
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Динамическая модель рынка разработки программного обеспечения на основе задачи о назначении на узкие места

© 2021 г. И.А. Лесик, А.Г. Перевозчиков

И.А. Лесик,

НПО «РусБИТех», Москва; e-mail: lesik56@mail.ru

А.Г. Перевозчиков,

НПО «РусБИТех», Москва; e-mail: pere501@yandex.ru

Поступила в редакцию 03.07.2021

Аннотация. Предлагается постановка дискретной динамической модели рынка программного обеспечения (РПО) на базе задачи на узкие места о назначении (УМН). Такую постановку можно получить, если отказаться от целочисленности элементов матрицы назначения и обойтись без вариационной постановки внутренней задачи определения равновесных цен, основанной на теореме Дебре. Функции изменения фазовых координат можно взять выпуклыми и не учитывать постоянные затраты при каждом переключении управления. Имея динамическое расширение задачи УМН, можно определить дополнительную прибыль транспортной системы за счет привлечения фьючерсов. В статье получены формулы для компонентов градиента показателя. Это позволяет организовать градиентный метод решения динамической задачи УМН. Приводится приближенный алгоритм и модельный пример его использования для решения динамического расширения задачи УМН. Он основан на решении статической задачи с увеличением на единицу тех элементов матрицы эффективности, которые совпадают с соответствующими элементами матрицы оптимальных назначений, если отказаться от целочисленности матрицы назначений. Это эквивалентно рандомизации задачи о назначении с определенными вероятностями, что позволяет найти погрешность приближенного алгоритма путем сравнения с точным решением, полученным градиентным методом при достаточно больших значениях штрафных констант.

Ключевые слова: динамическая задача на узкие места о назначении, фазовые ограничения, метод штрафных функций, функция Гамильтона–Понтрягина, сопряженная система, компоненты градиента, градиентный метод, приближенный алгоритм.

Классификация JEL: O12, C51.

DOI: 10.31857/S042473880017518-8

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается задача определения оптимальных планов назначения исполнителей на работы в динамическом расширении задачи на узкие места о назначении (УМН), описанной в работе (Форд, Фалкерсон, 1966). Управление формально осуществляется путем приращения планов. Поэтому показатель оптимальности, кроме транспортных расходов и фиксированных доплат, на каждом шаге включает норму приращения планов, а его минимизация отражает не только стремление уменьшить расходы, но и желание стабилизировать планы распределения ресурсов по видам работ.

В существующих платформах PBS¹, LSF², NQE, I-SOFT (Ding, 2012), EASY³, LoadLeveler⁴ для решения транспортной задачи и ее частного случая — задачи о назначениях — рассматривается в основном *статический вариант* задачи с горизонтом планирования один период. Неэффективность такого подхода особенно сильно заметна в глобальных вычислительных системах, так как в них ресурсы и заявки являются неоднородными (Сергиенко, Симоненко В., Симоненко А., 2016). Это делает актуальной

¹ PBS Works. Официальный сайт компании Altair Engineering, Inc. (<http://www.pbsworks.com/>).

² Platform LSF 7 Update 6. An Overview of New Features for Platform LSF Administrators. Официальный сайт компании Platform Computing Corporation (http://www.platform.com/workload-management/whatsnew_lst7u6.pdf).

³ What is Condor? Официальный сайт продукта Condor (<http://www.cs.wisc.edu/condor/description.html>).

⁴ IBM Tivoli Workload Scheduler LoadLeveler. (2007): Официальный сайт компании «Интерфейс». — <http://www.interface.ru/home.asp?artId=6283>.

задачу динамического распределения исполнителей по заданиям, поставленную и изученную в настоящей работе.

Практическая значимость работы связана с использованием предложенной динамической модели для распределения ресурсов и заданий на рынке разработки программного обеспечения (РПО) для создания соответствующих цифровых транзакционных платформ (ЦТП) (Устюжанина, Дементьев, Евсюков, 2021). Несмотря на постоянное увеличение объема сделок, на рынке РПО отсутствуют глобальные платформы указанных выше универсальных платформ распределения заданий PBS, LSF, NQE, I-SOFT, EASY, LoadLeveler, которые могли бы быть применены в динамическом алгоритме загрузки заданий, хотя бы для получения начального плана, который в динамической модели является элементом управления. Это приводит к большому числу посредников в цепочке, ведущей от заказчика к исполнителю, что уменьшает стоимость работ для исполнителя до 10 раз по сравнению со стоимостью, которую готовы были платить заказчики. Таким образом, создание цифровой платформы на рынке РПО могло бы дать более справедливое распределение доходов и увеличить общественное благосостояние. Максимизация благосостояния равносильна определению глобального равновесия на рынке РПО в соответствии с теоремой Дебре (Debreu, 1954).

