стоимости машины (обесценение) с возрастом. Обычно оно характеризуется коэффициентом годности — отношением ее стоимости к стоимости аналогичной новой машины. Нередко эксплуатационные характеристики подержанной машины оценщики не знают и им приходится связывать коэффициенты годности с возрастом машины. В предлагаемой модели состояние машины характеризуется интенсивностью приносимых ею выгод. Под выгодами от использования машины в некотором периоде понимается стоимость выполненных ею работ за вычетом операционных затрат. В процессе работы эксплуатационные характеристики машины меняются случайно, но имеют тенденцию к ухудшению. Это позволяет описать изменение ее состояния винеровским процессом с отрицательным сносом. Параметры винеровского процесса (снос и волатильность) выражены через известные характеристики долговечности машины — среднее значение и коэффициент вариации срока службы. Стоимость машины определяется как математическое ожидание суммы дисконтированных выгод от ее последующего экономически рационального использования. Полученные формулы позволяют для каждого возраста найти средний коэффициент годности машин для этого возраста. Оказалось, что он практически зависит только от коэффициента вариации срока службы и отношения возраста к среднему сроку службы.

Ключевые слова: машины, оборудование, деградация, винеровский процесс, срок службы, стоимостная оценка, метод ДДП, обесценение, коэффициент годности.

JEL Classification: D24, D46, D81, G12.

DOI: 10.31857/S042473880016422-3

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Общие положения по оценке рыночной и иных видов стоимости различных объектов излагаются в Международных стандартах оценки (МСО)[1], национальных стандартах и учебниках (см., например, (Федотова, 2018)). Не приводя соответствующих определений, отметим лишь, что основным видом стоимости (реального или виртуального) объекта является *рыночная* стоимость, которая одновременно отражает как цену объекта в совершаемой на дату оценки сделке между типичными и ведущими себя экономически рационально участниками рынка, так и выгоды, получаемые владельцем от предстоящего экономически рационального использования объекта.

Эта статья посвящена оценке рыночной стоимости (далее — стоимости) подержанных машин и оборудования (далее — машин). Машины, изготовленные по одному проекту и имеющие одно и то же назначение, мы объединяем в одну *марку* (в технической литературе говорят «модель»; по понятным причинам мы избегаем этого термина). Все новые (изготовленные, но еще не вступившие в эксплуатацию) машины одной марки мы считаем идентичными. Новые машины обращаются на *первичном* рынке, а их стоимость легко оценивается на основе цен производителей или дилеров. *Подержанные* машины обращаются на *вторичном* рынке. Все подержанные машины одной марки сильно отличаются друг от друга по своему техническому состоянию (ТС) и продаются по существенно различающимся ценам. Поэтому их оценка представляет серьезную проблему. Владельцев машин мы считаем коммерческими предприятиями и типичными участниками рынка.

[1] МСО. Международные стандарты оценки: вступают в силу с 31 января 2020 г. М.: Российское общество оценщиков.

В процессе эксплуатации (использования по назначению) машина производит определенную *работу*. При этом меняются ее ТС и технико-экономические характеристики. Поскольку выполняемая работа имеет полезность для участников рынка, она имеет и свою стоимость. Стоимость работ (и услуг) может оцениваться теми же методами, что и стоимость основных средств, хотя в МСО этому не уделяется должного внимания. Стоимость некоторых работ (окраска поверхностей, перевозка грузов и др.) можно оценить по рыночным данным. Но многие работы (скажем, наклеивание этикетки) являются промежуточными операциями в технологическом процессе, и оценка их стоимости представляет серьезную проблему.

Определим *выгоды* (чистые доходы) от эксплуатации машины в некотором периоде как стоимость произведенных ею в этом периоде работ за вычетом операционных затрат на их выполнение. Величина выгод при таком определении одновременно отражает и рыночную плату за аренду машины в соответствующем периоде. В Системе национальных счетов (СНС 2008[2]), где также оценивается стоимость подержанных капитальных активов, выгоды от эксплуатации актива понимаются именно так, но именуются услугами (вложенного в актив) капитала. Процесс эксплуатации машины мы описываем в непрерывном времени. Здесь машину можно характеризовать зависящей от ее ТС интенсивностью выгод (величиной выгод, приносимых в малую единицу времени).

Машины, дальнейшее использование которых недопустимо или нецелесообразно, утилизируются, т.е. выбывают из эксплуатации и передаются для использования в другую сферу (например, в качестве набора запасных частей, материалов, узлов и деталей либо в качестве учебного пособия). В общем случае утилизация машины требует расходов и может приносить доходы. Принимается, что машина утилизируется мгновенно. Выгоды от своевременно и правильно проведенной утилизации — разность между доходами и расходами от утилизации — определяют *утилизационную стоимость* машины, которая обычно невелика.

В процессе эксплуатации ТС машины имеет тенденцию к ухудшению. В теории надежности этот процесс именуется деградацией и давно исследуется. Основное внимание при этом уделяется оценке надежности и среднего срока службы машин, оптимизации политики их технического обслуживания, ремонта и замещения машин. Между тем, деградация машины существенно влияет на ее стоимость.

Для нас важно, что на изменения ТС машины влияет большое число факторов, что придает ему вероятностный характер. Поэтому его часто описывают случайными процессами различных типов (Noortwijk, 2009; Ye, Chen, 2014; Wang et al., 2016; Wang et al., 2020). При этом становится актуальным выяснить, при каких условиях следует прекратить эксплуатацию машины[3], т.е. утилизировать ее. Состояние машины, при котором ее дальнейшая эксплуатация *технически* невозможна или недопустима, в теории надежности именуется предельным. Достижение *предельного* состояния отвечает *физическому* сроку ее службы и обычно связано с «тяжелым отказом». Поэтому можно считать, что физические сроки службы машин имеют такое же вероятностное распределение, что и время их работы до отказа. Имеется много публикаций, где такие распределения для разных марок машин строились по данным наблюдений или ускоренных испытаний на надежность. Соответствующие результаты позволяют оценивать средние значения и коэффициенты вариации физических сроков службы машин.

Между тем в рыночной экономике при принятии решения о выбытии машины из эксплуатации должны использоваться и *экономические* критерии. На практике такие решения принимают, экспертно учитывая как ТС машины, так и ее фактические и ожидаемые экономические характеристики. В литературе предложено много методов экономически рационального выбора момента завершения эксплуатации машин, но они, как правило, опираются на *критерии затратного типа*. Например, считают, что срок службы машины должен отвечать минимальным удельным (на единицу времени или производимой работы) суммарным затратам на ее приобретение и эксплуатацию. Однако затратные критерии не в полной мере отражают экономические интересы владельца машины. Представляется, что эту задачу необходимо решать в увязке с задачей стоимостной оценки машин — такой подход в литературе по надежности никогда не применялся. Между тем, указанная увязка совершенно очевидна, так как стоимость объекта отвечает его экономически рациональному использованию и, стало быть, экономически рациональному сроку службы.

[2] СНС 2008. Система национальных счетов 2008. (2012). ЕК, МВФ, ОЭСР, ООН, ВБ. Нью-Йорк.

