
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Подходы Value-at-Risk и Expected Shortfall для оценки премий опционов и вероятности дефолта на основе ARMA-моделей

© 2021 г. Н.И. Берзон, Д.И. Бобровский, Д.Е. Вилкул, В.В. Мезенцев, Д.В. Дубинский

Н.И. Берзон,

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва;
e-mail: nberzon@hse.ru

Д.И. Бобровский,

Акционерное общество «ВТБ Капитал», Москва; e-mail: mitek_bobrovskij@inbox.ru

Д.Е. Вилкул,

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва;
e-mail: dvilkul@hse.ru

В.В. Мезенцев,

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва;
e-mail: Slavahse@gmail.com

Д.В. Дубинский,

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва;
e-mail: ddubinskiy@hse.ru

Поступила в редакцию 01.02.2021

Аннотация. Потребность в решении вопроса управления риском породила ряд моделей для оценки вероятности дефолта, а также специальный инструмент, позволяющий продавать кредитный риск, — кредитный дефолтный своп (credit default swap, CDS). С момента появления в 1994 г. и до кризиса 2008 г. рынок CDS активно рос, а затем резко сжался. В настоящий момент в странах с развивающимися экономиками (в том числе в России) рынок CDS практически отсутствует. В настоящей статье делается попытка усовершенствовать существующие модели оценки CDS за счет использования моделей дискретного времени, позволяющих точнее оценивать и прогнозировать динамику выбранного актива, а также за счет новых моделей ценообразования опционов, учитывающих степень принятия риска продавцом опциона. Данная статья посвящена параметрическим моделям оценки опционов в дискретном времени, которые позволяют получить более точные результаты, чем традиционная модель Блэка–Шоулза в непрерывном времени. Улучшение качества оценки достигается за счет трех факторов: более детального учета свойств временных рядов базового актива (в частности, автокорреляции и тяжелых хвостов), выбора оптимального числа параметров и использования «стоимости под риском» (Value-at-Risk) подхода. В результате исследования были получены выражения для премий европейских опционов пут и колл для заданного уровня риска в предположении, что доходность базового актива подчиняется стационарному ARMA-процессу с нормальными или студентовскими ошибками, а также выражение для кредитного спреда при аналогичных предположениях. Простота ARMA-процесса, положенного в основу модели, является компромиссом между сложностью калибровки модели и качеством описания динамики активов на фондовом рынке. Данный подход позволяет учесть как дискретность в ценообразовании активов, так и текущую структуру и наличие взаимосвязей для временного ряда рассматриваемого актива (в отличие от модели Блэка–Шоулза), что потенциально позволяет лучше управлять портфелем на фондовом рынке.

Ключевые слова: модели оценки опционов, ARMA-модели, параметрические модели, Value-at-Risk, Expected Shortfall.

Классификация JEL: G13, G17.

DOI: 10.31857/S042473880016417-7

1. ВВЕДЕНИЕ

При принятии инвестиционных решений вопрос о том, насколько вероятен дефолт, иными словами, насколько велик кредитный риск, имеет первостепенное значение. Потребность в решении этого вопроса породила ряд моделей для оценки вероятности дефолта, а также специальный инструмент, позволяющий продавать кредитный риск, — *кредитный дефолтный своп* (credit default swap, CDS). С момента своего появления в 1994 г. и до кризиса 2008 г. рынок CDS активно рос, а затем резко сжался. Причем в настоящий момент в странах с развивающимися экономиками (в том числе в России) рынок CDS практически отсутствует. В настоящей статье делается попытка усовершенствовать существующие модели оценки CDS за счет использования моделей дискретного времени, позволяющих точнее оценивать и прогнозировать динамику выбранного актива, а также за счет новых моделей ценообразования опционов, которые позволяют продавцам опционов учитывать степень принятого ими риска.

Первая формула для оценки европейского опциона была получена в работе (Black, Scholes, 1973). В дальнейшем эмпирический анализ показал, что при применении данного подхода наблюдаются систематические ошибки, в частности так называемая улыбка волатильности и тенденция недооценки краткосрочных опционов «вне денег», — связанные с предположениями этой модели о постоянстве дисперсии и логнормальности распределения.

Авторы предложенных впоследствии моделей корректировали эти предпосылки таким образом, чтобы они соответствовали наблюдаемым свойствам временных рядов доходности актива. В частности, учитывали предсказуемость доходности (Fama, French, 1988; Jegadeesh, 1990; Lo, MacKinlay, 1988); кластеризацию волатильности (Hull, White, 1987; Wiggins, 1987; Bakshi, Cao, Chen, 1997; Lo, Wang, 1995; Bates, 2000) и тяжелые хвосты.

При этом параллельно развивались модели в непрерывном времени (к которым относится классическая модель Блэка–Шоулза (далее — B–S)) и модели в дискретном времени, основой для которых стали работы (Brennan, 1979; Rubinstein, 1976). Следует отметить (Stentoft, 2011), что до недавнего времени дискретные и непрерывные модели исследовали независимо друг от друга. К тому же отсутствовали эмпирические исследования, которые бы сравнивали эффективность этих двух классов моделей.

Среди предложенных моделей можно выделить три основные группы. Модели, основывающиеся на предположении о предсказуемости доходности актива, построены на процессе Кокса–Ингерсолла–Росса (Heston, 1993), процессе Орнштейна–Уленбека (Barndorff-Nielsen, Shephard, 2001) и ARMA-процессе (Hafner, Herwartz, 2000; Hsu, Breidt, 2009; Wu, 2008; Liu et al., 2011). Модели, реализующие идею кластеризации волатильности, представляют собой различные разновидности GARCH (Duan, 1995; Christoffersen, Jacobs, 2004; Hsieh, Ritchken, 2005). Также были предложены модели, объединяющие авторегрессионную и гетероскедастичную составляющие, ARMA-GARCH (Goode, Kim, Fabozzi, 2015; Xi, 2013), в том числе с учетом тяжелых хвостов (Spierdijk, 2014).

Данная статья продолжает развивать тему оценки опционов, уделяя особое внимание автокорреляции временного ряда доходностей базового актива в дискретном времени. При этом если классическая оценка опциона, ранее полученная в рамках данного подхода, не учитывает отношения продавца опциона к риску, то предлагаемая нами модель включает расчет уровня убытков продавца опциона, который не будет превышен с вероятностью 95%, а также *ожидаемое значение убытков* в оставшихся 5% случаев (т.е. расчет *Value-at-Risk* (VaR), или *expected shortfall* (ES)). С учетом того что убытки продавца опциона теоретически неограничены, представляется, что учет показателей риска в рамках модели может существенно повысить ее ценность для практического использования.

Основным результатом данной работы является вывод формул для премии опциона с учетом VaR, или ES, в предположении, что динамика цены базового актива подчиняется ARMA-процессу с гауссовскими или студентовскими инновациями. Кроме того, в заключительной части статьи получено выражение, которое позволяет рассчитать кредитный спред для заданной цены опциона.

