
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Гарантированный детерминистский подход к маржированию на срочном рынке: численный эксперимент

© 2020 г. С.Н. Смирнов, В.А. Кузнецов, В.А. Сливинский

С.Н. Смирнов,

МГУ, Москва; e-mail: s.n.smirnov@gmail.com

В.А. Кузнецов,

МГУ, Москва; e-mail: v.a.kuznetsov1@yandex.ru

В.А. Сливинский,

МГУ, Москва; e-mail: v.a.slivinski@gmail.com

Поступила в редакцию 27.08.2020

Авторы выражают благодарность анонимному рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00613 а).

Аннотация. В статье рассматривается система маржирования портфеля из опционов и фьючерсов на срочном рынке с дефолт-менеджментом, основанным на методологии, предложенной рядом авторов изобретения, зарегистрированного в 2004 г. Математическая модель маржирования, т.е. определение требуемого уровня депозитной маржи (гарантийного обеспечения), основана на идеологии гарантированного детерминистского подхода к суперхеджированию: из экономического смысла задачи выводятся уравнения. Новизна статьи состоит в получении формы уравнений Беллмана–Айзекса, удобной для вычислений. Найдены рекуррентные формулы для численной оценки констант Липшица решений уравнений Беллмана–Айзекса, что позволяет следить за точностью вычислений. Построен программный комплекс, позволяющий эффективно выполнять трудоемкую вычислительную задачу решения уравнений Беллмана–Айзекса. На модельных примерах проведены численные эксперименты с целью продемонстрировать эффективность работы предлагаемой системы и выполнение важного теоретического свойства модели — субаддитивности маржи. Полученные результаты подтверждают целесообразность применения предложенной методологии центральным контрагентом для маржирования и урегулирования дефицита маржи при помощи фьючерсных коррекций. На модельном примере иллюстрируется практическая ценность свойства субаддитивности.

Ключевые слова: центральный контрагент, портфельное маржирование, опцион, фьючерс, уравнения Беллмана–Айзекса, константы Липшица, численный эксперимент, имитационное моделирование.

Классификация JEL: C61, C63, G23.

DOI: 10.31857/S042473880017501-0

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является непосредственным продолжением исследований, предпринятых в статье (Смирнов, Полиматиди, 2021), посвященной проблематике управления рисками центрального контрагента. Особое внимание здесь уделено системе портфельного маржирования фьючерсов и биржевых опционов. В (Смирнов, Полиматиди, 2021) приведен обзор научной литературы и дан критический анализ принципов регулирования, принятых в международной практике.

Центральный контрагент берет на себя кредитный риск контрагента между сторонами сделки, поэтому адекватная система риск-менеджмента (включая дефолт-менеджмент) является критически важной для его финансовой устойчивости. Напомним, что убытки портфеля дефолтера должны в первую очередь покрываться за счет обеспечения, требования к которому определяют системой маржирования, т.е. за счет депозитной маржи, внесенной данным участником, что

составляет первый эшелон защиты центрального контрагента. Если этих средств окажется недостаточно, то используют взнос дефолтера в фонд солидарной ответственности членов клиринга. Если и этого окажется также недостаточно, то используют фонд, формируемый из капитала (собственных средств) центрального контрагента, — второй эшелон защиты. А если и этого все еще недостаточно, то убытки погашаются за счет фонда солидарной ответственности участников клиринга (в этом случае участникам клиринга предлагают впоследствии пополнить этот фонд). Таким образом, создается несколько эшелонов защиты контрагента, совокупность которых на английском языке принято называть «default waterfall» (на русском языке терминология не сформировалась, мы же предлагаем использовать термин «дефолтное эшелонирование»). Капитал центрального контрагента, используемый на покрытие убытков (так называемый «skin-in-the-game»¹), и фонд солидарной ответственности участников клиринга дополняют депозитную маржу участников клиринга. Одной из первых работ, описывающих статическую структуру рационального дефолтного эшелонирования центрального контрагента (с исключительно прикладной точки зрения), стала работа (Ghamami, 2015). В последнее время стали появляться и динамические модели (например, (Bielecki, Cialenco, Feng, 2018)). Однако, на наш взгляд, предлагаемая в (Bielecki, Cialenco, Feng, 2018) модель слишком примитивна с экономической точки зрения, поскольку не учитывает взаимодействия между центральным контрагентом и участниками клиринга, которое особенно явно выражено в стрессовые периоды. Мы согласны с авторами работы (Faruqi, Huang, Takáts, 2018), что это взаимодействие потенциально может привести к дестабилизирующей обратной связи, так что следует учитывать риски участников клиринга и центрального контрагента совместно, а не по отдельности. Несмотря на определяющую роль первого эшелона защиты центрального контрагента, как справедливо отмечают авторы статьи (Coffman, Matsypura, Timkovsky, 2010), научных работ по тематике маржирования немного. Отметим интересное исследование, проведенное в (Eldor, Hauser, Yaari, 2011) на эмпирических данных. Биржа Тель-Авива изначально приняла систему маржирования SPAN, устанавливающую требуемые уровни маржи портфеля в соответствии с наиболее пессимистичным из 16 возможных результатов, а в 2001 г. биржа перешла на более детальную систему маржирования, основанную на наиболее неблагоприятном из 44 сценариев² (для сравнения — исследуемая нами система маржирования оперирует с континуумом сценариев и основана на встроенной активной, в отличие от SPAN, системе дефолт-менеджмента). Это уникальное изменение дало возможность эмпирически протестировать влияние повышения чувствительности к риску системы маржирования на эффективность торговли опционами. Оказывается, что более точная оценка риска повышает эффективность рынка по некоторым показателям, включая не явную волатильность (implied volatility) торгуемых опционов.

В (Смирнов, Полиматиди, 2021) предложена формализация задачи маржирования на основе математической модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен³. Анализ соответствующей модели проведен для случая европейских опционов; для удобства читателя опишем эту модель ниже.

При условии ликвидности фьючерсного рынка строится гарантированная система маржирования, при которой с участника клиринга взимаемая маржа гарантированно покрывает возможные потери биржи при неисполнении этим участником своих обязательств. Предположим, что клиринговая сессия производится один раз в день и в системе маржирования предписано проведение фьючерсных корректирующих сделок один раз каждый торговый день, вплоть до экспирации, одинаковой для всех финансовых инструментов в портфеле, а срок корректирующего управления равен числу дней до экспирации. На движение фьючерсных цен в модели наложены ограничения: изменение цены внутри дня не должно выводить цену за пределы коридора — интервала $I(x) = [x - \Delta^d, x + \Delta^u]$, где x — цена закрытия предыдущего торгового дня, $\Delta^d > 0$ и $\Delta^u > 0$ — нижний и верхний предел изменения фьючерсной цены соответственно. Эти величины являются параметрами системы и могут зависеть, в частности, от конкретного инструмента и от предыстории цен.