[3] Не менее важно выяснить, при каких условиях машине следует провести капитальный ремонт. Эта задача также исследовалась в литературе, но мы не будем на ней останавливаться.

Обычно стоимость подержанной машины оценивают, корректируя стоимость ее нового аналога (новой машины той же марки). Для этого стоимость нового аналога либо уменьшают на процент *обесценения* (физического износа), либо умножают на процент или коэффициент *годности* (относительной стоимости, Percent Good Factor). Теоретически проценты обесценения или годности (они дополняют друг друга до 100%) должны определяться в зависимости от ТС машины. Однако никаких унифицированных методов измерения ТС машин пока еще не предложено, и оценщикам приходится опираться только на возраст машины. Поскольку подержанные машины одного возраста могут находиться в разном ТС и иметь разную стоимость, здесь можно говорить только о средней стоимости машин определенного возраста, или, что то же, о средних значениях процентов обесценения или годности. Такие средние проценты/коэффициенты нередко определяют по формулам не всегда обоснованным и не подтверждаемыми ценами вторичного рынка, о чем подробно говорится в (Смоляк, 2016). Ряд подобных формул основан на допущении, что все машины одной марки имеют одинаковый срок службы, хотя это не согласуется с фактическими данными.

В Системе национальных счетов (СНС 2008) сроки службы активов рассматриваются как случайные. При этом активы, в зависимости от того, в каком секторе экономики они используются, объединяются в большие группы и для каждой группы задается свое распределение сроков службы (в разных странах это делается по-разному). Существенно, что технические характеристики активов при этом не принимаются во внимание, так что в одну группу попадают, например, все машины, используемые в электроэнергетике. Обоснованному выбору распределений сроков службы различных групп активов в системах национальных счетов посвящено много исследований, например (Erumban, 2008; Nomura, Suga, 2018; Rincon-Aznar, Riley, Young, 2017). В конечном счете в каждой стране для каждой группы активов выбирается какой-то закон вероятностного распределения сроков службы и, соответственно, среднее значение и коэффициент вариации срока службы. Однако для формирования национальных счетов необходимо знать еще динамику годовых выгод, приносимых активами каждой группы каждого возможного срока службы (так называемый профиль «возраст-эффективность»). В этих целях принимается, что динамика этих выгод — детерминированная. По существу это отвечает нереалистичной ситуации, когда каждой новой машине некто (Бог?) случайным образом назначает срок службы, который однозначно определяет весь процесс ее последующей эксплуатации. При таком допущении оказывается возможным в ходе относительно простых расчетов установить, как изменяется с возрастом средняя стоимость машин группы, доживших до этого возраста, т.е. построить зависимость от возраста средних коэффициентов годности машин этой группы. Такой подход мы попытались применить в (Смоляк, 2020). Однако полученные зависимости не очень хорошо согласуются с рыночными данными и сведениями о надежности машин.

Между тем, если на вторичном рынке имеется достаточно большое число подержанных машин одной марки с известными ценами, то средние значения процентов обесценения или годности можно рассчитать, построив регрессионную зависимость цен машин от возраста. Такие зависимости для отдельных марок машин строились многими авторами работ, например (Смоляк, 2014; Федотова, 2018; Лейфер, 2019). Оказалось, что они обеспечивают удовлетворительную (порядка 10–12%) точность оценки стоимости. К сожалению, зависимости, построенные для машин одного назначения разных марок, могут сильно различаться. Такая ситуация имеет место, например, для бульдозеров Б10М ЧТЗ и Caterpillar D8R (Смоляк, 2014). В то же время число марок машин и оборудования в стране составляет сотни тысяч и построить указанные зависимости для каждой марки практически невозможно. Это вызывает необходимость построения зависимостей коэффициентов годности от возраста, требующих минимальной и доступной для оценщиков информации о машинах и учитывающих вероятностный характер процесса их деградации.

Мы решаем эту задачу с применением одной из известных моделей деградации машин. Считаются известными: стоимость новой машины, среднее значение T и коэффициент вариации v срока ее службы.

Рекомендации по определению среднего срока службы машин даются, например, в (Лейфер, 2019). Коэффициенты вариации сроков службы машин v можно получить, зная распределение сроков их службы, принимаемые в системах национальных счетов, а также из (Острейковский, 2003, табл. 12.5). Имеются также сведения о наблюдаемых отказах и сроках службы машин некоторых марок, например (Dascar, Nan, Dascar, 2015; Hafaifa et al., 2016; Kumar, Krishnan, 2017; Melchor-Hernández et al., 2015; Nomura, Suga, 2018; Oguchi, Fuse, 2015; Touama, 2014; Trappey et al., 2014; Wang et al., 2016). Анализ подобных источников позволил в (Смоляк, 2017) предложить классификацию машин для ориентировочной оценки коэффициентов вариации сроков их службы. Приведем ее с некоторыми уточнениями.

Первый класс — машины, к чьей надежности и срокам службы предъявляются повышенные требования. Это машины, достаточно сложные по конструкции, высокого качества изготовления, предназначенные для работы в стабильных условиях, с установленными производителем сроками службы либо производимые малыми сериями или в единичных экземплярах, ремонт которых обходится слишком дорого или практически невозможен. Фактические сроки службы таких машин лежат в довольно узких пределах. Для этого класса $v = 0{,}22{-}0{,}38$, и в среднем здесь можно принять $v = 0{,}3$.

Второй класс — машины, к надежности которых предъявляются повышенные требования, но сроки службы которых особо не регламентируются и могут неоднократно продлеваться. Сюда относятся машины, условия эксплуатации которых могут меняться в широких пределах, а также машины, предназначенные для работы в стабильных условиях, к качеству изготовления которых не предъявляется особых требований. Для таких машин $v = 0{,}38{-}0{,}55$, и в среднем здесь можно принять $v = 0{,}47$.

Третий класс — машины и оборудование, к надежности и срокам службы которых не предъявляются особые требования. В основном это машины сравнительно простые по конструкции, производимые большими сериями и достаточно легко ремонтируемые. В принципе, их работоспособность можно восстанавливать много раз, поэтому фактические сроки их службы могут меняться в достаточно широких пределах. Для таких машин $v = 0{,}55{-}0{,}8$, и в среднем здесь можно принять $v = 0{,}65$.

ВИНЕРОВСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕГРАДАЦИИ МАШИН

В винеровской модели объектами рассмотрения являются машины одной марки. Их можно либо использовать по назначению (единственным способом), либо утилизировать. Будем считать, что инфляция отсутствует, утилизационная стоимость машин — нулевая, а владелец машины может оценивать приносимые ею выгоды за любой период. Состояние каждой машины характеризуется интенсивностью z приносимых ею выгод. Тем самым, машины, находящиеся в одном состоянии, считаются идентичными.

Изменение состояния машины с возрастом мы описываем винеровским процессом со сносом: $z(t) = z(0) - at + \sigma B_t$, где $a > 0$ — параметр сноса, скорость систематического ухудшения состояния; B_t — процесс броуновского движения; σ — волатильность, отражающая масштаб случайных колебаний состояния. Напомним, что приращения случайного процесса B_t за любой отрезок времени длительностью s имеют среднее значение 0 и дисперсию s, а приращения за непересекающиеся отрезки времени независимы.

