ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2022, том 58, № 1, с. 131–139

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Адаптация стохастической модели экономических циклов к эмпирическим данным

В.А. Кармалита,
Частный консультант, Канада; e-mail: karmalita@videotron.ca

Поступила в редакцию 22.08.2021

Аннотация. Исследование посвящено разработке процедуры адаптации стохастической модели экономического цикла к эмпирическим значениям валового продукта. Установление статистической эквивалентности процесса авторегрессии второго порядка АР(2) дискретной выборке из случайных колебаний функции доходов позволило определить аналитическую связь коэффициентов авторегрессионной модели с параметрами экономического цикла. Наличие этой связи сводит процедуру адаптации модели цикла к линейной задаче оценки коэффициентов АР(2)-модели по эмпирическим данным. Установлено существование оптимальной дискретизации функции доходов в виде четырех отсчетов на период цикла, при которой достигается наибольшая точность оценок коэффициентов цикла ряда Юла, т.е. обеспечивается получение эффективных оценок параметров цикла. Предложенная процедура адаптации модели цикла учитывает особенности эмпирических данных и позволяет: 1) восстановить функцию доходов из значений валового продукта; 2) выделить данные интересующего цикла; 3) определить временной интервал псевдостационарности модели; 4) оценить ее параметры, соответствующие этому интервалу; 5) проанализировать точность получаемых оценок параметров цикла. Процедура адаптации модели формально (математически) описана от эмпирических значений валового продукта до оценок параметров цикла и применима для эконометрических задач оценивания параметров систем, описываемых обыкновенными дифференциальными и разностными уравнениями второго порядка.

Ключевые слова: экономические циклы, случайные колебания, ряд Юла, оценки максимального правдоподобия, псевдостационарность.

Классификация JEL: C22, C65, C83.

Цитирование: **Кармалита В.А.** (2022). Адаптация стохастической модели экономических циклов к эмпирическим данным // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 1. С. 131–139. DOI: 10.31857/S042473880018968-3

ВВЕДЕНИЕ

В результате рассмотрения в (Кармалита, 2021) одномерной экономической модели «инвестиции → доход» было предложено математическое описание экономического цикла в виде обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{\Xi}(t)+2h\dot{\Xi}(t)+(2\pi f_0)^2\Xi(t)=E(t), \quad (1)$$

где $\Xi(t)$ и $E(t)$ — флуктуации функции доходов $X(t)$ и инвестиций соответственно. Это уравнение описывает *случайные колебания* линейной упругой системы (Болотин, 1979) с собственной частотой $f_0 = 1/T_0$ и коэффициентом демпфирования (затухания) *h под воздействием белого шума* $E(t)$. Корреляционная функция $\rho(\tau)$ решения уравнения (1) имеет вид (Jenkins, Watts, 1968):

$$\rho(\tau)=\left(e^{-h|\tau|}\sin(2\pi f_h|\tau|+\varphi)\right)/\sin\varphi,$$

где $f_h=\sqrt{f_0^2-(h/2\pi)^2}$ — собственная частота с поправкой на демпфирование, $\sin\varphi = f_h/f_0$.

В соответствии с данной моделью интенсивность (амплитуда) цикла определяется диапазоном частот в окрестностях собственной частоты системы f_0, что объясняет другое название *случайных колебаний* — узкополосный случайный процесс (рис. 1).