В общетеоретическом плане концепция равновесия (Макаров, Рубинов, 1973) на распределенном рынке однородного товара относится к мезоэкономике (Мезоэкономика развития, 2011) и лежит в основе синтеза транспортной системы многоузлового конкурентного рынка с переменным спросом и предложением. Эта концепция рассмотрена в работах (Васин, Григорьева, Лесик, 2017, 2018; Васин, Григорьева, Цыганов, 2017). В отличие от этих работ в данной статье мы показываем возможность прямого вычисления равновесных цен, и поэтому можно обойтись без вариационной постановки внутренней задачи. Функции изменения фазовых координат можно взять выпуклыми (например, квадрат нормы разности) и не учитывать постоянных затрат при каждом переключении управления. Имея динамическое расширение задачи УМН, можно найти дополнительную прибыль транспортной системы (цифровой платформы) за счет использования фьючерсов.

Основным результатом работы являются исследование динамической модели рынка разработки программного обеспечения на основе задачи УМН при отказе от целочисленности элементов матрицы назначения и построение численных методов ее решения на основе снятия фазовых ограничений методом штрафных функций и вычисления градиента полученного показателя через функцию Гамильтона–Понтрягина и сопряженную систему. Это позволяет сформировать градиентный метод точного решения динамической ЗН на УМ на основе метода проекции градиента с постоянным шагом (Поляк, 1983).

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НА УЗКИЕ МЕСТА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Пусть, как в обычной транспортной задаче (ТЗ), через $i = 1, \dots, m$ обозначены пункты производства (разработчики ПО) некоторого однородного товара (человеко-дней при стандартном 8-часовом дне чистого рабочего времени, определяемого по таймеру), через $j = 1, \dots, n$ — пункты его потребления (заказчики ПО). Даны величины, отнесенные к одному дню (горизонту планирования): $a_i \in \{0, 1\}$ — объем производства в пункте производства i ; $b_j \in \{0, 1\}$ — объем потребления в пункте потребления j , где 0 — означает, что исполнитель не требуется, 1 — требуется один исполнитель.

Найдем величины $x_{ij} = \{0, 1\}$ (объем перевозок из пункта i в пункт j), удовлетворяющие обычным транспортным ограничениям

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Предположим, что

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \Rightarrow n = m \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} \rightarrow \min. \quad (3)$$

Здесь A_{ij} — эффективность соответствующего назначения.

Таким образом, задача (1)–(3) является частным случаем обычной транспортной задачи, которую можно решить точно при помощи соответствующего пакета, реализующего венгерский метод (Корбут, Финкильштейн, 1969, с. 307) расстановки пометок (подробно описан в (Ашманов, 1981)), имеющий сложность $O(N^3)$ (Сергиенко и др., 2016), где N — общее число вершин соответствующего двудольного графа, $N = n + m = 2m$.

Для рынка РПО будем предполагать выполненными следующие предположения:

- 1) за единицу берется один программист, работающий полный день — 8 часов;
- 2) горизонт планирования — 1 день;

3) доходы компаний—заказчиков по контакту (i, j) равны разности цен 1 рабочего дня спроса P_j и предложения Q_i с учетом платы за транспортировку, например 30%, $(P_j \geq P \geq Q_i)$, где P — равновесная цена), умноженные на число кодировщиков $(P_j - Q_i)x_{ij}$. Всего

$$(P_j - Q_i)x_{ij}. \quad (4)$$

Доходы заказчиков следует максимизировать.