¹ Устойчивое англоязычное выражение, дословно — «шкура в игре». Означает личную вовлеченность в риск — по аналогии с русским выражением «рискуя собственной шкурой».

² Изложение особенностей построения системы SPAN можно найти в (Долматов, 2007). Отметим, что в SPAN и в SPAN-подобных (основанных на схожих принципах) системах в качестве основы для расчетов обычно используются стандартные модели ценообразования опционов, основанные на классических работах (Black, Scholes, 1973; Black, 1976; Cox, Ross, Rubinstein, 1979).

³ Используемый нами подход близок к интервальным методам образования цен на опционы, описанным в книге (Bernhard et al., 2013).

Как правило, пределы изменения фьючерсной цены устанавливаются как определенный процент цены закрытия предыдущего торгового дня: $\Delta^d = \alpha x$, а $\Delta^u = \beta x$, где $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$ (на практике α и β бывают порядка нескольких процентов, причем поскольку опасения падения цен обычно сильнее опасений их роста, то разумно выбирать $\alpha \geq \beta$). В рамках нашей модели будем считать, что фьючерсные цены x положительные, хотя теперь на практике это не всегда выполняется⁴.

Предположим, что корректирующая фьючерсная сделка, производящаяся один раз в день, происходит по цене, входящей в интервал $I(x)$, однако точное значение этой цены заранее неизвестно. Введем целевую функцию⁵ $V_{t,T}(x, k)$ — неотрицательное количество денежных средств на счете в момент времени t , необходимых для покрытия потенциальных потерь портфеля участника, для которого будут проводиться корректирующие сделки раз в день вплоть до момента исполнения T . Отметим, что целевая функция зависит не только от цены x , но и от числа фьючерсов k в корректируемом портфеле по итогам закрытия предыдущего торгового дня.

Рыночный риск портфеля из опционов европейского типа и фьючерсов определяется функцией выплат по портфелю $f(x)$ — размером средств, который получает (в случае положительного значения) или же выплачивает (в случае отрицательного значения) владелец данного портфеля (в предположении его неизменности) в момент исполнения через срок T , — в зависимости от фьючерсной цены закрытия x основы в этот момент. Эту функцию будем предполагать липшицевой. В терминальный момент должно выполняться неравенство $V_{T,T}(x, k) \geq -f(x)$, так что положим

$$V_{T,T}(x, k) = (-f(x))^+ = (f(x))^-; \quad (1)$$

где $a^+ = \max(0, a)$ и $a^- = \max(0, -a)$ для $a \in \mathbb{R}$.

В работе (Смирнов, Полиматиди, 2021) получены следующие уравнения Беллмана—Айзека для целевой функции:

$$\begin{aligned} V_{T,T}(x, k) &= (f(x))^- , \\ V_{t,T}(x, k) &= \min_{m \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1,T}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)], \quad t = T-1, \dots, 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $c(x, m) = m^- \Delta^d + m^+ \Delta^u = (\alpha m^- + \beta m^+)x$, причем показано, что в уравнениях (2) величины $V_{t,T}$ неотрицательны. С экономической точки зрения неотрицательная величина $c(x, m)$ представляет собой косвенные транзакционные издержки, максимально возможные за торговый день при сделанных предположениях относительно эволюции фьючерсной цены, где x — цена открытия, m — число фьючерсов (со знаком), используемых для корректирующей сделки.

Уравнения (2) позволяют дать интерпретацию задаче фьючерсной коррекции как специальную задачу суперхеджирования для европейского опциона с функцией выплат $(f(x))^-$, с транзакционными издержками $c(x, m)$ и дискретной (целочисленной) стратегией хеджирования фьючерсами с нулевым числом фьючерсов в начальный момент, рассматривая количество средств на счете как безрисковый актив с торговым ограничением — запретом овердрафта.

Используя решения уравнений (2), в качестве требуемого уровня депозитной маржи в текущий момент $t = 0$ при фьючерсной цене x_0 для портфеля с функцией выплат $f(x)$ через срок T выбирается величина

$$M(f, T, x_0) = V_{0,T}(x_0, 0). \quad (3)$$

При этом очевидно, что

$$M(f, T-s, x) = V_{s,T}(x, 0). \quad (4)$$

⁴ Беспрецедентный случай произошел 20 апреля 2020 г., когда фьючерсные цены на нефть WTI (бенчмарк для цен на сырую нефть в США) упали до отрицательного уровня. Предложение топлива было намного выше спроса вследствие пандемии коронавируса. Из-за перепроизводства резервуары для хранения WTI были заполнены до такого уровня, что если бы фьючерсные контракты были доведены до поставки, то для всей нефти не хватило бы мест для хранения. Поскольку майский контракт истекал 21 апреля, участники рынка с длинными позициями не хотели брать на себя поставку нефти (которая в этот период была никому не нужна) и нести расходы на ее хранение, а предпочли, заключая офсетные сделки, зафиксировать столь большие убытки, что цены стали отрицательными. С 22 апреля 2020 г. Чикагская товарная биржа (СМЕ) перешла на модель Башелье ценообразования опционов на фьючерсы для ряда энергоносителей, чтобы учесть возможность отрицательных цен. На самом деле отличие моделей является незначительным на коротких интервалах времени (см. об этом в (Schachermayer, Teichmann, 2008)).

⁵ В статье (Смирнов, Полиматиди, 2021) целевая функция обозначается V_t (без указания горизонта времени T).