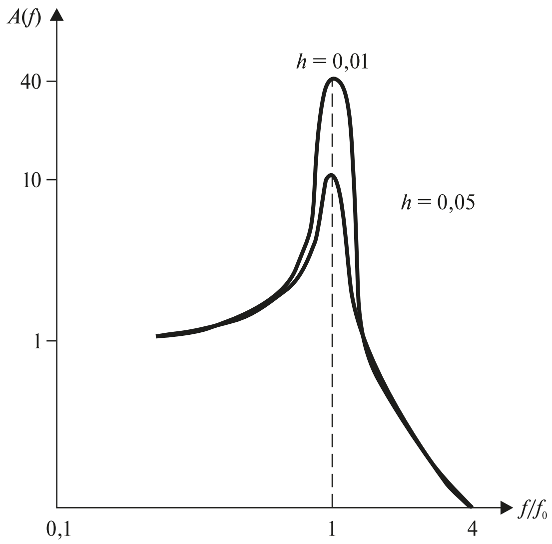

Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) упругой системы

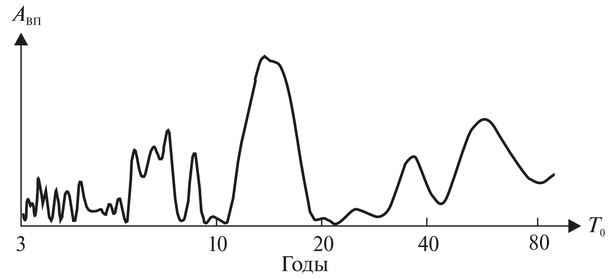

Рис. 2. Амплитудный спектр флуктуаций значений глобального ВП

Этот факт позволяет управлять значениями цикла, изменяя процентную ставку инвестиций с длительностями, коррелированными с T_0. Поскольку положение и ширина соответствующего частотного диапазона определяется параметрами h и f_0, применение модели (1) на практике требует ее адаптации к эмпирическим данным (значениям функции доходов).

Реализуется процедура адаптации с применением математических методов и эмпирических данных, являющихся результатами наблюдений (измерений) функции $X(t)$. Отсутствие средств и методов формирования непрерывных реализаций доходной функции приводит к тому, что ее значения доступны лишь в дискретные моменты времени $t_i = \Delta t\, i,\ i = 1, \ldots, n$. Иначе говоря, они имеют вид временных рядов (Box et al., 2015), представляемых последовательностями чисел $x_i = X(t_i)$. Этот факт позволяет применять дискретные экономические модели (Gandolfo, 2010) с конечными разностями вида $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Разностные уравнения являются аппроксимацией дифференциальных уравнений с заменой производных соответствующими конечными разностями, поэтому их применение сопровождается методической погрешностью. Из определения производной переменной величины в виде $\dot{X}(t_i) = \lim\limits_{\Delta t \to 0}(\Delta x_i / \Delta t)$ следует, что конечность интервала дискретизации Δt означает, что $\Delta x_i / \Delta t \approx \dot{X}(t_i)$. Иначе говоря, вследствие дискретного представления экономических данных погрешность аппроксимации дифференциальных уравнений не может быть устранена в принципе.

Между тем, существует возможность применения временного ряда, модель которого дискретно совпадает (без ошибки аппроксимации) с уравнением (1) (Кармалита, 2018). Преимущество использования моделей временных рядов связано с наличием формальной процедуры оценки их коэффициентов, которая имеет математическое описание от значений эмпирических данных до оценок коэффициентов дифференциального уравнения. Целью данной работы является разработка процедуры адаптации модели экономического цикла к дискретным значениям доходной функции (разд. 1).

В разд. 2 рассмотрены особенности экономических систем и эмпирических данных, которые следует учесть в процедуре адаптации модели цикла. В частности, на практике индикатором доходов служит валовой продукт (ВП), обозначаемый далее как $G(t)$. Его значения представляют собой монетарную оценку произведенных товаров и оказанных услуг (значений функции доходов) в течение некоторого периода времени ΔT. Поскольку оценивание параметров цикла требует знания функции $X(t)$, то значения $G(t)$ нельзя непосредственно применить для адаптации модели «инвестиции→доход». Отсюда возникает задача восстановления функции $X(t)$ из эмпирических значений $G(t)$.

Спектральный анализ флуктуаций значений глобального ВП (Korotaev, Tsirel, 2010) показывает их многокомпонентность (рис. 2). Здесь T_0 обозначает период (продолжительность) экономических циклов, составляющих флуктуации доходной функции. Из представленного спектра следует, что в $G(t)$ одновременно присутствуют несколько циклов, имеющих разный период T_0. Адаптация модели конкретного цикла требует знания эмпирических данных, относящихся только к нему. Поэтому следует разработать способ выделения данных рассматриваемого цикла из восстановленной реализации $X(t)$.