В этой модели (случайная) динамика будущего состояния машины зависит только от ее текущего состояния, но не от того, как она ранее использовалась. Подобные процессы давно изучаются в теории вероятностей и в теории надежности, например в (Abdel-Hameed, 2014; Cui, Huang, Li, 2016; Kahle, Lehmann, 2010; Kahle, Mercier, Paroissin, 2016). Применялись они и к оценке бизнеса, например в (Dixit, Pindyck, 1994; Аркин, Сластников, Аркина, 2004; Аркин, Сластников, Смоляк, 2006). В то же время винеровская модель не учитывает влияния капитальных ремонтов. Это оправдывается тем, что обычно после ремонта коэффициенты годности машин увеличиваются не более чем на 20–25% и, следовательно, отличаются от средней стоимости машин того же возраста не больше, чем на 10–12%, что для целей стоимостной оценки машин допустимо.

ЗАВИСИМОСТЬ СТОИМОСТИ МАШИНЫ ОТ ЕЕ СОСТОЯНИЯ

Стоимость машины, находящейся в состоянии z, обозначим через $V(z)$. При $V(z) > 0$ машину выгодно какое-то время эксплуатировать. Такие машины назовем *рентабельными*. К ним относятся и новые машины, поскольку они производятся и продаются. Состояние новой машины обозначим через z_0, а ее стоимость примем за единицу измерения стоимостных показателей: $V(z_0) = 1$. Стоимость любой машины в таких единицах будет совпадать с коэффициентом ее годности. За единицу измерения времени примем средний срок службы новой машины. Поэтому возраст машины t, выраженный в наших единицах, совпадает с ее относительным возрастом, измеренным обычным для оценщиков способом (как отношение хронологического возраста к среднему сроку службы).

Отметим, что интенсивность приносимых машиной выгод z будет величиной, имеющей размерность «единица стоимости/единица времени».

При оценке машин мы будем опираться на **принцип ожидания выгод**, упоминаемый, но не раскрываемый в МСО. Его удобно изложить в следующей форме (Смоляк, 2016): *стоимость объекта на дату оценки не меньше математического ожидания суммы дисконтированных выгод от его использования в течение предстоящего прогнозного периода и стоимости в конце периода и совпадает с указанным математическим ожиданием, если объект используется экономически рационально (наиболее эффективно)*.

При этом стоимость объекта не зависит от момента окончания прогнозного периода, так что он может быть выбран любым.

В данной модели налог на прибыль в составе выгод не учитывается, а неблагоприятные колебания выгод учитываются операцией математического ожидания. Поэтому здесь, согласно МСО, выгоды дисконтируются по доналоговой безрисковой номинальной ставке (совпадающей с реальной при отсутствии инфляции). Эту ставку, отвечающую принятому измерению времени, мы обозначим через r и назовем *нормированной*[4].

Выясним зависимость $V(z)$ стоимости машины от ее состояния. Из экономических соображений следует, что функция $V(z)$ неотрицательная и непрерывная. Докажем, что она *неубывающая*. Рассмотрим две машины, находящиеся в момент 0 в состояниях x и $y>x$, причем первая используется рационально. Очевидно, что неравенство $V(y)\geq V(x)$ справедливо при $V(x)=0$. Если же $V(x)>0$, то условимся утилизировать вторую машину тогда же, когда и первую. Тогда при любой реализации броуновского процесса $\{B_t\}$ она будет приносить выгоды с большей интенсивностью ($y-at+\sigma B_t>x-at+\sigma B_t$) и, стало быть, сумма дисконтированных выгод для нее будет больше. Но для первой машины математическое ожидание такой суммы совпадает с ее стоимостью $V(x)$, а для второй машины — не превосходит ее стоимости $V(y)$, откуда и следует, что $V(y)>V(x)$.

Поскольку функция $V(z)$ неотрицательная и монотонная, то найдется такое граничное значение h, что состояния $z>h$ отвечают рентабельным машинам, а все остальные — машинам с нулевой стоимостью. Поскольку эксплуатация машин в состояниях $z>0$ приносит положительные выгоды, такие машины — рентабельные, а $h\leq 0$. Будем считать, что в области $z>h$ функция $V(z)$ достаточно гладкая.

Заметим, что в нашей модели машина может либо эксплуатироваться, либо утилизироваться. При этом решение об утилизации должно приниматься в зависимости от состояния машины. Но, как показано выше, машина может иметь положительную стоимость только при $z>h$, так что экономически рациональным будет утилизировать машину в тот (вообще говоря, случайный) момент, когда интенсивность приносимых ею выгод станет не больше h. Далее принимается, что момент утилизации машины выбирается именно так.

В целях упрощения изложения некоторые последующие рассуждения будут недостаточно строгими с математической точки зрения. Корректный вывод приводимых формул требует применения более сложного аппарата теории случайных процессов (Булинский, Ширяев, 2005; Оксендаль, 2003).

Возьмем машину, находящуюся в некотором состоянии x в момент 0. Интенсивность выгод $z(t)$, приносимых ею в более поздний момент t, составит либо $x-at+\sigma B_t$, либо 0, в зависимости от того, когда ее утилизируют. Однако в обоих случаях $z(t)<|x|+\sigma|B_t|$. Но B_t — нормально распределенная случайная величина со средним 0 и дисперсией t, значит, $\mathbf{E}[|B_t|]<t+1$, а $\mathbf{E}\left[z(t)\right]<|x|+\sigma(t+1)=\bar{z}(t)$, где $\mathbf{E}$ — математическое ожидание. Поэтому в силу принципа ожидания выгод стоимость нашей машины $V(x)$ будет меньше стоимости (виртуального) объекта, который в момент t приносит выгоды с детерминированной интенсивностью $\bar{z}(t)$:

$$V(x)<\int_0^\infty \bar{z}(t)\mathrm{e}^{-rt}\,dt=\int_0^\infty\left[|x|+\sigma(t+1)\right]\mathrm{e}^{-rt}\,dt=\left(|x|+\sigma\right)/r+\sigma/r^2.$$

Это означает, что функция $V(z)$ при $z\to+\infty$ растет не быстрее, чем линейно.

---

[4] Обычно время измеряют в годах, а ставка дисконтирования ρ имеет размерность 1/год. В этом случае нормированная ставка определится формулой $r=\rho T$.

Возьмем рентабельную машину в состоянии z, имеющую стоимость $V(z)$. За малое время dt она принесет выгоды zdt, после чего будет иметь случайную стоимость $V\left(z-adt+\sigma dB\right)$. Тогда, согласно принципу ожидания выгод, имеем

$$V\left(z\right)\approx zdt+\left(1-rdt\right)\mathbf{E}\left[V\left(z-adt+\sigma dB\right)\right], \tag{1}$$

где знак «≈» обозначает равенство, справедливое с точностью до малых более высокого порядка.