Замечание. С учетом балансовых ограничений валовый доход компаний-заказчиков от разности цен спроса и предложения не будет зависеть от распределения x_{ij} . В самом деле,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (P_j - Q_i)x_{ij} = \sum_{j=1}^n P_j \sum_{i=1}^m x_{ij} - \sum_{i=1}^m Q_i \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n P_j b_j - \sum_{i=1}^m Q_i a_i \geq 0. \quad (5)$$

2. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИИ НА УЗКИЕ МЕСТА

Динамическое расширение ЗН на УМ можно получить по схеме, предложенной в работе (Васин, Григорьева, Лесик, 2018). Однако равновесные цены можно вычислить без вариационной постановки внутренней задачи, а функции изменения фазовых координат можно взять выпуклыми и не учитывать постоянных затрат при каждом переключении управления.

У основной системы нет начальных условий (по крайней мере вначале, затем за начальное условие можно взять текущее значение плана). Для определенности будем считать, что начальное значение плана не определено. Приходится ввести еще один (-1) -шаг и соответствующую компоненту управления с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{aligned} x_{ij}(t+1) &= x_{ij}(t) + u_{ij}(t), \quad t = -1, \dots, T-1, \\ x_{ij}(-1) &= 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

Можно считать, что управляющие воздействия ограничены по модулю $|u_{ij}(t)| \leq 2 \quad \forall i, j$. Множество допустимых управлений $[u(t), t = -1, \dots, T-1]$, $u(t) = (u_{ij}(t), i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$, удовлетворяющих этому условию, обозначим через

$$W = \prod_{t=-1}^{T-1} W(t), \quad W(t) = \prod_{i,j} W_{ij}(t), \quad W_{ij}(t) = [-2, 2].$$

Показатель эффективности определим в виде интегрального функционала

$$I(x, u) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=1}^{n(t)} A_{ij} x_{ij}(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij}^2(t) \right\} = \sum_{t=0}^{T-1} f_t^0(x(t), u(t)), \quad (7)$$

где $K > 0$ — достаточно большая константа.

Предполагается, что цены в заявках постоянны и упорядочены по неубыванию:

$$Q_1 \leq Q_2 \leq \dots \leq Q_m, \quad P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_n, \quad (8)$$

$$Q_i \leq P(t) \leq P_j, \quad i = 1, \dots, m(t), \quad j = 1, \dots, n(t), \quad (9)$$

где $P(t), m(t), n(t)$ — равновесная цена и максимальные и минимальные значения индексов i, j , удовлетворяющих неравенствам (9) в момент времени $t = -1, \dots, T-1$. Обозначим через $a_i(t), b_j(t)$ соответствующие запасы и потребности в ресурсах в соответствии с первоначальными заявками.

Тогда балансовые ограничения имеют вид

$$a_i(t) = \sum_{j=1}^{n(t)} x_{ij}(t), \quad i = 1, \dots, m(t), \quad b_j(t) = \sum_{i=1}^{m(t)} x_{ij}(t), \quad j = 1, \dots, n(t); \quad x_{ij}(t) \geq 0; \quad t = -1, \dots, T-1. \quad (10)$$

Снимая фазовые ограничения (10) при помощи штрафной функции (Федоров, 1979)

$$\begin{aligned} L(x, u) &= \sum_{t=-1}^{T-1} \left\{ \sum_{i=1}^{m(t)} \left(a_i(t) - \sum_{j=n(t)}^n x_{ij}(t) \right)^2 + \sum_{j=1}^{n(t)} \left(b_j(t) - \sum_{i=1}^{m(t)} x_{ij}(t) \right)^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [x_{ij}^-(t)]^2 \right\} = \\ &= \sum_{t=-1}^{T-1} l_t^0(x(t), u(t)), \quad x_{ij}^- = \min(x_{ij}, 0), \end{aligned} \quad (11)$$

приходим к показателю

$$J(x, u) = I(x, u) + C \sum_{t=-1}^{T-1} F_t^0(x(t), u(t)),$$

$$F_t^0(x(t), u(t)) = \begin{cases} f_t^0(x(t), u(t)) + C l_t^0(x(t), u(t)), & t = 0, \dots, T-1, \\ 0, & t = -1, \end{cases} \quad (12)$$

где $C > 0$ — достаточно большая константа.

В силу линейности уравнений динамики (6) и выпуклости (11) функции по совокупности переменных в силу результатов (Васильев, 1981) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Функционал (11) представляет собой выпуклую функцию управления.