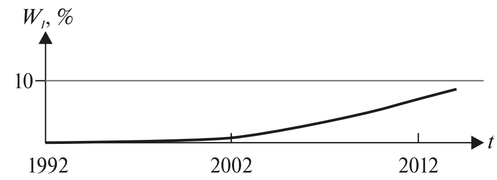

Рис. 3. Рост W_I (на душу населения), %

Как известно, прогресс производственных технологий и методов управления сопровождается повышением эффективности экономических систем. Соответственно, происходит эволюционный рост числового показателя эффективности экономических систем — среднеквадратического коэффициента усиления K_σ (Кармалита, 2021). Прогресс сопровождается и ростом совокупного богатства систем W_I, что наглядно иллюстрирует рис. 3 (Yamaguchi, Islam, Managi, 2019).

В данном примере W_I включает производственный, человеческий и природный капиталы общества. Увеличение совокупного богатства экономических систем приводит к уменьшению их собственной частоты f_0, поскольку

$$f_0 = \sqrt{w_s / W_I} \, / \, 2\pi,$$

w_s — характеристика эластичности (жесткости) экономической системы (Кармалита, 2021). Изменение параметров экономической системы во времени означает ее нестационарность, т.е. для вероятностного описания функции доходов необходимо иметь множество ее наблюдений (реализаций). Экономические данные, являясь по сути «летописью» (хроникой), доступны лишь в единственном виде. Этот факт порождает задачу оценки параметров нестационарной модели цикла по одной его реализации.

1. ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ

Рассмотрим свойства временного ряда, генерируемого АР(2)-моделью в виде:

$$\xi_i - a_1\xi_{i-1} - a_2\xi_{i-2} = \varepsilon_i,$$

именуемого рядом Юла. При значениях коэффициентов модели $0 \le a_1 \le 2$ и $-1 < a_2 \le 0$ этот ряд является стационарным процессом с псевдопериодическим поведением (Box et al., 2015), корреляционная функция которого имеет вид $\rho_i = (-a_2)^{i/2} \sin(2\pi\theta i + \varphi) / \sin\varphi$. Здесь θ — циклическая частота для $\Delta t = 1$. Псевдопериодическое поведение АР(2)-процесса допускает предположение о том, что его модель может быть дискретным аналогом линейного дифференциального уравнения (1). Это допущение базируется на известном факте использования математиком Д.У. Юлом АР(2)-модели для описания движения маятника в воздушной среде с сопротивлением, пропорциональным его скорости, подвергающегося случайным толчкам через равные интервалы времени.

В (Кармалита, 2018) было предложено определить связь коэффициентов модели АР(2) с характеристиками упругой системы из условия статистической эквивалентности дискретной выборки из случайных колебаний и ряда Юла. Это условие формально записывается как равенство значений их корреляционных функций:

$$\rho(\tau = \Delta t\, i) = \rho_i. \tag{2}$$

Из (2) устанавливается однозначная связь параметров упругой системы с коэффициентами модели АР(2):

$$\begin{aligned} h &= -\ln\left(-a_2\right) / 2\Delta t; \\ f_h &= \cos^{-1}\left(a_1 / 2\sqrt{-a_2}\right) / 2\pi\Delta t. \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку интервал дискретизации случайных колебаний Δt присутствует в выражениях (3), возникает задача определения его значения. Это можно сделать исходя из особенностей процедуры оценивания коэффициентов a_1 и a_2.

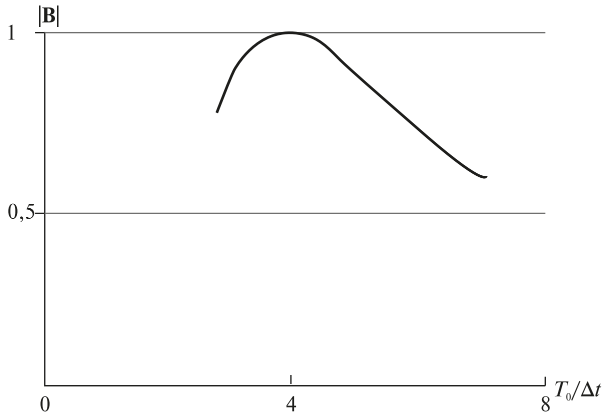

Рис. 4. Зависимость значения |**B**| от интервала дискретизации Δt

Для первых двух корреляций АР(2)-процесса можно составить систему уравнений Юла–Уокера: $\rho_1 = a_1 + a_2\rho_1$; $\rho_2 = a_1\rho_1 + a_2$. В матричной форме она записывается виде $\mathbf{B}\times\mathbf{A} = \mathbf{P}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix};\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix};\ \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}.$$