В работе (Смирнов, Полиматиди, 2021) показано, что требуемый уровень депозитной маржи удовлетворяет свойству субаддитивности, т.е.

$$M(f_1 + f_2, T, x_0) \leq M(f_1, T, x_0) + M(f_2, T, x_0). \quad (5)$$

Более того, установлено более общее неравенство, из которого (5) вытекает по определению (2). Пусть $V_{t,T}^i(x, k)$ — целевые функции, отвечающие портфелям с функциями выплат f_i , $i = 1, 2, 3$, где $f_3 = f_1 + f_2$, тогда

$$V_{t,T}^3(x, k_1 + k_2) \leq V_{t,T}^1(x, k_1) + V_{t,T}^2(x, k_2). \quad (6)$$

Свойство (6) имеет интересную экономическую интерпретацию, касающуюся процедуры дефолт-менеджмента. Она заключается в возможности использовать оптимальную стратегию коррекции совокупного портфеля всех таких ассигноров центральным контрагентом в случае нескольких ассигноров (с одинаковым сроком до исполнения опционов в их портфелях). Эта особенность системы маржирования продемонстрирована на модельном примере в разд. 3.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ БЕЛЛМАНА–АЙЗЕКСА

Преобразуем уравнения Беллмана–Айзека (2) к виду, удобному для вычислений. Обозначим

$$I_t(x) = [(1 - \alpha)'x, (1 + \beta)'x], \quad (7)$$

$$A_t(x) = \max_{y \in I_t(x)} (f(y))^- . \quad (8)$$

Отметим, что величина $A_t(x)$ конечна, поскольку функция f непрерывна (и даже, по сделанному предположению, липшицева).

Множество возможных значений фьючерсной цены в момент экспирации, при условии что фьючерсная цена X_s в момент времени $s \in \{0, \dots, T-1\}$ принимает значение x , будет $I_{T-s}(x)$; имеет место следующее неравенство

$$M(f, T-s, x) \leq A_{T-s}(x), \quad (9)$$

поскольку в случае перехода владельца портфеля в состояние ассигнора в момент времени $s \in \{0, \dots, T-1\}$ при выборе в качестве корректирующей стратегии отсутствие коррекции (т.е. сделок с фьючерсами), обеспечение в размере $A_{T-s}(x)$ покрывает любые возможные потери по портфелю.

Оценим сверху величину $V_{t,T}(x, k)$, определяемую соотношениями (2). Поскольку минимум по m в (2) не превосходит значения выражения

$$\max_{z \in I(x)} [V_{t+1,T}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)]$$

для конкретного значения $m = -k$, то, используя (3), (7)–(9), получим⁶:

$$\begin{aligned} V_{t,T}(x, k) &\leq \max_{z \in I(x)} V_{t+1,T}(z, 0) + c(x, -k) = \max_{z \in I(x)} M(f, T-(t+1), z) + c(x, -k) \leq \\ &\leq \max_{z \in I(x)} A_{T-(t+1)}(z) + c(x, -k) = A_{T-t}(x) + c(x, -k). \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку $V_{t+1,T}(x, k) \geq 0$, то

$$\begin{aligned} &\max_{z \in I(x)} [V_{t+1,T}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)] \geq \\ &\geq \max_{z \in I(x)} [-(k+m)(z-x) + c(x, m)] = c(x, -(k+m)) + c(x, m). \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом неравенств (10) и (11) те значения m , для которых $c(x, -(k+m)) + c(x, m) > A_{T-t}(x) + c(x, -k)$, не могут доставлять минимум в (2). Таким образом, если в момент времени t заданы фьючерсная цена x и число k корректирующих фьючерсов в портфеле, то минимум по m достаточно искать на ограниченном множестве, что важно с вычислительной точки зрения:

$$D_t(x, k) = \{m : c(x, -(k+m)) + c(x, m) \leq A_{T-t}(x) + c(x, -k)\}. \quad (12)$$

⁶ В частности, целевая функция принимает конечные значения.

Тем самым уравнения (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} V_{T,T}(x,k) &= (f(x))^{-}, \\ V_{t,T}(x,k) &= \min_{m \in D_t(x,k)} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1,T}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)], \quad t = T-1, \dots, 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $D_t(x, k)$ задается при помощи (12).

Для дальнейшего также будет удобно использовать уравнения Беллмана–Айзека (13) с заменой переменных, полагая $k' = k + m$ (это число фьючерсных позиций в следующий момент времени, когда в настоящий момент число корректирующих фьючерсов равно k). Уравнения (13) примут вид

$$\begin{aligned} V_{T,T}(x,k) &= (f(x))^{-}; \\ V_{t,T}(x,k) &= \min_{k' \in E_t(x,k)} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1,T}(z, k') - k'(z-x) + c(x, k'-k)], \quad t = T-1, \dots, 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где ограниченное множество $E_t(x, k)$ задается при помощи

$$E_t(x, k) = \{k' : c(x, -k') + c(x, k' - k) \leq A_{T-t}(x) + c(x, -k)\}. \quad (15)$$

В соответствии с постановкой задачи параметры m и k являются целочисленными. Предположим, однако, на некоторое время, что они могут изменяться непрерывным образом⁷, т.е. принимают вещественные значения, и покажем, что функции $k \mapsto V_{t,T}(x, k)$ являются выпуклыми⁸. Для терминального момента времени соответствующая функция, очевидно, является выпуклой. Допустим, что условие выпуклости выполнено для момента времени $t+1$, где $t < T$. Тогда выражение под знаком минимума в (2) является выпуклым по совокупности переменных m и k (как максимум выпуклых функций). Поэтому ее минимум по переменной m , взятый по выпуклому множеству, будет выпуклой функцией⁹. При фиксированных t и x множество значений m , доставляющих минимум в (13), образует интервал благодаря выпуклости. С экономической точки зрения разумно выбирать в качестве объема (со знаком) корректирующей сделки такой минимизатор $m^*(x, k)$, который обеспечивает минимальные транзакционные издержки.

В реальности эволюция цен, вообще говоря, не следует экстремальным (наиболее неблагоприятным) сценариям. Поэтому средства в размере $V_{t,T}(x, k)$ на счете в момент времени t при фьючерсной цене x и k корректирующих фьючерсов в портфеле могут оказаться избыточными на некотором шаге s корректирующей фьючерсной стратегии. В этом случае ассигнору может быть возвращен его портфель. В принципе условие возврата портфеля может быть формализовано разными способами. Наиболее естественным условием представляется наличие на клиринговом счете ассигнора в момент s , где $t < s < T$, средств v_s (сформировавшихся в результате движения фьючерсных цен и проведения корректирующих сделок) — достаточных, начиная с момента $s+1$, для гарантированного покрытия транзакционных издержек для ликвидации корректирующих позиций по фьючерсам и гарантированного соблюдения требований к обеспечению. Таким образом, принять решение о возврате портфеля по результатам клиринговой сессии¹⁰ в конце периода s можно при выполнении условия¹¹

$$v_s \geq \max_{z \in I(x)} M(f, T - (s+1), z) + c(x, -k). \quad (16)$$

Этот эффект будет продемонстрирован на модельном примере в разд. 3.