При расчете кредитного спреда в данной работе используется подход, основанный на структурной модели, которая получила такое название в литературе (Sundaresan, 2013; Jovan, 2010), в силу того что она связывает риск дефолта со структурой активов фирмы (Merton, 1974). В основе структурных моделей лежит идея о том, что стоимость акций компании является опционом колл на

активы компании с ценой сделки «страйк», равной стоимости ее обязательств. Основоположниками данного класса моделей считаются Ф. Блэк и М. Шоулз, а также Р. Мертон. Мертон рассмотрел кредиторскую задолженность компании как требование, которое может быть обращено на ее стоимость, и использовал формулу ценообразования опционов Блэка–Шоулза для оценки вероятности дефолта компании. В рамках данной модели предоставление кредита трактуется как покупка активов компании у акционеров и передача им опциона колл на данные активы с ценой исполнения, равной стоимости кредита, и временем исполнения, равным сроку погашения кредита.

Кратко остановимся на истории этой модели. В 1973 г. в статье «Оценка опционов и корпоративных обязательств» американские ученые Ф. Блэк и М. Шоулз (Black, Scholes, 1973) предложили принципиально новый подход к оценке стоимости опционов, основанный на стоимости компании. В статье была высказана идея, что подобным образом можно оценивать и обязательства компании: держатели акций могут рассматриваться как обладатели опциона колл на стоимость ее активов, при том что этим правом их наделили держатели облигаций. Через год данный подход расширил Р. Мертон (Merton, 1974) для анализа и оценки корпоративных облигаций и появился класс моделей оценки активов Блэка–Шоулза–Мертон (BSM).

Структурные модели, они же модели стоимости фирмы, или модели на основе стоимости акций, являются расширенными версиями изначальной модели BSM. Они ставят перед собой достаточно фундаментальные цели — получить взаимосвязь стоимости акций и долговых инструментов, выпущенных компанией, иначе говоря, найти зависимость между акционерным капиталом и долгом компании. Известно, что держатели долговых инструментов имеют первоочередное право получать инвестированные в компанию средства и только потом свои средства получают акционеры. Таким образом, капитализация — остаточная стоимость компании, или то, что остается после выплаты долговых обязательств. Следовательно, теоретически, капитализация может быть отрицательной величиной, если стоимость активов меньше долговых обязательств (это и есть момент дефолта). Заметим, что на практике под рыночной капитализацией компании понимают суммарную стоимость акций, которая, очевидно, неотрицательна. Однако в данном случае речь идет именно о справедливом значении капитализации, которое, очевидно, может отличаться от текущей оценки рынком. В случае если существует акционерный капитал с отрицательной стоимостью, то акционеры могут избавиться от него без каких-либо издержек для себя. Иначе говоря, акционеры не реализуют опцион колл и оставляют фирму кредиторам — держателям долга, и в этом случае компания объявляет дефолт. Таким образом, с помощью структурной модели можно оценить практически любой инструмент, зависящий от кредитного спреда, так как любой чувствительный к кредитному качеству инструмент можно представить как опцион на стоимость компании.

2. РАСЧЕТ ПРЕМИЙ ОПЦИОНОВ В МОДЕЛИ МЕРТОНА И ЕЕ МОДИФИКАЦИЯХ

Динамика стоимости активов компании в модели Мертон (и классической модели Блэка–Шоулза) записывается в виде стохастического дифференциального уравнения, определяющего геометрическое броуновское движение:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

где S_t — стоимость актива в момент времени t , μ — дрифт цены, или ожидаемая доходность; σ — волатильность актива, dW_t — винеровский процесс.

Исходя из предположений классической модели, премии опционов описываются следующими формулами:

$$\begin{aligned} Call(S, t) &= S\Phi(d_1) - Strike e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \\ Put(S, t) &= Strike e^{-rN} \Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1(t, N)), \end{aligned}$$

где

$$d_1 = \left[\ln(S / Strike) + (r + 0,5\sigma^2)(T - t) \right] / (\sigma\sqrt{T - t}), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t},$$

$Call(S, t)$ — текущая стоимость опциона колл в момент t ; S — текущая цена базисного актива; $\Phi(\cdot)$ — кумулятивная функция плотности вероятности для стандартного нормального распределения;

Strike — цена исполнения опциона; r — непрерывно начисляемая безрисковая процентная ставка; T — момент экспирации опциона; σ — волатильность непрерывной доходности базисного актива.

Описанная выше модель, основанная на геометрическом броуновском движении, является далеко не единственным способом описания динамики базового актива и, вероятнее всего, наилучшим — в силу наличия ряда явных недостатков. В частности, неизменность параметров μ и σ противоречит наблюдаемым фактам, связанным с кластеризацией волатильности, а нормальность распределения цены акции в момент T и линейный характер ее изменения относительно текущего значения являются крайне жесткими ограничениями.

Необходимо отметить, что в качестве динамики базового актива могут рассматриваться и иные случайные процессы непрерывного времени, предполагающие те или иные дополнительные свойства случайного процесса, описывающего динамику базового актива (например, модель Орнштейна–Улунбека (Lo, Wang, 1995)).

В силу дискретности временного ряда биржевых котировок нам видится предпочтительным переход от моделей непрерывного времени к моделям дискретного времени в контексте параметрических моделей. Данные модели позволяют учитывать широкий спектр особенностей входящих данных. В данной статье будет рассмотрен один из типов таких моделей — ARMA-модели (авторегрессии скользящего среднего). Применение данных моделей основывается, с одной стороны, на большом числе эмпирических данных о наличии тех или иных особенностей временных рядов рыночных данных, например автокорреляции, гетероскедастичности, TS- и DS-трендов, а с другой стороны — простоту описания и разработанную методологию построения моделей: методы оценки параметров моделей, выбора наилучшей (с точки зрения описания текущего временного ряда, прогнозов и избыточности параметров) по различным критериям возможности построения прогноза динамики рыночной цены актива, возможность построения точечных и интервальных прогнозов для рассматриваемого временного ряда на заданном временном горизонте.

В работах (например, (French, Roll, 1986; Conrad, Kaul, 1988; Fama, French, 1988; Lo, MacKinlay, 1988; Jegadeesh, 1990; Lehmann, 1990)) приведены исследования, подтверждающие наличие автокорреляций и временных рядов финансовых данных; в статьях (Duan, 1995; Hsieh, Ritchken, 2000; Stentoft, 2011) подтверждается наличие гетероскедастичности.

В работе (Huang, Wu, 2008) для оценки европейских опционов колл и пут была получена формула, аналогичная формуле Блэка–Шоулза в классическом случае:

$$\begin{aligned} Call(S, t) &= S\Phi(d_1(t, N)) - Strike e^{-rN} \Phi(d_2(t, N)), \\ Put(S, t) &= Strike e^{-rN} \Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1(t, N)), \end{aligned}$$

где $T-t = N$,

$$d_1(t, n) = \left[\ln\left(\frac{S}{Strike}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_n^2\right)n \right] / \sigma_n \sqrt{n}, \quad d_2(t, n) = d_1(t, n) - \sigma_n \sqrt{n},$$

$$\sigma_n^2 = \left(\sum_{i=1}^n (\sigma B_i^n)^2 \right) / n, \quad B_i^N = \sum_{x=0}^{N-i} \theta_x(x),$$

$$y_j(k) = {}_j y_1(k-1) + 1_{(j < p)} y_{j+1}(k-1), \quad j = 1, \dots, p;$$

$$\theta_j(k) = \begin{cases} \beta_{j-k} y_1(k-1) + 1_{(j < k+q)} \theta_j(k-1), & j \geq k; \\ \theta_j(j), & j < k; \end{cases}$$

$$y_1(-1) = 1; \quad y_j(0) = \varphi_i; \quad \theta_j(0) = \beta_j; \quad i = 1, \dots, p; \quad j = 0, \dots, q.$$

Цена базового актива в данном случае подчиняется соотношению

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^p \varphi_i \ln \frac{S_{t-i}}{S_{t-i-1}} + \sigma \sum_{j=0}^q \beta_j Z_{t-j}^P,$$

где p и q — порядки AR- и MA-частей рассматриваемого процесса $\varphi_i \in \mathbb{R}$ и $\beta_j \in \mathbb{R}$ — соответствующие коэффициенты AR- и MA-частей, причем $\beta_0 = 1$; φ_0 — произвольное, $\sigma > 0$ — волатильность; Z_{t+1}^P — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение.