Используя ряд Тейлора для функции V и учитывая, что $\mathrm{E}[dB]=0$, $\mathrm{E}[dB^2]=dt$, находим

$$\mathbf{E}\left[V\left(z-adt+\sigma dB\right)\right]\approx\mathbf{E}\left[V\left(z\right)-V'\left(z\right)\left(adt-\sigma dB\right)+0{,}5V''\left(z\right)\left(adt-\sigma dB\right)^2\right]\approx$$
$$\approx V\left(z\right)-V'\left(z\right)adt+0{,}5V''\left(z\right)\sigma^2dt.$$

Подставив это в (1), получаем

$$V\left(z\right)\approx zdt+\left(1-rdt\right)\left\{V\left(z\right)-V'\left(z\right)adt+0{,}5V''\left(z\right)\sigma^2dt\right\}\approx$$
$$\approx V\left(z\right)+\left[z-rV\left(z\right)-aV'\left(z\right)+0{,}5\sigma^2V''\left(z\right)\right]dt.$$

Но такое равенство возможно, только если $0{,}5\sigma^2V''\left(z\right)-aV'\left(z\right)-rV\left(z\right)=-z$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$V\left(z\right)=z/r-a/r^2+R\mathrm{e}^{-\lambda z}+R'\mathrm{e}^{\mu z}, \tag{2}$$

где μ и $-\lambda$ — корни квадратного уравнения $0{,}5\sigma^2x^2-ax-r=0$:

$$\lambda=\left(\sqrt{a^2+2r\sigma^2}-a\right)/\sigma^2,\ \mu=\left(\sqrt{a^2+2r\sigma^2}+a\right)/\sigma^2. \tag{3}$$

Поскольку функция (2) с ростом z может расти не быстрее линейной только при $R'=0$, то

$$V\left(z\right)=z/r-a/r^2+R\mathrm{e}^{-\lambda z}. \tag{4}$$

Но $V(z)>0$ при $z>0$, а это возможно лишь при $R>0$. В таком случае функция (4) будет выпуклой и неограниченно возрастающей при $z\to-\infty$ и при $z\to\infty$. Пусть ξ — точка, в которой она достигает минимума.

Учтем теперь, что там, где функция $V(z)$ положительна, она совпадает со стоимостью машины в состоянии z. Поэтому в области $V(z)>0$ она должна быть неубывающей. Но слева от точки ξ функция (4) — убывающая, поэтому в точке ξ она не больше нуля. Справа от точки ξ функция (4) — возрастающая, а тогда найдется единственная точка $h\geq\xi$, где она обращается в нуль. Тогда при $z>h$ функция (4) будет положительной и, следовательно, совпадать со стоимостью машины в состоянии $z>h$. К тому же, машина в состоянии h будет иметь нулевую стоимость, так что ее следует утилизировать. Естественно, что так же надо поступать и с машинами в худших состояниях $z<h$.

Таким образом, мы получили, что стоимость машины описывается формулой (4) при $z\geq h$ и равна нулю при $z\leq h$.

Остается установить неизвестное значение h. Заметим вначале, что функция (4) при $z>h$ возрастающая и гладкая. Тогда ее правая производная в точке h неотрицательна: $V'(h+0)=q\geq0$. Докажем, что на самом деле она равна нулю.

Действительно, пусть $q>0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon>0$ будет $V(h+\varepsilon)\approx q\varepsilon$. Поэтому стоимость машины в состоянии $z=h+\varepsilon$ имеет порядок ε. За время ε эта машина принесет выгоды $z\varepsilon$ и окажется в (случайном) состоянии $w=z+\Delta z$, где будет иметь случайную стоимость S. Заметим, что $S=0$ при $w\leq h$ и $S=V(w)$ при $w>h$. В силу принципа ожидания выгод имеем $V\left(z\right)=z\varepsilon+\left(1-r\varepsilon\right)\mathbf{E}\left[S\right]$. Левая часть этого равенства имеет порядок ε, поэтому тот же порядок должно иметь $\mathbf{E}[S]$ — среднее значение стоимости машины через время ε. Оказывается, что такого не может быть!

Действительно, случайная величина $w=z+\Delta z=h+\varepsilon-a\varepsilon+\sigma\Delta B$ распределена по нормальному закону со средним значением $h+\varepsilon-a\varepsilon$ и дисперсией $\sigma^2\varepsilon$. Поэтому при достаточно малом ε с вероятностью, большей 0,14, будет $w>\left(h+\varepsilon-a\varepsilon\right)+\sigma\sqrt{\varepsilon}>h+0{,}5\sigma\sqrt{\varepsilon}$, а тогда $S=V\left(w\right)>V\left(h+0{,}5\sigma\sqrt{\varepsilon}\right)\approx0{,}5q\,\sigma\sqrt{\varepsilon}$. С дополнительной же вероятностью будет $S\geq0$. Поэтому $\mathbf{E}[V(w)]$ имеет порядок не меньше, чем $\sqrt{\varepsilon}$, хотя выше было показано, что оно имеет порядок ε. Полученное противоречие подтверждает, что $V'(h+0)=q=0$.

Тогда из равенств $V(h) = V'(h+0) = 0$ и (4) вытекает, что $hr^{-1} - ar^{-2} + R\mathrm{e}^{-\lambda h} = 0, r^{-1} - \lambda R\mathrm{e}^{-\lambda h} = 0.$ После преобразований отсюда и из (4) получаем

$$h = ar^{-1} - \lambda^{-1} = -0{,}5\lambda\sigma^2 r^{-1}, \quad R = \mathrm{e}^{\lambda h}/(\lambda r), \tag{5}$$

$$V(z) = \left(\mathrm{e}^{-\lambda(z-h)} + \lambda(z-h) - 1\right)/\lambda r. \tag{6}$$

СРОК СЛУЖБЫ МАШИНЫ

Обозначим (случайный) остаточный срок службы $\tau(z)$ машины, находящейся в состоянии $z>h$, через $\tau(z)$. Найдем его среднее значение $T(z)$ и коэффициент вариации $v(z)$. Для этого зафиксируем $p>0$ и рассмотрим производящую функцию $f(p,z) = \mathbf{E}[\mathrm{e}^{-p\tau(z)}]$. Поскольку машина через малое время dt окажется в состоянии $z - adt + \sigma dB$ и остаточный срок ее службы составит $\tau(z - adt + \sigma dB)$, то

$$f(p,z) = \mathbf{E}\left[\mathrm{e}^{-p\tau(z)}\right] = \mathbf{E}\left[\exp\left[-p\left\{dt + \tau(z - adt + \sigma dB)\right\}\right]\right] =$$

$$= \exp(-pdt)\mathrm{E}\left[f(p, z - adt + \sigma dB)\right] \approx \exp(-pdt)\left\{f(p,z) - f_z'(p,z)adt + f_{zz}''(p,z)0{,}5\sigma^2 dt\right\} \approx$$

$$\approx f(p,z) - pdtf(p,z) - f_z'(p,z)adt + f_{zz}''(p,z)0{,}5\sigma^2 dt.$$

Такое равенство возможно, только если $-pf(p,z) - f_z'(p,z)a + f_{zz}''(p,z)0{,}5\sigma^2 = 0.$ Общее решение этого уравнения имеет вид $f(p,z) = A\mathrm{e}^{-\theta z} + A'\mathrm{e}^{\vartheta z}$, где

$$\theta = \theta(p) = \left(\sqrt{a^2 + 2p\sigma^2} - a\right)/\sigma^2, \ \vartheta = \vartheta(p) = \left(\sqrt{a^2 + 2p\sigma^2} + a\right)/\sigma^2.$$