Введем функцию Гамильтона—Понтрягина

$$H_t(\psi, x, u) = \langle \psi, x + u \rangle + F_t^0(x, u) \quad (13)$$

и сопряженную систему

$$\psi_{ij}(t-1) = \frac{\partial H_t}{\partial x_{ij}} = \psi_{ij}(t) + \frac{\partial F_t^0(x(t), u(t))}{\partial x_{ij}}, \quad t = T-1, \dots, 0; \quad \psi_{ij}(T-1) = 0. \quad (14)$$

Тогда компоненты градиента показателя (19) будут иметь вид (Васильев, 1981):

$$J_{u_{ij}(t)}(x(t), u(t)) = \frac{\partial H_t(\psi(t), x(t), u(t))}{\partial u_{ij}(t)} = \psi_{ij}(t) + \frac{\partial F_t^0(x(t), u(t))}{\partial u_{ij}(t)}, \quad t = -1, \dots, T-1. \quad (15)$$

Это позволяет организовать градиентный метод решения динамической ЗН на УМ.

3. МЕТОД ГРАДИЕНТНОГО СПУСКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗН ОБ УМ

Метод проекции градиента

Имея градиенты (15), для решения динамической задачи управления со свободным правым концом можно воспользоваться методом проекции градиента с постоянным шагом (Поляк, 1983, с. 185):

$$u_{ij}^{k+1}(t) = P_{W_{ij}(t)} \left(u_{ij}^k(t) + a \frac{\partial H(\psi(t), x(t), u(t))}{\partial u_{ij}(t)} \right) \quad \forall i, j, t = -1, \dots, T-1; \quad k = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

где k — номер шага; $a > 0$ — постоянный шаг метода; $P_{W_{ij}(t)}(u_t)$ — оператор проектирования на компоненту $W_{ij}(t) = [-2, 2]$ множества допустимых управляющих воздействий $W(t)$. Тогда согласно результатам (Поляк, 1983, с. 185) справедлива следующая теорема сходимости.

Теорема 2. Пусть $L > 0$ — константа Липшица градиента с компонентами (15) на множестве W и $0 < a < 2/L$. Тогда последовательность $[u^k(t)]$ в методе (16) сходится к множеству решений задачи минимизации (11) на множестве W .

4. ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗН НА УМ

Рассмотрим приближенный алгоритм решения динамической ЗН об УМ на основе классической ЗН на узкие места (Форд, Фалкерсон, 1966). На первом шаге решается задача на построение максимального множества (ММ) независимых клеток (НК) в подматрице эффективности, получающейся на пересечении строк и столбцов, обеспечивающих равенство спроса и предложения в простейшей модели конкурентного рынка со ступенчатыми функциями спроса и предложения (Васин, Морозов, 2005). Задача построения ММ НК является частным случаем ЗН на УМ, если заменить в начальной матрице эффективности кресты нулями, а остальные элементы взять равными единице (это означает, что возможно первое назначение). После решения ЗН на первом шаге соответствующие элементы матрицы эффективности увеличиваются на единицу, т.е. до 2 (второе назначение возможно). На этом первый шаг считается законченным и описанным.

Индуктивный переход осуществляется совершенно аналогично, только вместо исходной матрицы эффективности берется предыдущая. В ней элементы матрицы эффективности меняются от нуля до

текущего значения дискретного времени. С учетом их содержательного смысла, состоящего в возможности назначения соответствующей кратности, решение ЗН на УМ стимулирует выбирать назначения с максимумом минимальной кратности, что формализует стремление заказчиков ПО распределять свои задачи прежде всего среди исполнителей, с которыми установились устойчивые рабочие отношения.

Модельный пример работы приближенного алгоритма

За начальную матрицу эффективности возьмем матрицу из (Форд, Фалкерсон, 1966, с. 88, рис. 5.1) на построение ММ НК, заменив в начальной матрице эффективности кресты нулями (табл. 1). Предположим, что цены одного часа $18 = 9 + 9$ участников составляют:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 3, \quad Q_4 = Q_5 = Q_6 = 2, \quad Q_7 = Q_8 = Q_9 = 1, \\ P_1 = P_2 = P_3 = 4, \quad P_4 = P_5 = P_6 = 3, \quad P_7 = P_8 = P_9 = 2.$$

Если построить ступенчатые графики спроса и предложения, равновесный объем определяется однозначно $V^* = 6$, а равновесная цена представляет отрезок $P^* = [2, 3]$. Оптимальный объем номинально не изменится, если цены пропорционально увеличить в 8 раз — до цены одного рабочего дня. Поскольку далее нам будут нужны только объемы в днях, то будем помнить, что они совпадают по значению с объемом в часах на рис. 1.