Оценивание коэффициентов a_1 и a_2 сводится к решению этого матричного уравнения относительно вектора **A**, которое формально записывается в виде $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}$.

Для обращения матрицы **B** она должна быть хорошо обусловлена. Это значит, что для стабильного решения ее определитель |**B**| должен быть максимально большим. В этом случае малые погрешности в значениях вектора **P** не приводят к большим отклонениям в значениях коэффициентов a_1 и a_2. Поэтому критерий выбора значения интервала дискретизации Δt можно записать как $|\mathbf{B}| \underset{\Delta t}{\rightarrow} \max$.

Очевидно, что определитель $|\mathbf{B}| = 1 - \rho_1^2$ достигает максимума при $\rho_1 = 0$, что обеспечивается значением $\Delta t = T_0/4$ (Кармалита, 2018). Это условие не является слишком обременительным на практике, поскольку диапазону $T_0/5 \le \Delta t \le T_0/3$ соответствуют значения определителя $|\mathbf{B}| \ge 0{,}9$ (рис. 4) и его можно полагать псевдооптимальным.

При оптимальной дискретизации ($\Delta t = T_0/4 = 1$) для значений $h \le 0{,}2$ выполняется условие: $0{,}99 \le f_h / f_0 \le 1$. Поэтому для эконометрической практики полагаем равенство собственной частоты колебаний и ее значения с поправкой на демпфирование.

Использование оценок максимального правдоподобия (ОМП) корреляций временного ряда с размерностью n в виде

$$\tilde{\rho}_k = \frac{n}{n-k}\left(\sum_{i=1}^{n-k}\xi_i\xi_{i+k}\right) / \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$$

обеспечивает следующие оценки параметров авторегрессионной модели:

$$\tilde{a}_1 = \frac{\tilde{\rho}_1\left(1-\tilde{\rho}_2\right)}{1-\tilde{\rho}_1^2},\ \tilde{a}_2 = \frac{\tilde{\rho}_2-\tilde{\rho}_1^2}{1-\tilde{\rho}_1^2}.$$

Таким образом, процедура оценивания параметров случайных колебаний трансформируется в линейную задачу оценивания коэффициентов модели АР(2). Наличие оценок $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ позволяет вычислить оценки как $\tilde{h}$ и $\tilde{f}_0$ на основе выражений (3), так и среднеквадратического коэффициента усиления системы в виде (Karmalita, 2020):

$$\tilde{K}_\sigma = \left[\left(1-a_2\right) / \left(1+a_2\right)(1-a_2)^2 - a_1^2\right]^{1/2}.$$

Вследствие свойства инвариантности метода максимального правдоподобия вычисленные оценки будут являться ОМП.

В силу конечности временного ряда ($n \ll \infty$) оценки коэффициентов a_1 и a_2 имеют статистическую погрешность, которая характеризуется ковариационной матрицей вида

$$\mathbf{\Gamma}_{\tilde{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} D_{\tilde{a}_1} & \gamma_{\tilde{a}_1\tilde{a}_2} \\ \gamma_{\tilde{a}_2\tilde{a}_1} & D_{\tilde{a}_2} \end{pmatrix}.$$

При оптимальной дискретизации случайных колебаний оценки $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ независимы ($\gamma_{\tilde{a}_1\tilde{a}_2} = \gamma_{\tilde{a}_2\tilde{a}_1} = 0$), а их дисперсии равны (Кармалита, 2018):

$$D_{\tilde{a}_1} \approx \frac{1+a_2}{(1-a_2)n},\ D_{\tilde{a}_2} \approx \frac{1-a_2^2}{n}.$$