Но $0<f(p, z)\le 1$ при всех $z>h$, а это возможно только при $A' = 0$. К тому же $\tau(h) = 0$, так что $f(p, h) = 1$. Поэтому $f(p,z) = \mathbf{E}[\exp(-p\tau(z))] = \exp[-\theta(p)(z-h)]$. Найдем моменты и коэффициент вариации случайной величины $\tau(z)$, учитывая, что $\mathbf{E}[\tau(z)] = -f_p'(0,z)$, $\mathbf{E}[\tau^2(z)] = f_{pp}''(0,z)$:

$$T(z) = \mathbf{E}\left[\tau(z)\right] = (z-h)/a, \quad \mathbf{E}\left[\tau^2(z)\right] = \sigma^2(z-h)/a^3 + (z-h)^2/a^2,$$

$$v\left[\tau(z)\right] = \left(\sqrt{\mathbf{E}\left[\tau^2(z)\right] - T^2(z)}\right)/T(z) = \sigma/\sqrt{a(z-h)}.$$

Применим эти формулы к новой машине. Поскольку в наших единицах измерения $T(z_0) = 1$, $V(z_0) = 1$, отсюда и из (3), (5) и (6) вытекают соотношения, связывающие a, λ, z_0, h и σ: $1 = (z_0 - h)/a$, $v = \sigma/\sqrt{a(z_0 - h)}$, $\lambda = \left(\sqrt{a^2 + 2r\sigma^2} - a\right)/\sigma^2$, $h = -\lambda\sigma^2/(2r)$, $\exp(-\lambda(z \ -h)) + \lambda(z_0 - h) - 1 = \lambda r.$ Это позволяет выразить указанные параметры через r и v:

$$a = \eta r/\left(\mathrm{e}^{-\eta} + \eta - 1\right), \ \sigma = av, \ \lambda = \eta/a, \ h = -\eta a v^2/2r, \ z_0 = a + h, \tag{7}$$

где

$$\eta = \left(\sqrt{1 + 2rv^2} - 1\right)/v^2. \tag{8}$$

ЗАВИСИМОСТЬ СТОИМОСТИ ОТ ВОЗРАСТА

В этом разделе мы будем для каждого t определять среднюю стоимость машин возраста t. При этом нам будет удобно измерять состояние машин по-другому — показателем $y = z - h$. Тогда в силу (7) состоянием новой машины будет $y_0 = z_0 - h = a$, рентабельным машинам будут отвечать состояния $y>0$, а стоимость машины в состоянии y, обозначим ее $W(y)$, в силу (6) будет выражаться формулой

$$W(y) = \left(\mathrm{e}^{-\lambda y} + \lambda y - 1\right)/(\lambda r). \tag{9}$$

Рентабельная машина в состоянии y через время t (если только ее не утилизируют раньше) окажется в случайном состоянии и, следовательно, будет иметь и случайную стоимость. Среднюю стоимость рентабельных машин, которые t лет тому назад были в состоянии y, обозначим через $W(y, t)$, тогда

$$W(y,0) = W(y), \ W(0,t) = 0. \tag{10}$$

Поскольку машина в состоянии $y>0$ через малое время dt окажется в случайном состоянии $y - adt + \sigma dB$, то с точностью до малых более высокого порядка

$$W(y, t+dt) = \mathrm{E}\left[W(y - adt + \sigma dB, t)\right] \approx W(y,t) - aW_y'(y,t)dt + 0{,}5\sigma^2 W_{yy}''(y,t)dt.$$

Отсюда вытекает уравнение в частных производных для функции $W(y, t)$:

$$W'_t(y,t) = -aW'_y(y,t) + 0{,}5\sigma^2 W''_{yy}(y,t). \quad (11)$$

Сделаем в нем подстановку:

$$W(y,t) = \mathrm{e}^{\beta y + \gamma t}\, U(y,t), \quad \text{где} \quad \beta = a/\sigma^2, \quad \gamma = -a^2/(2\sigma^2). \quad (12)$$

Тогда (12) преобразуется в уравнение теплопроводности на полупрямой $U'_t(y,t) = 0{,}5\sigma^2 U''_{yy}(y,t)$, краевые условия которого вытекают из (9), (10) и (12):

$$U(y,0) = \mathrm{e}^{-\beta y}\, W(y,0) = \mathrm{e}^{-\beta y}\, W(y) = \left(\mathrm{e}^{-(\lambda+\beta)y} + (\lambda y - 1)\mathrm{e}^{-\beta y}\right)/(\lambda r), \quad U(0,t) = 0.$$

Решение такого уравнения задается известной формулой (Тихонов, Самарский, 2004):

$$U(y,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty U(x,0) \left[\exp\left\{ -\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t} \right\} - \exp\left\{ -\frac{(x+y)^2}{2\sigma^2 t} \right\} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty \frac{\exp\{-(\lambda+\beta)x\} + (\lambda s - 1)\exp\{-\beta x\}}{\lambda r} \left[\exp\left\{ -\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t} \right\} - \exp\left\{ -\frac{(x+y)^2}{2\sigma^2 t} \right\} \right] dx.$$

Поэтому в силу (12) имеем

$$W(y,t) = \exp\left\{ \frac{ay}{\sigma^2} - \frac{a^2 t}{2\sigma^2} \right\} U(y,t). \quad (13)$$

Вспомним теперь, что $W(y, t)$ обозначает среднюю стоимость машин, которые за t лет до этого были в состоянии y. Тогда $W(a, t)$ будет средней стоимостью машин возраста t (за t лет до этого они находились в состоянии $a = y_0$, т.е. были новыми), а $W(a, 0)$ — стоимостью новых машин, которую мы приняли за единицу: $W(a, 0) = 1$. В таком случае $W(a, t)$ совпадает с $k(t)$ — искомым средним коэффициентом годности машин возраста t.

Явное выражение для $k(t)$ мы получим, если положим в (12) $\sigma = av$, $\lambda = \eta/a$ из (7), $y=a$, выразим входящие туда интегралы через функцию Φ стандартного нормального распределения, а результат подставим в (13):

$$\begin{aligned} k(t) = \frac{1}{\lambda r} \Bigg\{ &\Phi\left(\frac{1-(\eta v^2+1)t}{v\sqrt{t}} \right) \mathrm{e}^{\eta(0{,}5\eta v^2+1)t-\eta} - (1+\eta t-\eta)\,\Phi\left(\frac{1-t}{v\sqrt{t}} \right) - \\ &-\Phi\left(\frac{-1-(\eta v^2+1)t}{v\sqrt{t}} \right) \mathrm{e}^{(\eta+2v^{-2})(0{,}5\eta v^2 t+1)} + (1+\eta t+\eta)\,\Phi\left(\frac{-1-t}{v\sqrt{t}} \right) \mathrm{e}^{2/v^2} \Bigg\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, зависимость коэффициента годности от относительного возраста задается формулой (14), куда следует подставить $\eta = (\sqrt{1+2rv^2} - 1)v^{-2}$ из формулы (8). Как мы видим, динамика коэффициентов годности определяется здесь только двумя параметрами — η и v. На самом деле влияющих исходных параметров три, поскольку величина η зависит от нормированной ставки дисконтирования, являющейся произведением обычной рыночной доналоговой номинальной ставки на средний (полный) срок службы машин.