Равновесный объем обеспечивают последние 6 исполнителей и первые 6 заказчиков. Для определения начального максимального множества независимых клеток остается подматрица 6×6 , стоящая в левом нижнем углу. Исходное решение легко находится непосредственно, например $x_{45} = x_{54} = x_{66} = x_{73} = x_{82} = x_{91} = 1$. Это дает решение на первом шаге по времени $t = 1$ в задаче на узкие места, причем минимальная эффективность по оптимальному плану назначений составит $\min(1) = 1$. Соответствующие элементы матрицы эффективности увеличатся на единицу и примут значения 2.

Теперь можно смоделировать нетривиальное продолжение на шаге 2 динамической модели. Предположим, что $a_7(2) = a_8(2) = a_9(2) = 0$; $b_1(2) = b_2(2) = b_3(2) = 0$. Данные после второго шага представлены в табл. 2.

Таблица 1. Исходные данные и рейтинговая матрица после первого шага (двойки стоят на месте решения)

	$b_j(1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
$a_i(1)$	i/j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_i
1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	3
1	2	1	0	1	1	0	0	0	0	0	3
1	3	0	1	0	1	0	0	0	1	0	3
1	4	0	1	1	1	2	1	0	1	1	2
1	5	0	0	0	2	0	1	0	1	0	2
1	6	0	1	0	0	0	2	0	1	0	2
1	7	1	0	2	1	0	1	1	0	1	1
1	8	0	2	0	1	0	1	0	0	0	1
1	9	2	0	0	1	0	0	0	1	0	1
	P_j	4	4	4	3	3	3	2	2	2	

Таблица 2. Данные и рейтинговая матрица после второго шага (тройки стоят на месте решения)

	$b_j(2)$	0	0	0	1	1	1	1	1	1	
$a_i(2)$	i/j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_i
1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	3
1	2	1	0	1	1	0	0	0	0	0	3
1	3	0	1	0	1	0	0	0	1	0	3
1	4	0	1	1	1	3	1	0	1	1	2
1	5	0	0	0	3	0	1	0	1	0	2
1	6	0	1	0	0	0	3	0	1	0	2
0	7	1	0	2	1	0	1	1	0	1	1
0	8	0	2	0	1	0	1	0	0	0	1
0	9	2	0	0	1	0	0	0	1	0	1
	P_j	4	4	4	3	3	3	2	2	2	