⁷ Так, чтобы при сужении значений аргумента m с $\mathbb{R}$ на $\mathbb{Z}$ получить решения исходного уравнения Беллмана–Айзека.

⁸ Понятие выпуклости имеет смысл и для невыпуклой области определения и состоит в возможности продолжения такой функции до выпуклой (см. (Peters, Wakker, 1986)). Необходимое и достаточное условие выпуклости для функций целочисленного аргумента состоит в требовании, чтобы значение функции в каждой точке не превосходило бы значения аффинной функции, значения которой в соседних точках совпадают со значениями данной функции (в этом случае выпуклая оболочка совпадает с кусочно-аффинной интерполяцией).

⁹ Заметим, что $V_t(x, k)$ принимает конечные значения в силу предположения о липшицевости f .

¹⁰ Тем самым участник клиринга получает право возобновить операции на рынке с возвращенным портфелем на следующий торговый день. При желании этот участник клиринга может ликвидировать позиции по корректирующим фьючерсам (которые снижают риск портфеля и, как следствие, уровень требуемой маржи), получая, таким образом, портфель с исходной функцией выплат. После ликвидации позиций по корректирующим фьючерсам у него должно гарантированно остаться достаточно средств для поддержания требований по депозитной марже.

¹¹ Отметим, что правая часть неравенства (16) не меньше $V_{s,t}(x, k)$ (см. неравенство (10)).

2. ОЦЕНКА КОНСТАНТ ЛИПШИЦА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

При численном решении уравнений Беллмана–Айзека (14) полезно иметь явный вид множества $E_t(x, k)$, задаваемого соотношением (15). Нетрудно убедиться, что

$$\begin{cases} E_t(x, k) = [-a_t(x), k + a_t(x)] & \text{при } k \geq 0, \\ E_t(x, k) = [k - a_t(x), a_t(x)] & \text{при } k < 0, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$a_t(x) = A_{T-t}(x) / (\alpha + \beta)x. \quad (18)$$

Можно также записать (17) в виде

$$E_t(x, k) = [-k^- - a_t(x), k^+ + a_t(x)]. \quad (19)$$

Из (19) следует, что для $k' \in E_t(x, k)$ выполняется неравенство $|k'| \leq |k| + a_t(x)$.

Обозначим через k_t возможное число корректирующих фьючерсов в портфеле, если использовать ограничение $k' \in E_t(x, k)$ на шаге t , а через x_t — возможную цену на шаге t . Используя полученное неравенство на $|k'|$, имеем для $k_0 = 0$:

$$|k_{t+1}| \leq |k_t| + a_t(x_t), \quad x_t \in I_t(x_0); \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (20)$$

В силу (18)

$$a_t(x_t) \leq \max_{x_t \in I_t(x_0)} A_{T-t}(x_t) / \left((\alpha + \beta) \min_{x_t \in I_t(x_0)} x_t \right) = \frac{A_T(x_0)}{(\alpha + \beta)(1 - \alpha)^t x_0}. \quad (21)$$

Из (20) и (21) следует, что для $t = 0, \dots, T$

$$|k_t| \leq \frac{A_T(x_0)}{(\alpha + \beta)x_0} \sum_{s=0}^{t-1} \frac{1}{(1 - \alpha)^s} = \frac{A_T(x_0)(1 - \alpha)}{(\alpha + \beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^t - 1 \right). \quad (22)$$

Таким образом, решая (14) последовательно для $t = T - 1, \dots, 0$, достаточно находить значения целевой функции $V_{t,T}(x, k)$ для значений аргументов

$$x \in I_t(x_0), k \in \left[-\frac{A_T(x_0)(1 - \alpha)}{(\alpha + \beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^t - 1 \right), \frac{A_T(x_0)(1 - \alpha)}{(\alpha + \beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^t - 1 \right) \right], \quad (23)$$

где $I_t(x_0)$ задается формулой (7).

Аналогично рассуждениям из работы (Smirnov, 2019) оценим константы Липшица для целевых функций¹²

$$x \mapsto V_{t,T}(x, k) = W_{t,T,k}(x), \quad t = T, \dots, 1, \quad (24)$$

когда аргументы удовлетворяют ограничениям (23), что полезно при оценке точности приближенного решения, в частности при определении шага сетки (по ценовой переменной целевой функции), обеспечивающего заданную погрешность.

Пусть X и Y — произвольные метрические пространства; для функции $g: X \rightarrow Y$, удовлетворяющей свойству Липшица, будем обозначать через L_g соответствующую константу Липшица. В том числе будем использовать это обозначение и для многозначной функции с компактными значениями и с метрикой Помпею–Хаусдорфа на множестве $\mathcal{K}(Z)$ компактных подмножеств метрического пространства Z , поскольку такую многозначную функцию можно отождествить с однозначной функцией со значениями $g(x) \in Y = \mathcal{K}(Z)$.

Покажем свойство Липшица для целевых функций по индукции, заодно получим рекуррентные неравенства для соответствующих констант Липшица. Для $s = T$ функция $W_{T,T,k}(\cdot)$ имеет константу Липшица, равную $L_{f^-} \leq L_{f^+}$. Предположим по индукции, что для $s = t + 1$, где $t < T$, функция $W_{t+1,T,k}(x)$

¹² Здесь нам удобно ввести новое обозначение, чтобы иметь дело с функциями $W_{t,T,k}$ одного аргумента (фьючерсной цены).