Простые, но утомительные вычисления показывают, что $k'(0) = -a\,\mathrm{e}^{-\eta}\left[\mathrm{e}^{\eta} - 1 - 0{,}5\eta v^2\right]/r < 0$. Между тем, многие оценщики убеждены, что в первые годы эксплуатации стоимость машины практически не меняется, т.е. $k'(0)=0$. Данная модель, как и многие другие, описанные, например, в (СНС 2008, (Смоляк, 2014; Федотова, 2018)), подтверждает необоснованность такого мнения.

Можно показать, что $k(t)$ при больших t ведет себя примерно как $\exp\{-0{,}5t\nu^{-2}\}$. В частности, чем меньше коэффициент вариации срока службы, тем быстрее убывает $k(t)$. Экспоненциальный характер убывания коэффициентов годности с возрастом вытекает и из альтернативных моделей обесценения машин, а также достаточно хорошо согласуется с регрессионными зависимостями, построенными по фактическим данным о ценах подержанных машин различного назначения.

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

При построении модели для упрощения был сделан ряд допущений. В этом разделе мы попробуем от них отказаться.

Учет инфляции. Для учета инфляции оценщики определяют фактически сложившиеся в ретроспективном периоде темпы роста цен на машины, которые затем прогнозируются на последующий период. Использовать при этом цены вторичного рынка оказывается невозможным и приходится измерять инфляцию темпами роста цен на новые машины. Тем самым принимается, что инфляция одинаково влияет на цены новых и подержанных машин и, следовательно, не влияет на коэффициенты годности машин. Инфляция такого типа может быть названа *групповой*. Допущение о групповом характере инфляции при оценке машин принимается и в США (см., например, 2020 Personal property manual[5]; State of Wyoming personal property valuation manual 2019).

Будем считать инфляцию групповой и обозначим через i темп роста цен на машины рассматриваемой марки, прогнозируемый на ближайшее время после даты оценки. В таком случае стоимости машин, находящихся в одном и том же состоянии в моменты 0 и dt, будут различаться в $1+idt$ раз.

Применим принцип ожидания выгод к рентабельной машине, находящейся в момент 0 в состоянии z, и малому периоду времени dt. За этот период машина принесет выгоды в сумме zdt, а в момент dt перейдет в (случайное) состояние $z-adt+\sigma dB$. Тогда ее стоимость окажется в $1+idt$ раз больше, чем стоимость машины, находившейся в момент 0 в том же состоянии — $(1+idt)V(z-adt+\sigma dB)$. Учитывая, что эта стоимость выражена в ценах на момент dt, для ее дисконтирования, согласно МСО, должна использоваться доналоговая, безрисковая и *номинальная* ставка r. Тогда

$$V(z)=zdt+(1-rdt)\mathrm{E}\big[(1+idt)V(z-adt+\sigma dB)\big]\approx zdt+\big[1-(r-i)dt\big]\mathrm{E}\big[V(z-adt+\sigma dB)\big].$$

Но это равенство отличается от (1) только ставкой дисконтирования. Другими словами, полученные ранее формулы сохраняют силу и в условиях групповой инфляции, если в них использовать *особую* ставку дисконтирования, отличающуюся от доналоговой безрисковой номинальной уменьшением на темп групповой инфляции (Смоляк, 2016).

Между тем, в МСО утверждается, что если приносимые машиной выгоды (чистые доходы, денежные потоки) измеряются в текущих, учитывающих инфляцию, ценах, для их дисконтирования следует использовать реальную ставку. Но реальная ставка получается из номинальной путем корректировки на средний темп роста цен в стране, который может отличаться от темпа роста цен на рассматриваемые машины. Поэтому соответствующие положения стандартов оценки следовало бы скорректировать.

Учет аварий. Модель предусматривала утилизацию машины только при достижении ею граничного состояния. Однако машины в любом ТС могут выводиться из строя вследствие аварий (например, из-за повреждения стихийными бедствиями, ДТП с мобильными машинами, низкого качества обрабатываемого материала, перебоев в снабжении ресурсами, ошибок управляющего персонала и др.). Связанные с этим риски должны учитываться отдельно. Простейшая модель такого учета исходит из допущения, что вероятность аварии в единицу времени — интенсивность аварий — не зависит от состояния машины. Нетрудно убедиться, что в таком случае все полученные ранее формулы остаются в силе, если увеличить особую ставку дисконтирования на интенсивность аварий.

Учет утилизационной стоимости. В модели утилизационная стоимость U машин принималась нулевой. На самом деле относительная утилизационная стоимость машин $u = U/V_0$ (отношение утилизационной стоимости машины к стоимости новой машины той же марки) невелика и обычно составляет 0,03–0,09. В нашей модели $V_0 = 1$, так что $u = U$. При $u \neq 0$ модель придется корректировать.

Представим стоимость машины V суммой двух слагаемых: $V=(V-u)+u$. Первое слагаемое отражает стоимость машины как средства выполнения определенных работ (в МСФО оно именуется амортизируемой величиной), а второе — как объекта утилизации. Если отложить утилизацию машины на малое время dt, то уменьшение дисконтированной суммы выгод от этого составит $u(1-rdt)-u=ru\,dt$, или ru в малую единицу времени. Поэтому оказывается удобным включить в состав выгод от эксплуатации машины упущенную выгоду от ее утилизации. Динамика таких

[5] 2020 Personal property manual / Arizona department of revenue. Personal property unit.

скорректированных выгод будет, как и раньше, описываться винеровским процессом, но с иным (уменьшенным на ru) начальным значением. Правда, при этом дисконтированная сумма скорректированных выгод от использования новой машины, т.е. ее стоимость как средства выполнения определенных работ, окажется равной $1 - u$, а не 1. Тогда средний коэффициент годности машин возраста t окажется равным не $k(t)$, а $(1 - u)k(t)+u$.

ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ВЫПОЛНЯЕМЫХ РАБОТ И ПРИНОСИМЫХ МАШИНОЙ ВЫГОД

До сих пор предполагалось, что владелец машины может оценить приносимые машиной выгоды в любом периоде. Однако это возможно не всегда. В большинстве случаев владелец машины может измерять объем выполняемых ею работ (в физических единицах) и операционные затраты на их выполнение, но не может оценить рыночную стоимость этих работ. В такой ситуации затруднительно правильно выбрать момент прекращения эксплуатации машины. Данная модель может оказаться полезной при решении этой проблемы.

При этом придется, но только в данном разделе, использовать обычные единицы измерения времени и стоимости и ввести следующие обозначения: C — стоимость машины (руб.), L — средний срок службы машин (годы), F — интенсивность приносимых машиной выгод (руб./год), Q — интенсивность операционных затрат (руб./год), s — стоимость единицы работ (руб.), P — производительность машины (единицы работы в год). Показатели новой машины, как и раньше, будем отмечать нижним индексом «0».