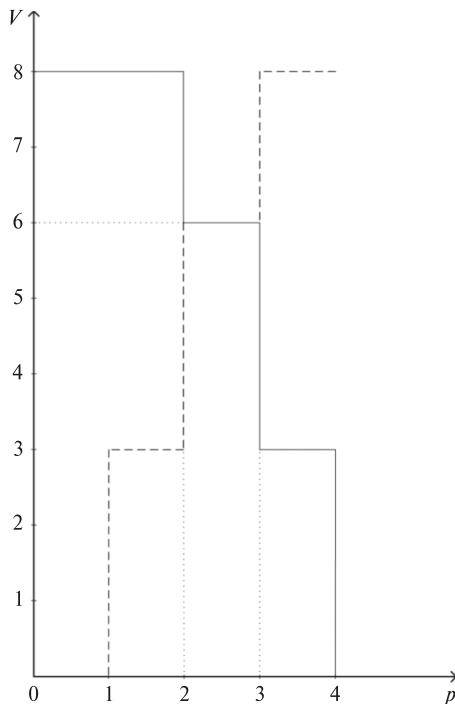


Рис. 1. Спрос и предложение на шаге 1

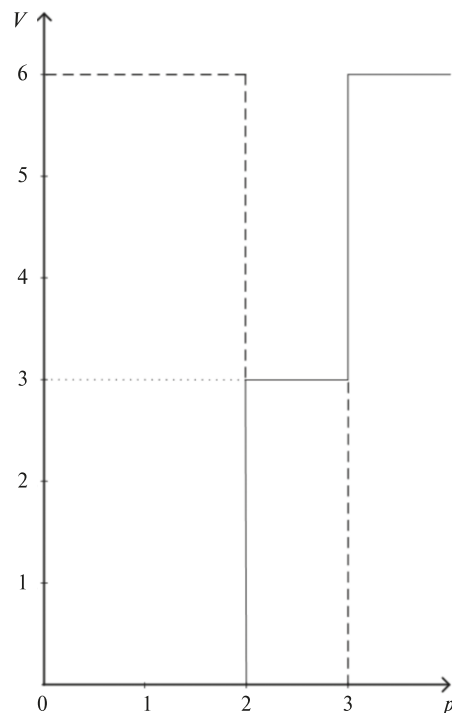


Рис. 2. Спрос и предложение на шаге 2

Тогда, изобразив на графике (рис. 2) функцию спроса и предложения, убеждаемся, что $V^* = 3$; $P^* = [2, 3]$. Причем нужные объемы обеспечивают участники рынка $i, j = 4, 5, 6$.

Теперь нужно взять соответствующую подматрицу и решить задачу о назначении с весами «1» в тех клетках, которые были выбраны на шаге 1. Решение этой задачи совпадет с сужением предыдущего решения на подматрицу $x_{54} = x_{45} = x_{66} = 1$. Соответствующие элементы увеличат эффективность до 3. Если теперь считать, что $a_i(t) \equiv b_j(t) \equiv 1$, то решение останется таким же, как на шаге 1 с минимальной эффективностью оптимального плана назначения $\min(t) \equiv t - 1$, $t = 1, 2, \dots$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена методология определения загрузки работ по исполнителям на рынке РПО, обеспечивающих стабилизацию планов назначения за счет уменьшения изменения этих планов. Показано, что задача определения оптимальных приращений планов сводится к задаче дискретного оптимального управления со свободным правым концом и может быть решена методом проекции градиента. Основным результатом работы является доказательство дифференцируемости показателя эффективности по приращениям для динамического расширения ЗН на УМ. Установлено, что поставленная динамическая задача оптимизации инвестиций является выпуклой, откуда следует сходимость метода проекции градиента к множеству решений задачи. Приводится также приближенный алгоритм и модельный пример его использования для решения динамического расширения ЗН на УМ, основанный на решении текущей статической задачи с увеличением на единицу тех элементов матрицы эффективности, которые совпадают с соответствующими элементами матрицы оптимальных назначений, если отказаться от целочисленности матрицы назначений. Это эквивалентно рандомизации задачи о назначении, когда соответствующие назначения реализуются с определенными вероятностями, что позволяет определить погрешность приближенного алгоритма путем сравнения с точным решением, полученным градиентным методом при достаточно больших значениях штрафных констант.

Практическая значимость работы определяется применением в транзакционных платформах на рынке РПО для динамической загрузки заданий по терминологии, обоснованной в работе (Устюжанина, Дементьев, Евсюков, 2021). Построена динамическая модель загрузки заданий с двумя группами агентов — компаниями—разработчиками ПО и компаниями—заказчиками ПО, которые

могут опередить свои резервные цены на рынке повременной аренды разработанного ПО в двухсекторной модели экономики (Васин, Морозов, 2005). Дискриминируемыми агентами являются компании—заказчики ПО, которые оплачивают услуги оператора платформы в виде процентных надбавок, включенных оператором в цену работы компаний—разработчиков ПО. Имеются в виду платформы—рынки, взаимодействие экономических агентов на которых имеет эпизодический характер разовых сделок. Предполагается удаленное взаимодействие, т.е. возможность коммуникации между агентами, находящимися на любом расстоянии друг от друга. Допускается возможность масштабирования, что означает теоретическое отсутствие ограничений для расширения поля взаимодействия (числа пользователей). Такое расширение возможно за счет перекрестного сетевого эффекта, когда численность одного вида пользователей влияет на численность другого вида (спрос порождает предложение, и наоборот). Предполагается возможность цифровых транзакционных платформ (ЦТП) влиять на объем коммуникаций через уровень и структуру цен. Исходя из базовых характеристик поля взаимодействия, платформа РПО относится к двусторонним рынкам. Для одноранговых ЦТП (Устюжанина, Дементьев, Евсюков, 2021), организующих торговые транзакции, непосредственными агентами являются поставщики (агенты, разрабатывающие ПО) и потребители (агенты, использующие разработанное ПО для повременной сдачи в аренду). Операторы платформы на рынке РПО могут получать доход в виде платы пользователей за покупку. Разработчики ПО имеют доход в виде платы за повременное пользование ПО в двухсекторной модели экономики (Васин, Морозов, 2005), цена которого определяет резервные цены потребителей.