липшицева с константой Липшица, равной $L_{W_{t+1,T,k}}$ на множестве аргументов $I_t(x_0)$, получим оценку константы Липшица для $s = t$. Запишем уравнения (14) в виде

$$V_{t,T}(x, k) = \min_{k' \in E_t(x, k)} [c(x, k' - k) + N_{t,T,k'}(x)], \quad (25)$$

где

$$N_{t,T,k'}(x) = \max_{z \in I(x)} [V_{t+1,T}(z, k') - k'(z - x)] = \max_{y \in K(x)} [V_{t+1,T}(x + y, k') - k'y], \quad (26)$$

$$K(x) = [-\alpha x, \beta x]. \quad (27)$$

Для $x, x' \in I_t(x_0)$ имеем

$$|W_{t+1,T,k}(x) - W_{t+1,T,k}(x')| \leq \max_{k' \in E_t(x, k)} [c(x, k' - k) - c(x', k' - k)] + |N_{t,T,k'}(x) - N_{t,T,k'}(x')|,$$

а с учетом (19) для аргументов, удовлетворяющих ограничениям (23)¹³, —

$$\begin{aligned} \max_{k' \in E_t(x, k)} |c(x, k' - k) - c(x', k' - k)| &= [\alpha(k^+ + a_t(x)) \vee \beta(k^- + a_t(x))] |x - x'| \leq \\ &\leq (\alpha \vee \beta) (|k| + a_t(x)) |x - x'| \leq \left[(\alpha \vee \beta) \frac{A_T(x_0)(1-\alpha)}{(\alpha + \beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^{t+1} - 1 \right) \right] |x - x'|. \end{aligned} \quad (28)$$

Выражение $|N_{t,T,k'}(x) - N_{t,T,k'}(x')|$ оценивается аналогично формуле (20) из доказательства теоремы 1 в (Smirnov, 2019):

$$\begin{aligned} |N_{t,T,k'}(x) - N_{t,T,k'}(x')| &\leq L_{v_{t+1,k}} L_K |x - x'| + |k'| L_K |x - x'| + L_{v_{t+1,k}} |x - x'| = \\ &= [(L_{v_{t+1,k}} (L_K + 1) + |k'| L_K) |x - x'|], \end{aligned}$$

где $L_K = \alpha\beta$, поскольку расстояние Помпею—Хаусдорфа между интервалами $K(x)$ и $K(x')$, определяемыми посредством (27), равно $(\alpha\beta)|x - x'|$. С использованием (22) получаем

$$\max_{k' \in E_t(x, k)} |N_{t,T,k'}(x) - N_{t,T,k'}(x')| \leq \left[(L_{W_{t+1,T,k}} (L_K + 1) + \frac{A_T(x_0)(1-\alpha)}{(\alpha + \beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^{t+1} - 1 \right) L_K \right] |x - x'|. \quad (29)$$

Таким образом, из (26), (28) и (29) вытекает

$$L_{W_{t,T,k}} \leq \left[(L_{W_{t+1,T,k}} ((\alpha \vee \beta) + 1) + 2 \frac{A_T(x_0)(1-\alpha)}{(\alpha + \beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^{t+1} - 1 \right) (\alpha \vee \beta) \right]. \quad (30)$$

Проведенные индуктивные рассуждения, кроме того, позволяют нам убедиться, что полученные оценки в (30) не зависят от k , что позволяет для аргументов, удовлетворяющих (23), рекуррентно оценивать константы Липшица

$$\Lambda_{t,T} = L_{W_{t,T,k}}, \quad (31)$$

где функция $W_{t,T,k}$ задается соотношением (24). Отметим, что при последовательном решении уравнений Беллмана—Айзека для $t = T - 1, \dots, 0$ размер интервалов (23) экспоненциально убывает, однако это компенсируется экспоненциально возрастающими требованиями к числу точек сетки в силу роста оценок констант Липшица в (30).

3. РАСЧЕТЫ НА МОДЕЛЬНЫХ ПРИМЕРАХ, ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

При расчете оптимальной корректирующей стратегии, отвечающей переходу владельца портфеля в состояние ассигнора в момент времени 0 с обеспечением, определяемым (3), можно сначала решать задачу минимизации (25) для непрерывных значений аргумента k' (что может быть

¹³ Здесь и далее символ « $\vee$ » используется для обозначения операции взятия максимума чисел.

разумным, поскольку минимизируемая функция является выпуклой), а потом выбрать одно из ближайших целочисленных значений.

Для численного расчета требуемого уровня депозитной маржи, задаваемого в начальный момент времени соотношением (3), а в последующие моменты времени — соотношениями (4), будем вычислять значения функции цены $V_{t,T}(x, k)$ на целочисленной сетке по k и равномерной сетке по x с шагом δ_x , учитывая (23). При этом значения функции цены в промежуточных точках $I_t(x_0)$ при необходимости рассчитываются путем линейной интерполяции. Заметим, что в силу терминального условия (1) общая ошибка вычисления ε , не превосходит суммы ошибок линейной интерполяции на шаге t и всех последующих шагах. Оценивая ошибку интерполяции на каждом шаге и учитывая липшицевость функций цены по аргументу x , можно прийти к выводу, что для обеспечения заданной точности¹⁴ $\varepsilon = \varepsilon_0$ достаточно на шаге $t = 1, \dots, T-1$ выбрать шаг сетки $\delta_t = 2\varepsilon_0 / T\Lambda_{t,T}$, где $\Lambda_{t,T}$ — оценки для констант Липшица (31), рассчитываемые рекуррентно, согласно (30). Задача является вычислительно сложной, однако может быть оптимизирована как за счет решения *непрерывной* задачи минимизации по аргументу k' , так и за счет распараллеливания по различным целочисленным значениям k' .

Приведенные на рис. 1–3 результаты расчетов имеют иллюстративный характер и призваны продемонстрировать основные положения предлагаемого подхода. Во всех примерах мы используем условные цены, поскольку методика не привязана к выбору конкретной валюты. Для начала исследуем динамику изменения уровня депозитной маржи в зависимости от времени до экспирации (рис. 1). Заметим, что с увеличением числа T дней до экспирации уровень депозитной маржи возрастает. При этом наблюдаются своеобразные ступеньки, обусловленные возможностью применения фьючерсной коррекции (и дискретностью такого управления портфелем).

Небольшой наклон ступенек обусловлен потенциальным наихудшим финансовым результатом фьючерсной коррекции и связан с пределами изменения цен. В данном примере (см. рис. 1) тангенс угла наклона графика для ступенек равен $-\alpha$. Вид маржи для опциона типа «butterfly» («бабочка») приведен на рис. 2. Здесь маржа найдена для большего промежутка времени до исполнения, что позволяет увидеть эволюцию ее формы.