Легко убедиться, что интенсивность приносимых машиной выгод определяется формулой $F = sP - Q$. Интенсивность, выраженная в единицах стоимости на единицу времени, ранее обозначалась через z, причем за единицу стоимости принималась стоимость новой машины C_0 (руб.), а за единицу времени — средний срок ее службы L (лет). Поэтому интенсивность приносимых машиной выгод в обычных единицах измерения составит $F = zC_0/L$ (руб./год). Но тогда $sP - Q = zC_0/L$. Для новой машины это равенство примет вид $sP_0 - Q_0 = z_0C_0/L$, откуда получаем

$$s = \left(Q_0 + z_0C_0/L\right)/P_0. \tag{15}$$

Правая часть (15) отражает скорректированные удельные затраты на выполнение работ, отличающиеся тем, что в них к обычным операционным затратам добавлена рыночная стоимость аренды новой машины за единицу времени (совпадающая с интенсивностью приносимых ею выгод). Подобного типа показатели широко используются, например, в США при анализе и планировании работы машин (Langemeier, 2017). Правда, роль стоимости аренды там выполняют финансовые затраты или стоимость владения (сумма процента на капитал, вложенный в новую машину, и подсчитанной тем или иным способом ее амортизации). С помощью (15) оценить стоимость выполняемых машиной работ можно, даже если эти работы непосредственно не обращаются на рынке (например, промежуточные операции в технологическом процессе). Поэтому, периодически определяя производительность машины и операционные затраты за относительно небольшие периоды, можно выяснить, когда принесенные выгоды в единицу времени достигнут граничного уровня.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ И ВЫВОДЫ

Как было показано ранее, зависимости $k(t)$ определяются коэффициентом вариации срока службы v и нормированной ставкой дисконтирования r. Для реальных машин средние сроки службы T обычно составляют 7–30 лет, а коэффициенты их вариации v — 0,22–0,8. Рыночные ставки дисконтирования в разных странах и в разные периоды различаются. Сильно различаются и темпы роста цен на машины. К примеру, в последнее время в России темп роста цен на машины и оборудование разного назначения был 1–5% в год. Рыночная номинальная доналоговая ставка дисконтирования (установленная на основе кривой бескупонной доходности ОФЗ) составляла в последние годы около 8% годовых. Интенсивность аварий машин обычно не превышает 0,02. В таком случае особая ставка дисконтирования будет лежать в пределах от 0,03 до 0,09. Умножая ее на средний срок службы, получим, что диапазон изменения нормированной ставки дисконтирования $r = 0{,}2$–$2{,}7$.

На рис. 1 приведены зависимости $k(t)$ для $r = 1{,}4$ и разных значений v (наибольшему, наименьшему и отвечающим трем выделенным ранее классам машин), а на рис. 2 — аналогичные зависимости для $v = 0{,}47$ и разных значений r.

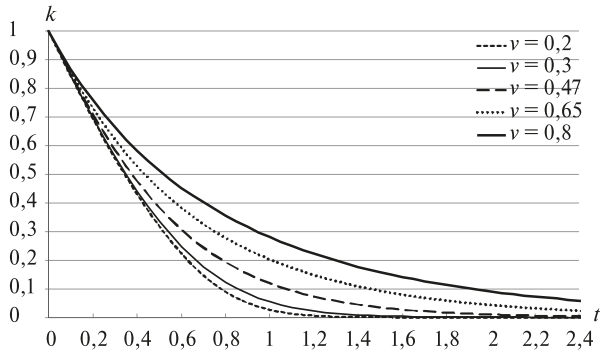

Рис. 1. Зависимости средних коэффициентов годности от относительного возраста для $r = 1{,}4$ и разных значений v

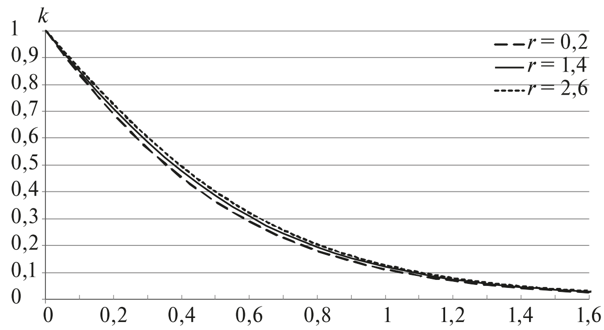

Рис. 2. Зависимости средних коэффициентов годности от относительного возраста для $v = 0{,}47$ и разных значений нормированной ставки дисконтирования $r = \mathrm{r}T$

Как мы видим, наиболее сильно динамика коэффициентов годности зависит от коэффициента вариации срока службы, тогда как изменения среднего срока службы и ставки дисконтирования на нее почти не влияют. Это оправдывает применение зависимостей коэффициентов годности от относительного возраста, ранее предложенное Л.А. Лейфером и отраженное, например, в (Лейфер, 2019).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

Аркин В.И., Сластников А.Д., Аркина С.В. (2004). Инвестирование в условиях неопределенности и задачи оптимальной остановки // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 11. № 1. С. 3–33. [**Arkin V.I., Slastnikov A.D., Arkina S.V.** (2004). Investing under uncertainty and optimal stopping problems. *Review of Applied and Industrial Mathematics*, 11, 1, 3–33 (in Russian).]

Аркин В.И., Сластников А.Д., Смоляк С.А. (2006). Оценка имущества и бизнеса в условиях неопределенности (проблемы «хвоста» и «начала») // *Аудит и финансовый анализ. Приложение. Сборник научных трудов*. № 1. С. 81–92. [**Arkin V.I., Slastnikov A.D., Smolyak S.A.** (2006). Appraisal of property and business in conditions of indeterminacy (a problem of “tail” and “beginnings”). *Audit and Financial Analysis. Application. Collection of Scientific Papers*, 1, 81–92 (in Russian).]

Булинский А.В., Ширяев А.И. (2005). Теория случайных процессов. М.: Физматлит. [**Bulinsky A.V., Shiryaev A.I.** (2005). *The theory of random processes*. Moscow: Fizmatlit (in Russian).]

Лейфер Л.А. (ред.). (2019). Справочник оценщика машин и оборудования. Корректирующие коэффициенты и характеристики рынка машин и оборудования. Изд. 2е. Нижний Новгород: ПЦМИО. 320 с. [**Leyfer L.A.** (ed.) (2019). *Reference book of the appraiser of machinery and equipment. Corrective factors and characteristics of the market of machinery and equipment.* 2nd ed. Nizhny Novgorod: Volga Center for Methodological and Informational Support of Assessment. 320 pp. (in Russian).]

Оксендаль Б. (2003). Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир. [**Øksendal B.** (2003). *Stochastic differential equations. An introduction with applications*. Translated from the English. Moscow: Mir. Originally published by New York: Springer Verlag Heidelberg, 2000 (in Russian).]

Острейковский В.А. (2003). Теория надежности: учебник для вузов. М.: Высшая школа. [**Ostreykovsky V.A.** (2003). *Reliability theory: Textbook for universities*. Moscow: Vysshaya schkola (in Russian).]