Соотношения для ARMA(p, q)-европейского опциона отличаются от формулы Блэка–Шоулза только тем, что волатильность σ_n зависит от параметров AR и MA вместо постоянной волатильности σ .

Данный подход хотя и является некоторым расширением базовой модели, но при этом сохраняет большую часть присущих данной модели недостатков, так как не учитывает прогноза динамики базового актива.

В статье делается попытка дополнить ARMA-подход за счет перехода к цене опциона не непосредственно, а с учетом уровня принятия риска, иными словами, дополнительно применить идеи VaR и CVaR.

Определение. Пусть X — стоимость портфеля в момент времени t . Тогда VaR с доверительным уровнем вероятности $(1-\alpha)$ определяется как $VaR_\alpha(X)$:

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq 1-\alpha\} = F_X(x) = 1-\alpha,$$

$$CVaR_\alpha(X) = E(X \mid X \geq VaR_\alpha(X)) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} VaR_\gamma(X) d\gamma.$$

Согласно определению премия опциона равна денежной сумме, которую покупатель по опционному договору платит продавцу.

В рамках Value-at-Risk -подхода премии опциона будут равны:

$$Call(S_t, T, Strike, \alpha) = \exp(-r(T-t)) \max(-VaR_\alpha(Strike - S_T), 0),$$

$$Put(S_t, T, Strike, \alpha) = \exp(-r(T-t)) \max(-VaR_\alpha(S_T - Strike), 0),$$

и для Expected Shortfall-подхода:

$$Call(S_t, T, Strike, \alpha) = \exp(-r(T-t)) \max(-CVaR_\alpha(Strike - S_T), 0) =$$

$$= \exp(-r(T-t)) \max\left(-\frac{1}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} VaR_\gamma(Strike - S_T) d\gamma, 0\right),$$

$$Put(S_t, T, Strike, \alpha) = \exp(-r(T-t)) \max(-CVaR_\alpha(S_T - Strike), 0) =$$

$$= \exp(-r(T-t)) \max\left(-\frac{1}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} VaR_\gamma(S_T - Strike) d\gamma, 0\right).$$

Пусть t — текущий момент времени, $T = t + N$ — время экспирации опциона. Опишем подход продавца европейского опционов колл и пут с использованием подхода Value-at-Risk. Продавец опциона заинтересован в том, чтобы его доход на момент T экспирации опциона был неотрицательным, т.е. $Premium_T - \max(S_T - Strike, 0) \geq 0$ для опциона колл и $Premium_T - \max(Strike - S_T, 0) \geq 0$ для опциона пут.

В условиях положительной безрисковой ставки продавец опциона может reinvestировать полученную премию, следовательно, данное условие выполняется для $Premium_T = Premium_t \exp(-r(T-t))$, где, как обычно, r — непрерывно начисляемая безрисковая ставка.

Допустим, что продавец знает $F_{S_T}(x)$ — функцию распределения базового актива в момент времени T . Определим уровень принятия риска α как соответствующую квантиль, определяемую продавцом в момент продажи опциона. Тогда с вероятностью $(1-\alpha)$ убыток продавца опциона колл в момент времени T составит не более $\max(-VaR_\alpha(Strike - S_T), 0)$ для подхода Value-at-Risk и $\max(-CVaR_\alpha(Strike - S_T), 0)$ — для подхода Expected Shortfall.

Полагая величиной премии опциона соответствующий потенциальный убыток, определенный с соответствующим уровнем принятия риска продавцом опциона с учетом безрисковой ставки, получаем приведенные выше соотношения.

Введем ряд обозначений. Пусть $\{S_t\}_{t=0 \dots N}$ — последовательность котировок базового актива во времени. Определим доходность как $R_t = \ln(S_t / S_{t-1})$, $t = 1, \dots, N$.

Определим S_{N+K} в качестве будущей цены базового актива. Для нее в момент времени $t = N + K$ выполняется равенство $S_{N+K} = S_N \exp\left\{\sum_{j=1}^K R_{N+j}\right\}$.

Для $VaR_\alpha(S_{N+K} - Strike)$ получаем:

$$\begin{aligned}
 VaR_\alpha(S_{N+K} - Strike) &= \inf(x | P(S_{N+K} - Strike \leq x) \geq 1 - \alpha) = \\
 &= \inf(x | P(S_N \exp\{\sum_{j=1}^K R_{N+j}\} - Strike \leq x) \geq 1 - \alpha) = \\
 &= \inf(x | P(\exp\{\sum_{j=1}^K R_{N+j}\} \leq (x + Strike) / S_N) \geq 1 - \alpha) = \\
 &= \inf(x | P(\sum_{j=1}^K R_{N+j} \leq \ln\{(x + Strike) / S_N\}) \geq 1 - \alpha) = \\
 &= \inf(x | F \sum_{j=1}^K R_{N+j} \ln\{(x + Strike) / S_N\} \geq 1 - \alpha). \\
 VaR_\alpha(Strike - S_{N+K}) &= \inf(x | P(Strike - S_{N+K} \leq x) \geq 1 - \alpha) = \\
 &= \inf(x | P(Strike - S_N \exp\{\sum_{j=1}^K R_{N+j}\} \leq x) \geq 1 - \alpha) = \inf(x | P(S_N \exp\{\sum_{j=1}^K R_{N+j}\} - Strike \geq -x) \geq 1 - \alpha) = \\
 &= \inf(x | 1 - P(S_N \exp\{\sum_{j=1}^K R_{N+j}\} - Strike \leq -x) \geq 1 - \alpha) = \\
 &= \inf(x | 1 - P(\sum_{j=1}^K R_{N+j} \leq \ln\{(Strike - x) / S_N\}) \geq 1 - \alpha) = \inf(x | 1 - F \sum_{j=1}^K R_{N+j} \ln\{(Strike - x) / S_N\} \geq 1 - \alpha).
 \end{aligned}$$

Так как истинные $\{R_{N+j}\}_{j=1, \dots, K}$ недоступны, необходимо использовать оценки доходностей — $\{\hat{R}_{N+j}\}_{j=1, \dots, K}$, которые можно получить исходя из модели прогнозирования временных рядов, в нашем случае — из авторегрессионной модели скользящего среднего (ARMA-модель). Такая модель предполагает, что динамика доходности базового актива задается разностным уравнением

$$R_t = \varphi_0 + \sum_{i=1}^p \varphi_i R_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j},$$

где p — порядок авторегрессии модели (AR), q — порядок скользящего среднего модели (MA), $\{\varepsilon_t\}$ — белый шум, $\{\varphi_i\}$, $\{\theta_j\}$ — параметры моделей.