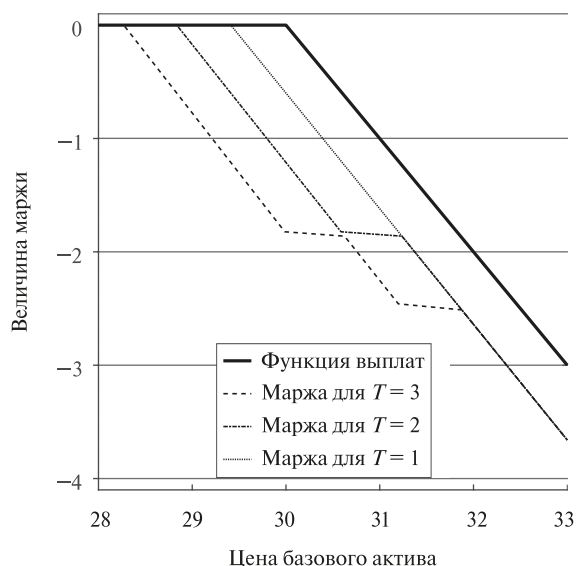


Рис. 1. Уровни депозитной маржи (со знаком «минус») для опциона call с ценой исполнения 30; пределы изменения цен $\alpha = \beta = 2\%$, точность $\varepsilon = 10^{-3}$

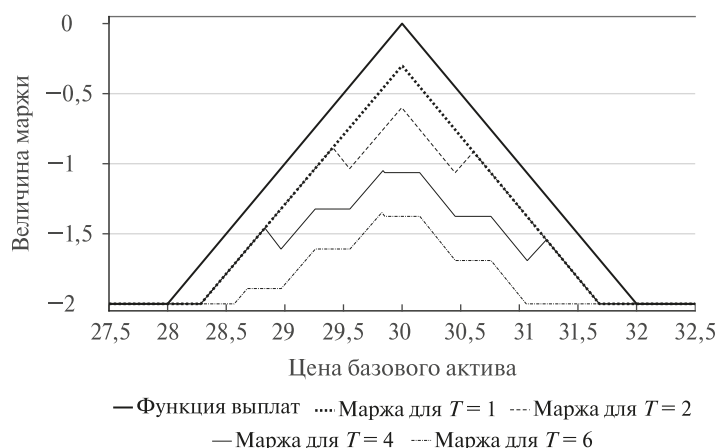


Рис. 2. Уровни депозитной маржи (со знаком «минус») для опциона «butterfly» («бабочка») для разных сроков до исполнения; пределы изменения цен $\alpha = \beta = 0,01$, $\varepsilon = 10^{-2}$

¹⁴ Погрешность вычисления $V_{t,T}(x, k)$ понимается в равномерном смысле — по переменным x и k .

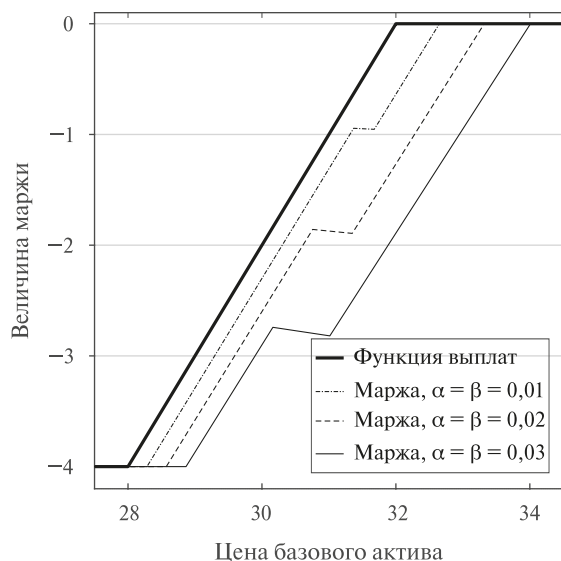


Рис. 3. Депозитная маржа (со знаком «минус») для опциона «медвежий спред» с разными пределами изменения цен на горизонте в 2 дня до экспирации, точность $\varepsilon = 10^{-3}$

двух портфелей (тонкая сплошная линия). Заметим, что условие субаддитивности выполняется, при этом на интервале $[29, 31]$ использование совокупной функции выплат для суммы портфелей позволяет учитывать их особенности (рост потенциальных убытков по одному из портфелей сопровождается уменьшением потенциальных убытков по второму), что обеспечивает более эффективный расчет маржи (она оказывается меньше, чем в случае, когда каждый портфель рассматривается независимо).

Обсудим теперь возможность возврата портфеля ассигнору в случае выполнения условия (16). Предположим, что в момент времени t , где $0 < t < T-1$, сумма средств v_t на клиринговом счете участника клиринга меньше требуемого размера обеспечения¹⁵, т.е. $v_t = \varkappa M(f, T-t, x_t)$ и $\varkappa \in [0, 1]$ ¹⁶, где x_t — цена базового актива в момент t . В таком случае наблюдается дефицит маржи. Если по результатам клиринговой сессии в этот момент времени участник клиринга переходит в состояние ассигнора, то с момента времени $t+1$ центральный контрагент от его имени осуществляет корректирующие сделки в соответствии с описанной в (Смирнов, Полиматиди, 2020) методикой. Предположим также, что (возможное) устранение дефицита маржи осуществляется исключительно за счет проведения корректирующих сделок и эволюции рыночных цен, т.е. не происходит довнесения средств и/или ликвидации портфеля (как частичной, так и полной). Подобное предположение позволяет проанализировать роль коррекций в устранении дефицита маржи.

С использованием имитационного моделирования методом Монте-Карло произведем генерацию возможной динамики цен и посчитаем долю портфелей, которые удалось вернуть ассигнору в зависимости от размера начального дефицита маржи (величины $1 - \varkappa$). Существенную роль играет характер условного распределения приращений цен в следующий момент времени при известной текущей цене x . Приведенные на рис. 5 графики соответствуют цензурированному нормальному, равномерному и U-образному распределениям¹⁷, симметричным, с одинаковым с носителем $[-\alpha x, \beta x]$, где $\alpha = \beta$. Число испытаний для каждого из трех вариантов одинаково: $N = 10^4$.

¹⁵ Напомним, что f — функция выплат портфеля участника торгов, а T — число дней до экспирации опционов.

¹⁶ Иными словами, в этот момент времени наблюдается дефицит маржи в размере $(1 - \varkappa) \times 100\%$.