Следует отметить, что настоящая статья является продолжением серии статей (Перевозчиков, Лесик, 2014; Лесик, Перевозчиков, 2016, 2020) о динамическом расширении статических моделей рынка с рынка инвестиций на рынок разработки программного обеспечения и использует разработанный там инструментарий, который может служить фундаментальной основой для построения соответствующих цифровых платформ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Ашманов С.А.** (1981). Линейное программирование. М.: Наука. [Ashmanov S.A. (1981). *Linear programming*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Васильев Ф.П.** (1981). Методы решения экстремальных задач. М.: Наука. [Vasil'ev F.P. (1981). *Methods for solving extremal problems*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Васин А.А., Григорьева О.М., Лесик И.А.** (2017). Синтез транспортной системы многоузлового конкурентного рынка с переменным спросом. В сб.: *Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова*. № 55. С. 74–90. [Vasin A.A., Grigor'eva O.M., Lesik I.A. (2017). *Applied Mathematics and Informatics. Scientific Works of Computational Mathematics and Cybernetics Department, MSU*, 55, 74–90 (in Russian).]
- Васин А.А., Григорьева О.М., Лесик И.А.** (2018). Задача оптимизации транспортной системы энергетического рынка. В сб.: *IX Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2018)*. Труды. А.А. Васин, А.Ф. Измаилов (отв. ред.). С. 247–251. [Vasin A.A., Grigor'eva O.M., Lesik I.A. (2018). The task of optimizing the transport system of the energy market. In: *The collection of the IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM2018)*. Proceedings. Responsible editors: A.A. Vasin, A.F. Izmailov, 247–251 (in Russian).]
- Васин А.А., Григорьева О.М., Цыганов Н.И.** (2017). Оптимизация транспортной системы энергетического рынка // *Доклады Академии наук*. Т. 475. № 4. С. 377–381. [Vasin A.A., Grigor'eva O.M., Tsyganov N.I. (2017). Optimization of the transport system of the energy market. *Reports of the Academy of Sciences*, 475, 4, 377–381 (in Russian).]
- Васин А.А., Морозов В.В.** (2005). Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс. [Vasin A.A., Morozov V.V. (2005). *Game theory and models of mathematical economics*. Moscow: MAKSS Press (in Russian).]
- Корбут А.А., Финкильштейн Ю.Ю.** (1969). Дискретное программирование. Д.Б. Юдин (ред.). М.: Наука. [Korbut A.A., Finkil'shtein Yu. Yu. (1969). *Discrete programming*. D.B. Yudin (ed.). Moscow: Nauka (in Russian).]
- Лесик И.А., Перевозчиков А.Г.** (2016). Определение оптимальных объемов производства и цен реализации в линейной модели многопродуктовой монополии // *Экономика и математические методы*. Т. 52. № 1. С. 140–148. [Lesik I.A., Perevozchikov A.G. (2016). Determination of the optimal production volumes and sales prices in the linear model of multiproduct monopoly. *Economics and Mathematical Methods*, 52, 1, 140–148 (in Russian).]