Применительно к этому соотношению следует сделать два замечания. Во-первых, мы сознательно записали ARMA-процесс не для цены актива $\{S_t\}_{t \geq 0} \geq 0$, а для доходности R_t , поскольку в этом случае можно использовать распределения с областью значений $(-\infty; +\infty)$. Во-вторых, в данной статье мы налагаем требование слабой стационарности на процесс, что позволяет нам пользоваться двумя эквивалентными представлениями для $\{R_t\}$ (Box, Jenkins, Reinsel, 1994):

$$1) \text{ в виде полной } MA(\infty) \text{ модели — } R_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \psi_0 \equiv 1;$$

$$2) \text{ в виде усеченной } MA(\infty) \text{ модели — } R_t = \sum_{j=0}^{t-k-1} \psi_j \varepsilon_{t-j} + C_k(t-k), \quad \psi_0 \equiv 1, \text{ где } C_k(t-k) \text{ — решение разностного уравнения } \varphi(L)C_k(t-k) = 0, \varphi(L) = \left(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i L\right) \text{ — лаговый оператор.}$$

Для вычисления $VaR_\alpha(\hat{S}_{N+K} - Strike)$, входящего в выражение для премии опциона при VaR-подходе, нам необходимо рассчитать $\{\hat{R}_{N+j}\}_{j=1, \dots, K}$ — прогнозы доходностей на j шагов вперед.

Это можно сделать, записав уравнение для R_{t+j} в усеченной форме и взяв $t = k$ в $C_k(t-k+j)$, получим $R_{t+j} = \varepsilon_{t+j} + \psi_1 \varepsilon_{t+j-1} + \dots + \psi_{j-1} \varepsilon_{t+1} + C_t(j)$. Применив оператор условного математического ожидания к обеим частям уравнения, имеем $R_{t+j} = E_t(R_{t+j}) = C_t(j)$.

Учитывая, что $R_{t+j} = e_t(j) + \hat{R}_{t+j}$, где $e_t(j) = \sum_{j=0}^j \psi_j \varepsilon_{t-j}$, $\psi_0 \equiv 1$ — ошибка прогноза на шаге j , можно составить представление о свойствах полученного прогноза доходности базисного актива.

Во-первых, среднеквадратичная ошибка прогноза, определяемая как $D_t(e_t(j)) = D_t(R_{t+j} - \hat{R}_{t+j})$, не коррелирована с прошлыми значениями:

$$D_t(R_{t+j} - \hat{R}_{t+j}) = D(R_{t+j} - \hat{R}_{t+j}) = E(R_{t+j} - \hat{R}_{t+j})^2.$$

Во-вторых, среднее квадратичное отклонение, ошибки прогноза с учетом усеченной формы $MA(\infty)$ представления процесса R_{t+j} , может быть представлено в виде

$$D(e_t(j)) = (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{j-1}^2) \sigma_\varepsilon,$$

где σ_ε — дисперсия белого шума, определяемая в процессе калибровки модели на исторических данных.

Учитывая, что в выражение для цены актива $S_{N+K} = S_N \exp\left\{\sum_{j=1}^K R_{N+j}\right\}$ входят не отдельные значения будущих доходностей актива, а их сумма, удобно ввести обозначение $v_{N+K} = \sum_{j=1}^K R_{N+j}$. Прогноз $\hat{v}_{N+K} = \sum_{j=1}^K R_{N+j}$ является оптимальным прогнозом для v_{N+K} . При этом ошибка прогноза

$$v_{N+K} - \hat{v}_{N+K} = \sum_{j=1}^K e_{N+j} = \varepsilon_{N+K} + (1 + \psi_1) \varepsilon_{N+K-1} + \dots + (1 + \dots + \psi_{K-1}) \varepsilon_{N+1} = \sum_{j=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^j \psi_l \right) \varepsilon_{N+K-j}, \quad \psi_0 \equiv 1.$$

Среднеквадратичное отклонение ошибки прогноза:

$$D(v_{N+K} - \hat{v}_{N+K}) = D\left(\sum_{j=1}^K e_{N+j}\right) = E\left(\sum_{j=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^j \psi_l\right) \varepsilon_{N+K-j}\right)^2 = \sum_{j=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^j \psi_l\right)^2 \sigma_\varepsilon^2, \quad \psi_0 \equiv 1.$$

Последнее равенство имеет место в силу условия $\{\varepsilon_t\}$ — белый шум.

Таким образом, вычисление прогноза доходности базового актива при ARMA-модели (который, в свою очередь, войдет в выражение для VaR базового актива и выражение для премии опциона) требует вычисления весов ψ_i . Найти последние можно исходя из $MA(\infty)$ -представления рассматриваемой ARMA(p, q)-модели через решение соответствующего уравнения для лаговых операторов:

$$\varphi(L)\psi(L) = \theta(L), \quad (1 - \varphi_1 L - \dots - \varphi_p L)(1 + \psi_1 L + \psi_2 L + \dots) = (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L).$$

Сгруппировав соответствующие коэффициенты при соответствующих степенях L , получаем итерационную систему:

$$\begin{cases} \psi_1 = \varphi_1 - \theta_1; \\ \psi_2 = \varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 - \theta_2; \\ \dots \\ \psi_j = \varphi_1 \psi_{j-1} + \dots + \varphi_p \psi_{j-p} - \theta_j; \\ \psi_0 \equiv 1; \quad \psi_{j-p} = 0, \quad j - p < 0; \quad \theta_j = 0, \quad j > q. \end{cases}$$

Приведенные выше рассуждения позволяют нам в конечном итоге найти распределение будущей цены базового актива, что при VaR-подходе позволяет непосредственно оценить опцион, пользуясь формулами, приведенными выше:

$$Call(S_t, T, Strike, \alpha) = \exp(-r(T-t)) \max(-VaR_\alpha(Strike - S_T), 0), \quad (1)$$

$$Put(S_t, T, Strike, \alpha) = \exp(-r(T-t)) \max(-VaR_\alpha(S_T - Strike), 0). \quad (2)$$

Ниже получены распределения будущей цены актива для двух типов моделей: а) в предположении, что случайная ошибка ARMA-модели распределена нормально, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$; б) в предположении, что случайная ошибка ARMA-модели имеет распределение Стьюдента $\varepsilon_t \sim t(m)$.