¹⁷ При цензурированном нормальном распределении приращения цены распределены согласно нормальному закону, при условии что случайная величина попадает в $[-\alpha x, \beta x]$ с вероятностью 0,99. Это распределение описывает стабильное движение цен с низкой волатильностью. Плотность $p_{\alpha x, \beta x}$ для U-образного распределения выбирается так, чтобы точка 0 была бы медианой, на $[-\alpha x, 0]$ плотность равна $p_{\alpha x, \beta x}(z) = \gamma_{\alpha x}^- z^2$, а на $[0, \beta x]$ равна $p_{\alpha x, \beta x}(z) = \gamma_{\beta x}^+ z^2$, напоминая, таким образом, букву U. Это распределение характеризует ситуацию высокой неопределенности на рынке, когда цена может как резко вырасти, так и резко упасть.

Увеличение дневных пределов изменения цен, а следовательно, и большее потенциальное отклонение цены в наиболее неблагоприятном случае (рис. 3), ожидаемо приводит как к росту абсолютного значения требуемого уровня депозитной маржи, так и к смещению ступенек. Более того, изменяются также длина и наклон ступенек. В этом случае тангенс угла наклона графика для ступенек равен $-\beta$, так как наихудший результат на ступеньках достигается на правой границе. Длина ступенек изменяется в зависимости от ограничений на динамику цен и близка к длине максимального скачка в неблагоприятную с точки зрения коррекции сторону.

Далее рассмотрим два портфеля для иллюстрации свойства субаддитивности. С этой целью на рис. 4 изображены функции выплат для каждого из двух портфелей (тонкие пунктирные линии), совокупная функция выплат объединенного портфеля (жирная сплошная линия), а также уровни депозитной маржи на горизонте в 2 торговых дня для объединенного портфеля (жирная пунктирная линия) и сумма отдельных уровней

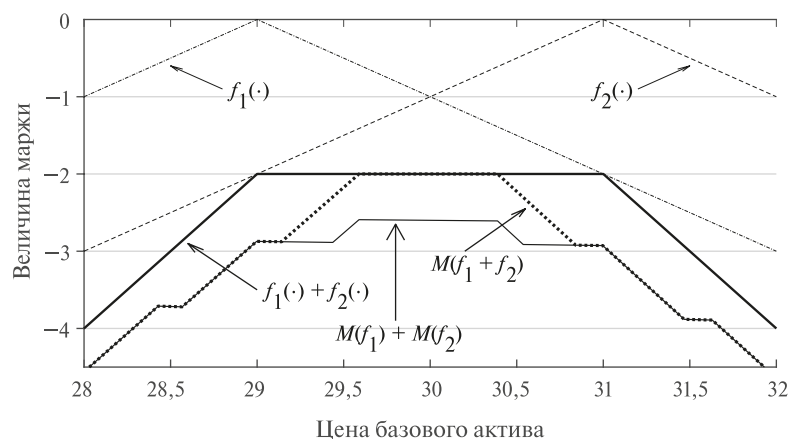


Рис. 4. Уровни депозитной маржи (со знаком «минус») для двух портфелей $M(f_1, 2, \cdot)$ и $M(f_2, 2, \cdot)$ (функции выплат f_1 и f_2 соответственно) и для объединенного портфеля $M(f_1 + f_2, 2, \cdot)$ (функция выплаты $f_1 + f_2$); пределы изменения цен $\alpha = \beta = 0,01$, горизонт 2 дня до экспирации, $\varepsilon = 10^{-3}$

Из результатов проведенного эксперимента (рис. 5) можно сделать вывод, что при малом дефиците портфеля ситуация его возврата (доли портфелей, которые удалось вернуть ассигнору в зависимости от размера начального дефицита маржи) весьма вероятна, в том числе в результате возможного благоприятного движения цены. Резкие падения в частотах возврата для U-образного распределения объясняются видом распределения приращений цены. При таком распределении бывает достаточно нескольких удачных скачков для резкого уменьшения маржи. Характерные падения связаны с увеличением числа необходимых для возврата портфеля скачков. Падение частоты возврата для других распределений обусловлено в том числе гарантированностью подхода к возврату портфеля. Велика доля случаев, когда наихудшая (в гарантированном смысле) возможная цена ликвидации позиций по фьючерсным коррекциям оказывается настолько неблагоприятной, что возврат портфеля не производится. Однако реальные значения цен, особенно при стабильной ситуации на рынке, редко достигают своих крайних значений, что позволяет выдвинуть гипотезу

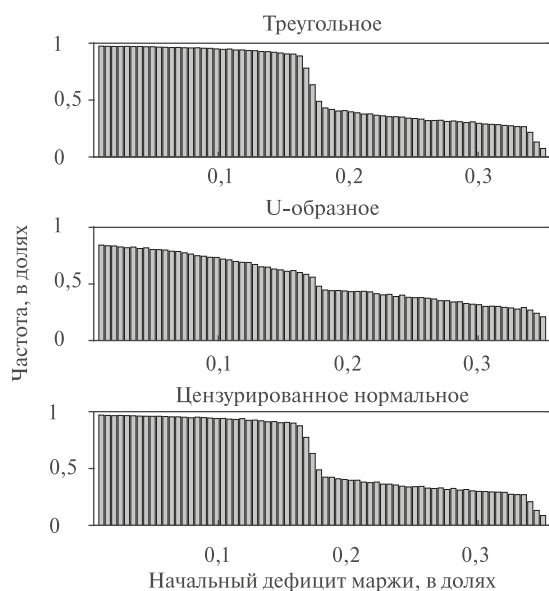


Рис. 5. Частоты возврата для call-опциона с ценой исполнения 30 для разных распределений приращений цен (параметры: $x_0 = 32$, $\alpha = \beta = 0,02$, $T = 6$, $N = 10^4$)

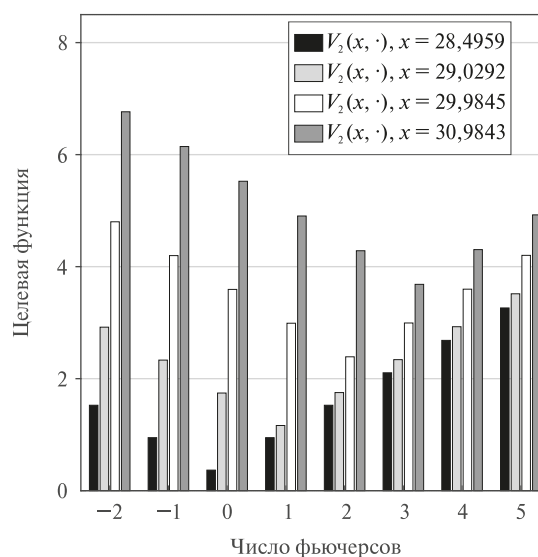


Рис. 6. Значения целевой функции для трех call-опционов для разных текущих цен (параметры: $\alpha = \beta = 0,02$, $\varepsilon = 10^{-2}$)

о разумности подхода к возврату портфеля не на основе гарантированного финансового результата, а с точки зрения вероятностно-статистического подхода — например используя квантили возможного финансового результата.