- Лесик И.А., Перевозчиков А.Г.** (2020). Динамическая модель инвестиций в научные исследования олигополии // *Экономика и математические методы*. Т. 56. № 2. С. 102–114. [**Lesik I.A., Perevozchikov A.G.** (2020). Dynamic model of investments in research of oligopolia. *Economics and Mathematical Methods*, 56, 2, 102–114 (in Russian).]
- Макаров В.Л., Рубинов Ф.М.** (1973). Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука. [**Makarov V.L., Rubinov F.M.** (1973). *Mathematical theory of economic dynamics and equilibrium*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Мезоэкономика развития (2011). Г.Б. Клейнер (ред.). М.: Наука. [*Mesoeconomics of development* (2011). G.B. Kleiner (Ed.). Moscow: Nauka (in Russian).]
- Перевозчиков А.Г., Лесик И.А.** (2014). Нестационарная модель инвестиций в основные средства предприятия // *Прикладная математика и информатика. Труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова*. М.: МАКС Пресс. № 46. С. 76–88. [**Perevozchikov A.G., Lesik I.A.** (2014). Non-stationary model of investment in fixed assets of the enterprise. *Applied Mathematics and Informatics. Scientific Works of Computational Mathematics and Cybernetics Department, MSU*. Moscow: MAKS Press, 46, 76–88 (in Russian).]
- Поляк Б.Т.** (1983). Введение в оптимизацию. М.: Наука [**Poljak B.T.** (1983). *Introduction to optimization*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Сергиенко А.М., Симоненко В.П., Симоненко А.В.** (2016). Улучшенный алгоритм назначения для планировщиков заданий в неоднородных распределительных вычислительных системах // *Системні дослідження та інформаційні технології*. № 2. С. 20–35. [**Sergienko A.M., Simonenko V.P., Simonenko A.V.** (2016). Improved assignment algorithm for task schedulers in heterogeneous distributed computing systems. *System Research and information technologies*, 2, 20–35 (in Russian).]
- Устюжанина Е.В., Дементьев В.Е., Евсюков С.Г.** (2021). Трансакционные цифровые платформы: задача обеспечения эффективности // *Экономика и математические методы*. Т. 57. № 1. С. 5–18. [**Ustyuzhanina E.V., Dementiev V.E., Evsukov S.G.** (2021). Digital transaction platforms: Ensuring their efficiency. *Economics and Mathematical Methods*, 57, 1, 5–18 (in Russian).]
- Федоров В.В.** (1979). Численные методы максимина. М.: Наука. [**Fedorov V.V.** (1979). *Numerical methods of maximin*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Форд Л., Фалкерсон Д.** (1966). Потoki в сетях. М.: Мир. [**Ford L., Falkerson D.** (1966). *Streams in networks*. Moscow: Mir (in Russian).]
- Debreu G.** (1954). Valuation equilibrium and Pareto optimum. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 40, 588–592.
- Ding X., Wang K., Gibbons P.B., Zhang X.** (2012). BWS: Balanced work stealing for time-sharing multicores. *Proceedings of the 7th ACM European Conference on Computer Systems*. New York: EuroSys, 12, 365–378.

Dynamic model of the software development market based on the assignment problem on pain points

© 2021 I.A. Lesik, A.G. Perevozchikov

I.A. Lesik,

Joint-Stock Company Scientific and Production Association "Russian basic information technology", Moscow, Russia; e-mail: lesik56@mail.ru

A.G. Perevozchikov,

Joint-Stock Company Scientific and Production Association "Russian basic information technology", Moscow, Russia; e-mail: pere501@yandex.ru

Received 03.07.2021

Abstract. The authors propose the formulation of a discrete dynamic model of the software development market (SM) based on the assignment problem (AP) on pain points (PP), which can also be obtained according to the scheme used in (Vasin, Grigorieva, Lesik, 2018), if we abandon the integer number of elements of the assignment matrix. However, there are also such features as: equilibrium prices can be calculated directly, and therefore a variational formulation of the internal problem of determining equilibrium prices based on Debreu's theorem (Debreu, 1954) is not required. The functions of changing the phase coordinates can be taken convex, for example, the norm of the difference in the square, and do not take into account the constant costs for each control switching. Such a statement is also given in this paper. If we have a dynamic expansion of the AP on PP, it is possible to determine the additional profit of the transport system through the use of futures. Formulas for the components of the gradient of the indicator are obtained. This allows us to organize a gradient method for solving a dynamic AP on PP. The authors also demonstrate an approximate algorithm and a model example of its use for solving the dynamic expansion of the AP on PP, based on solving the current static problem with an increment of those elements of the efficiency matrix that coincide with the corresponding elements of the optimal assignment matrix, if we abandon the integer nature of the assignment matrix. This is equivalent to randomization of the assignment problem, when the corresponding assignments are implemented with certain probabilities, which are used to determine the error of the approximate algorithm by comparing it with the exact solution obtained with the gradient method for sufficiently large values of penalty constants.

Keywords: dynamic problem of assignment on pain points, phase constraints, method of penalty functions, Hamilton–Pontryagin's function, conjugate system, components of the gradient, gradient method of the exact solution, approximate algorithm for solving the dynamic problem.

JEL Classification: O12, C51.

DOI: 10.31857/S042473880017518-8