2.1. Случай нормально распределенной ошибки

Пусть $\varepsilon_n \sim N(\mu_n, \sigma_\varepsilon)$. Согласно свойствам независимых гауссовых случайных величин:

$$\sum_{\{i\}} \psi_i \varepsilon_i \sim N\left(\sum_{\{i\}} \psi_i \mu_i, \left(\sum_{\{i\}} \psi_i^2\right) \sigma_\varepsilon^2\right), \quad \psi_i \in \mathbb{R}.$$

Используя данное свойство, получаем

$$v_{N+K} = \sum_{j=1}^K R_{N+j} \sim N\left(v_{N+K}, \sigma_\varepsilon^2 \left(\sum_{j=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^j \psi_l\right)\right)^2\right) = N\left(\sum_{j=1}^K R_{N+j}, \sigma_\varepsilon^2 \left(\sum_{j=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^j \psi_l\right)\right)^2\right), \quad \psi_0 \equiv 1,$$

таким образом, $F_{\psi_{N+K}}(\hat{x}) = \Phi\left(\left(x - \sum_{j=1}^K R_{N+j}\right) / \left(\sigma_\varepsilon \sqrt{\sum_{j=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^j \Psi_l\right)^2}\right)\right), \Psi_0 \equiv 1.$

2.2. Случай тяжелых хвостов (ошибки с распределением Стюдента)

Пусть случайная ошибка имеет распределение Стюдента, т.е. $\varepsilon_i \sim t(n)$. Введем обозначения для линейных комбинаций некоторых случайных величин $T^* = \sum_{i=1}^k c_i t_{n_i}$, где $t_{n_i} \sim t(n_i)$ — случайная величина с распределением Стюдента с n_i степенями свободы, $c_i \in \mathbb{R}$; $T = \sum_{i=1}^k \chi_i X_{n_i}$, где $X_{n_i} = t_{n_i} / \sqrt{n_i}$, $\chi_i = c_i \sqrt{n_i} / \omega$, $\omega = c_i \sqrt{n_i}$, $\chi_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \chi_i = 1$. Из этого следует, что $P\left(\sum_{i=1}^k c_i t_{n_i} \leq y\right) = P\left(\sum_{i=1}^k \chi_i X_{n_i} \leq y'\right)$, где $y' = y / \omega$.

Воспользовавшись результатом (Walker, Saw, 1978), получаем

$$P\left(\sum_{i=1}^k c_i t_{n_i} \leq y\right) = P\left(\sum_{i=1}^k \chi_i X_{n_i} \leq y'\right) = \sum_{i=0}^S \eta_i H_i(y') = \sum_{i=0}^S \eta_i H_i(\omega y),$$

где $H_i(y) = P(X_{2i+1} \leq y)$, $S = \sum_{i=1}^k m_i$, $n_i = 2m_i + 1$, а коэффициенты η_i определяются из уравнений

$$\begin{cases} \eta^T = \lambda^T Q^{-1}; \\ \lambda^T \Theta(1) = \prod_{j=1}^k Q_{m_j}(\chi_j), \end{cases}$$

где

$$(c) = \begin{pmatrix} 1 \\ |\chi c| \\ |\chi c|^2 \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (Q)_{i,j} = \begin{cases} \frac{i!(2i-j)!(2^j)}{(2i)!j!(i-j)!}, & 0 \leq j \leq i, \quad i \geq 0; \\ 0, & j > i; \end{cases}$$

$$Q_{m_j} = \{Q\}_{m_j, k \geq 1}, \quad (Q^{-1})_{m,j} = \begin{cases} \frac{(-1)^{m-j} (2j)!(m+1)!}{2^m (m-j)!j!(2j-m+1)!}, & j \leq m \leq 2j+1; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$t(n): F(x) = 1 - 0,5 I_{n/(x^2+n)}(0,5n; 0,5),$$

$I_x(a; b)$ — регуляризованная неполная бета-функция.

Для рассматриваемой задачи $m_i = m = 0,5(n-1)$. Выпишем решение для коэффициентов $\{\eta_i\}$ в замкнутой форме. Согласно статье (Walker, Saw, 1978):

$$\exp(-|v|) \prod_{j=1}^n Q_m \Theta(\chi_j) = \exp(-|v|) \lambda^T \Theta(1).$$

Из определения $\Theta(c)$: $\Theta(\chi_j) = \tilde{I}(\chi_j) \Theta(1)$,

$$\tilde{I}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = c^i \delta_{i,j},$$

$\delta_{i,j}$ — символ Кронекера,

$$\prod_{j=1}^n Q_m \Theta(\chi_j) = Q_m \sum_{j=1}^n \Theta(\chi_j) = Q_m \sum_{j=1}^n \tilde{I}(\chi_j) \Theta(1) = Q_m \left(\sum_{j=1}^n \tilde{I}(\chi_j) \right) \Theta(1) = Q_m \left\{ \delta_{i,j} \sum_{k=1}^n \alpha_k^i \right\} \Theta.$$

Следовательно, $\lambda^T = Q_m \left\{ \delta_{i,j} \sum_{k=1}^n \chi_k^i \right\}$. Тогда

$$\eta^T = Q_m \left\{ \delta_{i,j} \sum_{k=1}^n \chi_k^i \right\} Q^{-1} = Q_m \left\{ \delta_{i,j} \left(\sum_{k=1}^n \chi_k^i \right) (2j)! / (2^j j!) \right\}.$$

Для рассматриваемой задачи имеем

$$\omega = \sum_{j=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^j \psi_l \right), \quad \chi_i = \sum_{l=0}^i \psi_l / \left[\sum_{j=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^j \psi_l \right) \right], \quad m_i = m = 0,5(n-1).$$

Следовательно, $S = 0,5K(n-1)$,

$$v_{N+K} = \hat{v}_{N+K} + \sum_{i=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^i \psi_l \right) \varepsilon_{N+K-j} = v_{N+K} + \sum_{i=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^i \psi_l \right) t_{N+K-j}(n).$$

Используя полученные результаты, определим

$$\begin{aligned} F_{v_{N+K}}(x) &= \sum_{i=0}^S \eta_i P\left(t(2i+1) \leq \omega x \sqrt{(2i+1)}\right) = \sum_{i=0}^{0,5K(n-1)} \eta_i F_{t_{2i+1}}\left(\omega x \sqrt{(2i+1)}\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{0,5K(n-1)} \eta_i \left(1 - 0,5 I_{1/(\omega^2 x^2 + 1)}(i+0,5; 0,5)\right). \end{aligned}$$

Приведенные выше характеристики распределения будущей доходности базового актива в предположении, что его динамика подчиняется ARMA-модели с нормальными или студентовскими инновациями, соответственно, позволяют рассчитать VaR для любого заданного уровня риска и получить премии европейских опционов пут и колл.

Таким образом, итоговые выражения для премий европейских опционов выглядят следующим образом.