Целесообразность использования коррекций подтверждают результаты, показанные на рис. 6: в зависимости от цены актива здесь отображены значения целевой функции $V_{t,T}(x, k)$ для портфеля из трех call-опционов с ценой исполнения 30 при разном числе коррекций $k \in \mathbb{Z}$ (цвет столбцов отвечает разным значениям цены актива). Видно, что при увеличении цены x функция $k \mapsto V_{t,T}(x, k)$ достигает минимума уже не при $k = 0$ (случай отсутствия коррекций), а при $k = 1, 2, 3$ соответственно. Таким образом, использование коррекций позволяет снизить потенциальные убытки по портфелю, а следовательно, и уменьшить требуемый уровень депозитной маржи, при этом (в силу гарантированности оценки) средств в таком меньшем объеме все еще достаточно для покрытия потенциальных убытков.

* * *

Идея изобретения (Смирнов, Захаров, Полиматиди и др., 2004), описывающая способ определения уровня обеспечения и способ урегулирования ситуации дефицита маржи, основанного на фьючерсной коррекции, проиллюстрирована на конкретных примерах. Математическая модель определения требуемого уровня депозитной маржи строится по аналогии с идеологией гарантированного детерминистского подхода к суперхеджированию — из экономического смысла задачи выводятся уравнения Беллмана–Айзека. Эти уравнения приведены к виду, удобному для вычислений. Получены оценки констант Липшица для целевой функции и требуемого уровня обеспечения, позволяющие численно проследить точность приближенного решения. Создан программный комплекс для вычислительно трудоемкой задачи — численного решения уравнений Беллмана–Айзека.

Совокупность полученных в ходе численных экспериментов результатов позволяет сделать заключение об обоснованности, разумности и эффективности предлагаемого подхода к маржированию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Долматов А.С. (2007). Математические методы риск-менеджмента. М.: Экзамен. [Dolmatov A.S. (2007). *Mathematical methods of risk management*. Moscow: Ekzamen (in Russian).]
- Смирнов С.Н., Полиматиди И.В. (2021). Гарантированный детерминистский подход к маржированию на срочном рынке // *Экономика и математические методы*. Т. 57. № 2. С. 96–105. [Smirnov S.N., Polimatidi I.V. (2021). A guaranteed deterministic approach to margining on exchange-traded derivatives market. *Economics and Mathematical Methods*, 57, 2, 96–105 (in Russian).]
- Bernhard P., Engwerda J.C., Roorda B. et al. (2013). *The interval market model in mathematical finance: Game-theoretic methods*. New York: Springer.
- Bielecki T.R., Cialenco I., Feng S. (2018). *A dynamic model of central counterparty risk*. arXiv: 1803.02012 [q-fin.RM]
- Black F., Scholes M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 3, 637–654.
- Black F. (1976). The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, 3, 167–179.
- Coffman Jr. E.G., Matsypura D., Timkovsky V.G. (2010). Strategy vs risk in margining portfolios of options. *Quarterly Journal of Operations Research*, 8, 375–386.
- Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7, 3, 229–263.
- Eldor R., Hauser S., Yaari U. (2011). Safer margins for option trading: How accuracy promotes efficiency. *Multinational Finance Journal*, 15, 3–4, 217–234.
- Faruqi U., Huang W., Takáts E. (2018). Clearing risks in OTC derivatives markets: The CCP-bank nexus. *BIS Quarterly Review December*, 73–90.
- Ghamami S. (2015). Static models of central counterparty risk. *International Journal of Financial Engineering*, 2, 1–36.
- Peters H., Wakker P. (1986). Convex functions on non-convex domains. *Economics Letters*, 22, 2, 251–255.
- Schachermayer W., Teichmann J. (2008). How close are the option pricing formulas of Bachelier and Black Merton–Scholes? *Math. Finance*, 18, 1, 155–170.
- Smirnov S.N. (2019). Guaranteed deterministic approach to superhedging: Lipschitz properties of solutions of the Bellman-Isaacs equations. In: L.A. Petrosyan, V.V. Mazalov, N.A. Zenkevich (Eds.) *“Frontiers of Dynamic Games”*. New York: Springer, 267–288.

A guaranteed deterministic approach to margining on exchange-traded derivatives market: Numerical experiment

© 2021 S.N. Smirnov, V.A. Kuznetsov, V.A. Slivinski

S.N. Smirnov,

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; e-mail: s.n.smirnov@gmail.com

V.A. Kuznetsov,

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; e-mail: v.a.kuznetsov1@yandex.ru

V.A. Slivinski,

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; e-mail: v.a.slivinski@gmail.com

Received 27.08.2020

Authors would like to extend gratitude to an anonymous reviewer for the useful remarks and suggestions.

This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 19-01-00613 a).

Abstract. The article discusses a modern approach to risk management of the central counterparty, primarily the issue of the sufficiency of its financial resources, including the provision of clearing members, the capital of the central counterparty and the mutual liability fund. The main subject is the margining system, responsible for an adequate level of collateral for clearing members, that plays critical role in risk management, being the vanguard in protecting against losses associated with default by clearing members and the most sensitive to market risk part of the central counterparty's skin of the game. A system of margining a portfolio of options and futures in the derivatives market is described, with default management based on the methodology proposed by a number of inventors, registered in 2004. For this system, a mathematical model of margining (i.e. determining the required level of the collateral) is built, based on the ideology of a guaranteed deterministic approach to superhedging: Bellman–Isaacs equations are derived from the economic meaning of the problem. A form of these equations, convenient for calculations, is obtained. Lipschitz constants for the solutions of Bellman–Isaacs equations are estimated. A computational framework for efficient numerical solution of these equations is created. Numerical experiments are carried out on some model examples to demonstrate the efficiency of the system. These experiments also show practical implications of margin subadditivity — a crucial property of the mathematical model.

Keywords: central counterparty, portfolio margining, option, futures, Bellman–Isaacs equations, Lipschitz constants, numerical experiment, simulation modeling.

Classification JEL: C61, C63, G23.

DOI: 10.31857/S042473880017501-0