Смоляк С.А. (2014). Зависимость стоимости машин от возраста: проблемы и модели // Аудит и финансовый анализ. № 5. С. 138–150. [**Smolyak S.A.** (2014). The dependence of value of equipment on age: Problems and models. *Audit and Financial Analysis*, 5, 138–150 (in Russian).]

Смоляк С.А. (2016). Стоимостная оценка машин и оборудования (секреты метода ДДП). М.: Опцион. [**Smolyak S.A.** (2016). Machinery and equipment valuation (secrets of the DCF method. Moscow: Option (in Russian).]

Смоляк С.А. (2017). О вероятностных моделях для оценки остаточного срока службы и износа машин и оборудования // Имущественные отношения в Российской Федерации. № 2 (185). С. 75–87. [**Smolyak S.A.** (2017). On the probabilistic models for assessment of remaining useful life and depreciation of machinery and equipment. *Property Relations in Russian Federation,* 2 (185), 75–87 (in Russian).]

Смоляк С.А. (2020). О динамике обесценения машины со случайным сроком службы. // *Труды ИСА РАН*. Т. 70. № 1. С. 55–64. [**Smolyak S.A.** (2020). On the dynamics of depreciation of machines with a random service life. *Proceedings of the Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences*, 70, 1, 55–64 (in Russian).]

Тихонов А.Н., Самарский А.А. (2004). Уравнения математической физики. М.: МГУ, Наука. [**Tikhonov A.N., Samarsky A.A.** (2004). *Equations of mathematical physics*. Moscow: Moscow State University, Nauka (in Russian).]

Федотова М.А. (ред.) (2018). Оценка машин и оборудования: учебник (изд. 2-е). М.: ИНФРА-М. [**Fedotova M.A.** (ed.) (2018). *Machinery and equipment valuation: Textbook*. 2nd ed. Moscow: INFRA-M (in Russian).]

Abdel-Hameed M. (2014). *Degradation processes*. Berlin: Heidelberg, Springer.

Cui L., Huang J., Li Y. (2016). Degradation models with Wiener diffusion processes under calibrations. *IEEE Transactions on Reliability*, 65 (2), 613–623.

Dascar S.M.C., Nan M.S., Dascar S. (2015). Study of reliability modeling and performance analysis of haul trucks in quarries. In: *Advances in information science and computer engineering*. Proceedings of the 9th International Conference on Computer Engineering and Applications. WSEAS Press, 143–150.

Dixit A.K., Pindyck R.S. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton: Princeton University Press.

Erumban A.A. (2008). Lifetimes of machinery and equipment: Evidence from Dutch manufacturing. *Review of Income and Wealth*. *Series 54*, 2, 237–268.

Hafaifa A., Abdellah K., Mouloud G., Hadroug N. (2016). Reliability analysis using Weibull distribution applied to a booster pump used in oil drilling installations. *Journal of the Technical University at Plovdiv. Fundamental Science and Applications*, 22, 31–37.

Kahle W., Lehmann A. (2010). T*he Wiener process as a degradation model: Modeling and parameter estimation*. Boston: Birkhäuser.

Kahle W., Mercier S., Paroissin C. (2016). *Degradation processes in reliability*. Vol. 3. Mathematics and statistics series. Mathematical models and methods in reliability set. DOI: 10.1002/9781119307488

Kumar A.R., Krishnan V. (2017). A study on reliability analysis of Haul Trucks. *International Advanced Research Journal in Science, Engineering and Technology*, 4, 3, 76–85. DOI: 10.17148/IARJSET.2017.4317 76

Langemeier M. (2017). Farm machinery costs and custom rates. *Farmdoc Daily,* 7, 161. Department of Agricultural and Consumer Economics, University of Illinois at Urbana-Champaign, September 1.

Melchor-Hernández C.L., Rivas-Daválos F., Maximov S., Coria V., Moreno-Goytia E.L. (2015). An analytical method to estimate the Weibull parameters for assessing the mean life of power equipment. *Electrical Power and Energy Systems,* 64, 1081–1087.

Nomura K., Suga Y. (2018). *Measurement of depreciation rates using microdata from disposal survey of Japan*. The 35th IARIW General Conference. Copenhagen, Denmark.

Noortwijk J.M. (2009). A survey of the application of gamma processes in maintenance. *Reliability Engineering & System Safety*, 94 (1), 2–21.

Oguchi M., Fuse M. (2015). Regional and longitudinal estimation of product lifespan distribution: A case study for automobiles and a simplified estimation method. *Environmental Science & Technology*, 49, 1738–1743.

Rincon-Aznar A., Riley R., Young G. (2017). *Academic review of asset lives in UK*. London: National Institute of Economic and Social Research.

Touama H.Y. (2014). Statistical models and parametric methods to estimate the reliability and hazard rate function of Weibull distribution. *European Journal of Business and Management*, 6, 38, 96–102.

Trappey C.V., Trappey A.J.C., Ma L., Tsao W.-T. (2014). Data driven modeling for power transformer lifespan evaluation. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 23 (1), 80–93. DOI: 10.1007/s11518-014-5227-z

Ye Z.S., Chen N. (2014). The inverse Gaussian process as a degradation model. *Technometrics*, 56 (3), 302–311.

Wang X., Lin S., Wang S., He Z., Zhao C. (2016). Remaining useful life prediction based on the Wiener process for an aviation axial piston pump. *Chinese Journal of Aeronautics*, 29 (3), 779–788.

Wang X., Wang B.X., Wu W., Hong Y. (2020). *Reliability analysis for accelerated degradation data based on the Wiener process with random effects*. Quality and Reliability Engineering International. DOI:10.1002/qre.2668

Valuation of machinery and equipment subject to the Wiener degradation process

S.A. Smolyak,
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;
e-mail: smolyak1@yandex.ru

Received 12.04.2021

Abstract. We propose a model describing the decrease in the market value of machines (depreciation) with age. Usually it is characterized by the percent good factor, i.e. the ratio of machine's value to the value of similar new machinery item. Often, appraisers know about used machinery item only by its age, but not by its performance. Therefore, for the valuation of the machinery item of a known age, they have to use the mean (for machines of this age) of percent good factor. In the proposed model, the state of the machine is characterized by the intensity of the benefits it brings. In this case, the benefits from using the machine in a certain period are defined as the market value of the work performed by it minus operating costs. We describe the change in the intensity of benefits over time by Wiener process with negative drift. This allows us to take into account the tendency for the performance of machine to deteriorate during operation. The market value of a machine is defined as the maximum mathematical expectation of the sum of discounted benefits from its use. It is shown that it corresponds to the moment the machine reaches a certain boundary state. The parameters of Wiener process (drift and volatility) are expressed through the known characteristics of the machine's durability, namely the average value and the coefficient of variation of the service life. The dependences of the mean percent good factor of machines on the relative age (the ratio of age to the average service life) are found. It turned out that these correlations are almost independent of the discount rate and average service life.

Keywords: machinery, equipment, degradation, Wiener process, service life, valuation, DCF method, depreciation, percent good factor.

JEL Classification: D24, D46, D81, G12.

DOI: 10.31857/S042473880016422-3