I. VaR-подход:

1) для случая нормальных ошибок —

$$\begin{aligned} Put(S_N, N+K, Strike, \alpha) &= e^{-rK} \max\left(-\inf\left(x \mid F_{v_{N+K}}\left(\ln\left[(x+Strike)/S_N\right]\right) \geq 1-\alpha\right), 0\right) = \\ &= e^{-rK} \max\left(-\inf\left(x \mid \Phi\left(\frac{\ln\left[(x+Strike)/S_N\right] - \sum_{j=1}^K \hat{R}_{N+j}}{\sigma_\varepsilon \sqrt{\sum_{j=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^j \psi_l\right)^2}}\right) \geq 1-\alpha\right), 0\right), \\ Call(S_N, N+K, Strike, \alpha) &= \\ &= e^{-rK} \max\left(-\inf\left(x \mid 1 - \Phi\left(\frac{\ln\left[(x+Strike)/S_N\right] - \sum_{j=1}^K \hat{R}_{N+j}}{\sigma_\varepsilon \sqrt{\sum_{j=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^j \psi_l\right)^2}}\right) \geq 1-\alpha\right), 0\right); \end{aligned}$$

2) случай студентовских ошибок $t(n)$:

$$\begin{aligned} Put(S_N, N+K, Strike, \alpha) &= e^{-rK} \max\left(-\inf\left(x \mid F_{v_{N+K}}\left(\ln\left[(x+Strike)/S_N\right]\right) \geq 1-\alpha\right), 0\right) = \\ &= e^{-rK} \max\left(-\inf\left(x \mid Z \geq 1-\alpha\right), 0\right), \\ Call(S_N, N+K, Strike, \alpha) &= e^{-rK} \max\left(-\inf\left(x \mid 1 - Z \geq 1-\alpha\right), 0\right), \end{aligned}$$

$$\text{где } Z = \sum_{i=0}^{0,5K(n-1)} \eta_i \left(1 - 0,5 I_{1/(\omega^2 (\ln[(x+Strike)/S_N])^2 + 1)}(i+0,5; 0,5)\right).$$

II. Для расчета CVaR в замкнутой форме воспользуемся результатами из (Rachev, Stoyanov, Fabozzi, 2008):

1) для случая нормального распределения —

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{\sigma_X}{\alpha\sqrt{2\pi}} \exp\left(-0,5(VaR_\alpha(Y))^2\right) - EX,$$

где $Y \sim N(0,1)$ — случайная величина; EX — математическое ожидание X ;

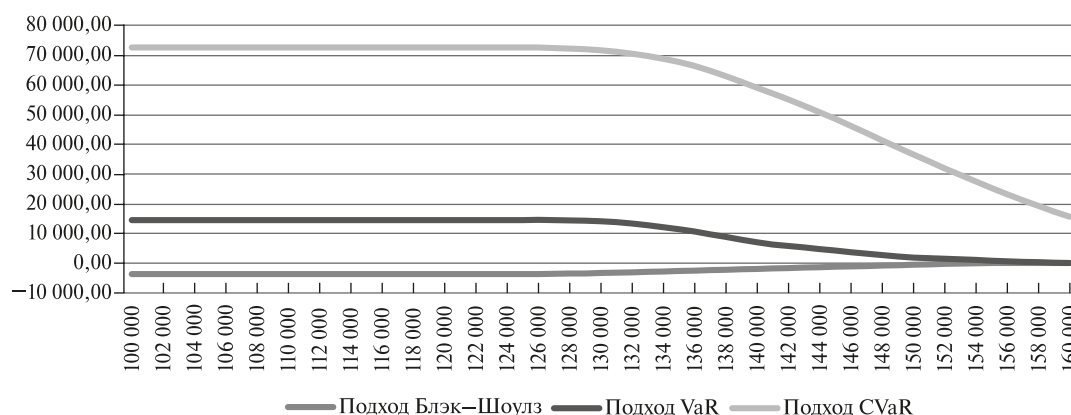


Рис. 1. Финансовый результат продавца опциона колл, долл. США

2) для случая распределения Стьюдента с ν степенями свободы —

$$CVaR_{\alpha}(X) = \frac{(0,5(\nu+1))}{(0,5\nu)} \frac{\sqrt{\nu}}{\alpha(\nu-1)\sqrt{\pi}} \left(1 + (VaR_{\alpha}(X))^2 / \nu\right)^{0,5(1-\nu)}.$$

Исходя из приведенных формул, получаем, что для нормального распределения

$$CVaR_{\alpha}(S_{N+K} - Strike) = \sigma_{S_{N+K}} \sqrt{\sum_{j=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^j \psi_l\right)^2} / \left[(1-\alpha)\sqrt{2\pi}\right] \times \\ \times \exp\left(-0,5(VaR_{\alpha}(Y))^2\right) - S_N \exp\left\{\sum_{j=1}^K R_{N+j}\right\} + Strike.$$

Для случая распределения Стьюдента с n степенями свободы имеем

$$CVaR_{\alpha}(S_{N+K} - Strike) = \left[\Gamma(0,5(n+1)) / \Gamma(0,5n)\right] \frac{\sqrt{n}}{(1-\alpha)(n-1)\sqrt{\pi}} \times \\ \times \left(1 + \left(\inf\left(x \left|\sum_{i=0}^{0,5K(n-1)} \eta_i \left(1 - 0,5I_{\left(\omega^2(\ln[(x+Strike)/S_N])^2 + 1\right)}(i+0,5; 0,5)\right) \geq 1-\alpha\right)\right)^2 / n\right)^{0,5(1-n)}.$$

В качестве апробации модели попробуем рассчитать премии опционов по предложенной модели и модели В–S со сроком семь дней (для упрощения будут приведены примеры расчетов премий опционов по В–S и по VaR/CVaR с доверительной вероятностью 95% для модели с нормальным распределением ошибок).

Приведем примеры расчетов P&L для продавцов опционов при использовании Блэка–Шоулза/VaR/CVaR-подходов в период с 29.05.2019 по 31.12.2019. Из приведенных данных видно, что использование VaR/CVaR-подходов позволяет увеличить доход по сравнению с использованием подхода Блэка–Шоулза (рис. 1, 2).

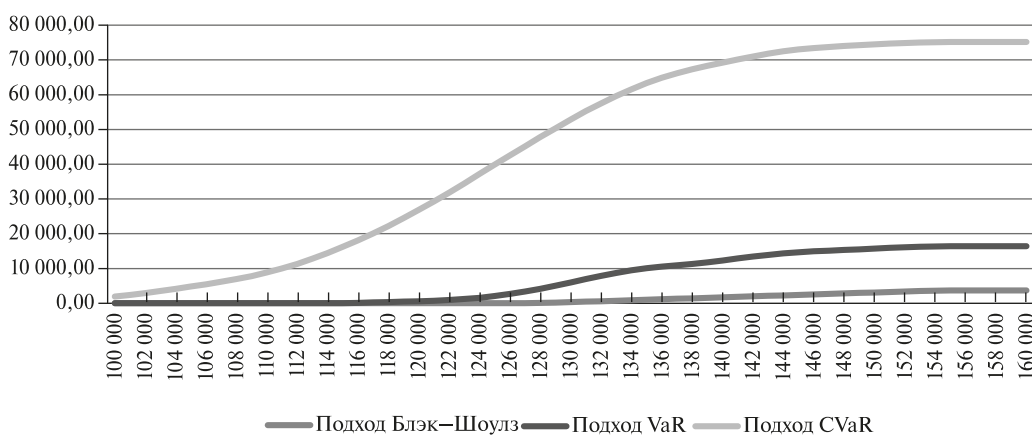


Рис. 2. Финансовый результат продавца опциона пут, долл. США

3. Использование VaR- и CVaR-подходов для определения кредитного спреда

Полученные нами результаты могут быть использованы не только непосредственно для оценки европейских пут и колл опционов, но и для определения кредитного спреда $s = R - r_f$, где r_f — безрисковая ставка; R — доходность облигации.

Для этого необходимо сделать предположения относительно структуры капитала фирмы. Мы воспользуемся подходом, реализованным в модели Мертона, который предполагает, что совокупный долг состоит только из одной бескупонной (дисконтной) облигации и никаких дополнительных заимствований до момента погашения данной облигации не производится. Кроме того, собственный капитал компании состоит только из обыкновенных акций.

При таких предположениях стоимость активов в каждый момент времени представляет собой сумму долга и собственного капитала $V_t = B_t + E_t$, где V_t — стоимость активов компании в момент времени t ; B_t — стоимость совокупного долга компании в момент времени t , представленного одной бескупонной облигацией с номиналом D и датой погашения T ; E_t — стоимость собственного капитала в момент времени t .

Учитывая данное соотношение, мы можем оценить облигацию (долг компании) двумя способами. Традиционно, как приведенный денежный поток $B_t = D e^{-R(T-t)}$, а также как портфель, состоящий из безрисковой облигации и европейского опциона пут на активы с ценой исполнения (страйком) D и временем до экспирации T .

Действительно, если в момент времени T стоимость активов компании превышает D , то владельцы облигаций получают ее номинал D , а акционеры — остаточную стоимость активов $V_T - D$. В противном случае владельцы облигаций получают активы компании в размере V_T , а акционеры не получают ничего. Иными словами, компания допускает дефолт. Заметим, что акционеру никогда не приходится компенсировать потери держателю облигации, то есть $E_T \geq 0$.

Из сказанного следует, что выплата держателю облигации определяется как $B_T = \min(V_T, D)$. Выражение для выплат держателям облигаций в момент ее погашения T включает слагаемое, характерное для опционов: $B_T = D - \max(D - V_T, 0)$.

Из этого следует, что выплата держателю облигации эквивалентна выплате от портфеля, состоящего из длинной позиции на безрисковую облигацию с номиналом D и короткой позиции по европейскому опциону пут на активы компании со страйком D и датой экспирации T .

Таким образом, получаем еще одно выражение для цены облигации (долга компании): $B_t = e^{-r_f(T-t)} D - \text{Put}(V_t, T, D, \alpha)$. Приравняв данные выражения, получаем $D e^{-R(T-t)} = D e^{-r_f(T-t)} - \text{Put}(V_t, T, D, \alpha)$. Отсюда выразим кредитный спред:

$$s = R - r_f = -\ln(1 - (e^{r_f(T-t)} \text{Put}(V_t, T, D, \alpha)) / D) / (T - t).$$

Подставляя в формулу для s значения $T - t = K, t_0 = N, S_{\{i\}} = V_{\{i\}}$ и применяя формулы для расчета стоимости опционов пут, получим значение кредитного спреда.

Например, для VaR-подхода с нормально распределенными ошибками получаем

$$s = -\frac{1}{K} \ln \left(1 - \max \left(-\inf \left(x \left| \Phi \left(\left[\ln \frac{x + D}{V_N} - \sum_{j=1}^K R_{N+j} \right] / \left[\sigma_\varepsilon \sqrt{\sum_{j=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^j \psi_l \right)^2} \right] \right) \geq 1 - \alpha \right), 0 \right) / D \right).$$

Параметр α модели определяет вероятность дефолта компании в момент времени T .

Модель, предложенная Мертоном, была крайне сильным упрощением реальной рыночной ситуации, не учитывающей особенностей как долговой составляющей (формирование cash flow и различные сроки погашения займов, возможность пролонгации займа и т.п.), так и структуры активов (например, наличие привилегированных акций). Также модель Мертона не учитывает текущей рыночной конъюнктуры, которая может приводить к существенным колебаниям курсовой стоимости акций, приводя к достаточно иррациональным ситуациям, когда компания торгуется существенно ниже стоимости собственных чистых активов (например, во время кризиса 2008 г.).

Представленная авторами модель также должна рассматриваться как модель, позволяющая рассчитать величину кредитного спреда в первом приближении при достаточно грубых допущениях, так как ARMA-модели являются достаточно упрощенными моделями для описания и прогнозирования дискретных временных рядов, не позволяющими полноценно учесть такие особенности, как наличие трендов, цикличности, гетероскедастичности ошибок и иных факторов.

4. ВЫВОДЫ

Очевидно, что сильные и слабые стороны предложенного подхода к ценообразованию опционов будут связаны с двумя его принципиальными аспектами: моделью динамики цены базового актива и выражением, связывающим цену базового актива и опциона.

Преимущества и ограничения подхода VaR к оценке опционов с параметрическими моделями цены базового актива состоят в следующем.

Параметрические модели дискретного времени лучше описывают динамику котировок реального рынка, так как данные с рынка поступают дискретными порциями (минутные, часовые, дневные свечи) в отличие от модели непрерывного времени. При этом модели дискретного времени позволяют лучше оценивать структуру рынка в выбранном временном интервале (для каждого временного интервала может быть определена модель с различным числом параметров и их значениями).

Параметрические модели позволяют лучше учитывать дополнительные свойства временных рядов базового актива — наличие автокоррелированности, гетероскедастичности, тяжелых хвостов распределений, отличных от нормального, скошенности распределения, сезонности и иных свойств, которые представлены в широком спектре различных параметрических моделей (в отличие от модели Блэка—Шоулза, где параметры μ и σ предполагаются константами, а стохастическая составляющая описывается броуновским движением).

VaR-подход к оцениванию опционов позволяет продавцу определить оптимальную степень принятия риска с заданным уровнем доверия. Улучшая модель оценки и прогнозирования цены базового актива (например, рассматривая более сложные классы параметрических моделей), можно определить лучшую стратегию поведения (например, при недооценке рынком риска — прекращать торговлю, при переоценке риска — увеличивать позицию с целью максимизации собственного дохода).

К минусам модели можно отнести следующее.

Класс параметрических моделей достаточно широк и содержит как простые модели, такие как ARMA, так и сложные, по типу SARFIMA с GARCH-ошибками. Соответственно, под каждую из таких моделей формула премии опциона в замкнутом виде требует отдельного вывода либо требуется сложное численное моделирование.

Поиск компромисса между качеством прогнозов простых параметрических моделей (например, ARMA) и сложностью калибровки сложных параметрических моделей (например, ARFIMA—GARCH с различными типами распределения ошибок). Подбор и калибровка сложных параметрических моделей требует больших вычислительных мощностей и большого количества времени, что может сказаться на эффективности их применения, качество прогнозов простых моделей может быть недостаточно удовлетворительным в силу грубого приближения простых моделей к рассматриваемому временному ряду, не учитывающих дополнительные свойства рассматриваемого ряда.

Параметрическая модель, рассмотренная в данной статье (как и остальные параметрические модели такого же типа), не может учитывать внешних факторов и кросс-корреляцию базового актива с другими активами. Соответственно, для рассмотрения данных свойств требуются модели векторной авторегрессии в различных вариациях и модели с экзогенными переменными.

Несмотря на недостатки, современные вычислительные мощности позволяют даже частным трейдерам применять и использовать данный VaR-подход к ценообразованию опционов для реальной торговли и управлению портфелем на фондовом рынке. Предложенная модель может быть использована как в качестве отправной точки для дальнейших исследований в области применения как дискретных моделей для временных рядов, так и VaR/CVaR-подхода для моделирования премий опционов колл и пут, и как прикладная модель, позволяющая получить достаточно приемлемые оценки премий с учетом уровня принятия риска продавцом опционов для использования в управлении портфелем деривативов на фондовом рынке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Bakshi G., Cao C., Chen Z. (1997). Empirical performance of alternative option pricing models. *Journal of Finance*, 52 (5), 2003–2049.
- Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2001). Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 63 (2), 167–241.

- Bates D.S. (2000). Post-'87 crash fears in the SP 500 futures option market. *J. Econ.*, 94, 181–238.
- Black F., Scholes M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637–654.
- Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C. (1994). Time series analysis: Forecasting and control. 3rd ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Brennan M.J. (1979). The pricing of contingent claims in discrete time model. *Journal of Finance*, 34, 1, 53–68.
- Christoffersen P., Jacobs K. (2004). Which GARCH model for option valuation? *Management Science*, 50 (9), 1204–1221.
- Conrad J., Kaul G. (1988). Time-variation in expected returns. *Journal of Business*, 61 (4), 409–425.
- Duan J.-C. (1995). The GARCH option pricing model. *Math. Finance*, 5 (1), 13–32.
- Fama E.F., French K.R. (1988). Permanent and temporary components of stock prices. *Journal of Political Economy*, 96, 2, 246–273.
- French K.R., Roll R. (1986). Stock return variances: The arrival of information and the reaction of traders. *Journal of Financial Economics*, 17 (1), 5–26.
- Goode J., Kim Y.S.A., Fabozzi F.J. (2015). Full versus quasi MLE for ARMA-GARCH models with infinitely divisible innovations. *Applied Economics, Taylor & Francis Journals*, 47 (48), 5147–5158, October.
- Hafner Ch.M., Herwartz H. (2000). Option pricing under linear autoregressive dynamics, heteroskedasticity, and conditional leptokurtosis. *SFB373 Discussion Paper*, 1999, 58.
- Heston S.L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6 (2), 327–343.
- Hsieh K., Ritchken P. (2005). An empirical comparison of GARCH option pricing models. *Rev. Deriv. Res.*, 8, 129–150.
- Hsu N.-J., Breidt F.J. (2009). Exact maximum likelihood estimation for non-gaussian moving averages. *Statistica Sinica*, 19, 2, 545–560.
- Hull J., White A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 42 (2), 281–300.
- Jegadeesh N. (1990). Evidence of predictable behavior of security returns. *Journal of Finance*, 45 (3), 881–898.
- Jovan M. (2010). The Merton structural model and IRB compliance. *Metodoloski zvezki*, 7, 1, 39–57.
- Lehmann B.N. (1990). Fads, martingales, and market efficiency. *Quarterly Journal of Economics*, 105 (1), 1–28.
- Liu Yu.-H., Jiang I.-M., Lee Sh.-Ch., Cheng Yu.-T. (2011). The valuation of reset options when underlying assets are autocorrelated. *The Institute for Business and Finance Research*, 5 (2), 95–114.
- Lo A., Wang J. (1995). Implementing option pricing models when asset returns are predictable. *Journal of Finance*, 50 (1), 87–129.
- Lo A.W., MacKinlay A.C. (1988). Stock market prices do not follow random walks: Evidence from a simple specification test. *The Review of Financial Studies*, 1 (1), 41–66.
- Merton R.C. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29, 2, 449–470.
- Rachev Sv.T., Stoyanov St., Fabozzi Fr.J. (2008). Advanced stochastic models, risk assessment, and portfolio optimization: The ideal risk, uncertainty, and performance measures. N.Y.: John Wiley & Sons.
- Rubinstein M. (1976). The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. *Bell Journal of Economics*, 7, 2, 407–425.
- Spierdijk L. (2016). Confidence intervals for ARMA-GARCH Value-at-Risk: The case of heavy tails and skewness. *Computational Statistics & Data Analysis (Elsevier)*, 100 (C), 545–559.
- Stentoft L. (2011). American option pricing with discrete and continuous models: An empirical comparison. *Journal of Empirical Finance*, 18, 880–902.
- Sundaresan S. (2013). A review of Merton's model of the firm's capital structure with its wide applications. *Annual Review of Financial Economics*, 5, 5.1–5.21.
- Wiggins J.B. (1987). Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates. *Journal of Financial Economics*, 19, 351–372.
- Wu C.-W., Huang Yu.-C., Wang C.-W. (2009). Pricing TAIEX options — An ARMA approach. *International Research Journal of Finance and Economics*, 31.
- Wu H., Huang Yu.-C. (2008). Implementing ARMA option pricing models. *International Review of Economics & Finance*, 24, 2012, 8–25.
- Xi Yi (2013). Comparison of option pricing between ARMA-GARCH and GARCH-M models. *Electronic Thesis and Dissertation Repository*, 1215. Available at: <https://ir.lib.uwo.ca/etd/1215>

Value-at-Risk and Expected Shortfall approaches for option premiums and the probability of default estimation based on ARMA models

© 2021 N.I. Berzon, D.I. Bobrovsky, D.E. Vilkul, V.V. Mezentsev, D.V. Dubinsky

N.I. Berzon,

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia; e-mail: nberzon@hse.ru

D.I. Bobrovsky,

Joint Stock Company "VTB Capital", Moscow, Russia; e-mail: mitek_bobrovskij@inbox.ru

D.E. Vilkul,

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia; e-mail: dvilkul@hse.ru

V.V. Mezentsev,

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia; Slavahse@gmail.com

D.V. Dubinsky,

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia; e-mail: ddubinskiy@hse.ru

Received 01.02.2021

Abstract. The need to address the issue of risk management has given rise to a number of models for estimation the probability of default, as well as a special tool that allows to sell credit risk — a credit default swap (CDS). From the moment it appeared in 1994 until the crisis of 2008, the CDS market was actively growing, and then sharply contracted. Currently, there is practically no CDS market in emerging economies (including Russia). This article is to improve the existing CDS valuation models by using discrete-time models that allow for more accurate assessment and forecasting of the selected asset dynamics, as well as new option pricing models that take into account the degree of risk acceptance by the option seller. This article is devoted to parametric discrete-time option pricing models that provide more accurate results than the traditional Black-Scholes continuous-time model. Improvement in the quality of assessment is achieved due to three factors: a more detailed consideration of the properties of the time series of the underlying asset (in particular, autocorrelation and heavy tails), the choice of the optimal number of parameters and the use of Value-at-Risk approach. As a result of the study, expressions were obtained for the premiums of European put and call options for a given level of risk under the assumption that the return on the underlying asset follows a stationary ARMA process with normal or Student's errors, as well as an expression for the credit spread under similar assumptions. The simplicity of the ARMA process underlying the model is a compromise between the complexity of model calibration and the quality of describing the dynamics of assets in the stock market. This approach allows to take into account both discreteness in asset pricing and take into account the current structure and the presence of interconnections for the time series of the asset under consideration (as opposed to the Black–Scholes model), which potentially allows better portfolio management in the stock market.

Keywords: option pricing models, ARMA, parametric models, discrete-time models, VaR, Expected Shortfall.

JEL Classification: G13, G17.

DOI: 10.31857/S042473880016417-7