Эти выражения позволяют определять статистические погрешности оценок $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ и, соответственно, связанных с ними оценок параметров упругой системы. В частности, среднеквадратические относительные погрешности периода $\tilde{T}_0$ и коэффициента усиления $\tilde{K}_\sigma$ равны (Karmalita, 2020):

$$\delta_{\tilde{T}_0} = \frac{\sigma_{\tilde{T}_0}}{T_0} \approx 0{,}5\sqrt{\frac{1+a_2}{n(1-a_2)(-a_2)}},\ \delta_{\tilde{K}_\sigma} = \frac{\sigma_{\tilde{K}_\sigma}}{K_\sigma} \approx \frac{K_\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Представленная процедура позволяет адаптировать модель цикла к эмпирическим данным, для чего необходимо наличие последних в виде временного ряда $\xi_i = \Xi(t_i)$. Особенности его формирования в практике эконометрических исследований рассматриваются в следующем разделе.

2. ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ

Как указывалось во введении, в качестве индикатора доходов используется ВП, значение которого, в соответствии с его определением, математически определяется формулой:

$$G(t) = \int_{t-\Delta T}^{t} X(t)\,dt = \int_0^t H(\tau)\, X(t-\tau)\,d\tau, \tag{4}$$

где

$$H(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \le \tau \le \Delta T; \\ 0, & \tau < 0,\ \tau > \Delta T. \end{cases}$$

В метрологии уравнение свертки (4) представляет результаты регистрации процесса $X(t)$ средством измерения (СИ), инерционные свойства которого характеризуются импульсной функцией $H(\tau)$. Поэтому значения ВП можно интерпретировать как результат измерения функции доходов инерционным СИ, что приводит к систематическим погрешностям в значениях $G(t)$ по отношению к $X(t)$. В частотной области импульсная функция $H(\tau)$ имеет вид

$$H(f) = A_h(f)\,\mathrm{e}^{j\Phi_h(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\mathrm{e}^{-j2\pi f t}\,dt = \Delta T\ sinc(\pi \Delta T f)\,\mathrm{e}^{-j\pi\Delta T f},$$

где

$$sinc(\pi\Delta T f) = \begin{cases} 1, & f = 0; \\ \sin \pi\Delta T f / (\pi \Delta T f), & f \ne 0. \end{cases}$$

Вид амплитудной компоненты $A_h(f)$ представлен на рис. 5. *Напомним, что свертке двух функций во временной области соответствует умножение их образов Фурье. Следовательно, уравнение (*4) в частотной области пред*ставляется в виде произведения*:

$$G(f) = H(f)\,X(f), \tag{5}$$

где $X(f)$, $G(f)$ — *Фурье-образы* функции доходов и ВП соответственно. Из представленной на рис. 5 формы $A_h(f)$ следует, что $X(f) \ne G(f)$. Если $\Delta T > 1$, то амплитуды циклов с большим периодом увеличиваются, с малым — уменьшаются. Следовательно, значения ВП нельзя непосредственно использовать для адаптации модели в виде уравнения (1). Однако знание $H(\tau)$ и $G(t)$ дает возможность решить уравнение (4) относительно $X(t)$, определив $X(f)$ из (5) и вычислив его обратное преобразование Фурье:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,\mathrm{e}^{j2\pi f t}\,df.$$

Деление $G(f)$ на $H(f_i = i/\Delta T) = 0$ делает задачу некорректной, но поиск ее решения (восстановление функции доходов) возможен методом регуляризации (Tikhonov, Arsenin, 1979). Основу этого метода составляет теорема Тихонова, которая допускает существование приближенного решения некорректной задачи при определенных условиях. Для известных $H(\tau)$ и $G(t)$ можно составить регуляризирующий оператор относительно приближенного решения $X_\alpha(t)$:

$$\Psi\left[X_\alpha(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^t H(t-\tau)\, X_\alpha(\tau)\,d\tau - G(t) \right|^2 dt +$$
$$+ \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ b_0 [X_\alpha(t)]^2 + \sum_{l=1}^{p} b_l \left[d^l X_\alpha(t) / dt^l \right]^2 \right\} dt,$$

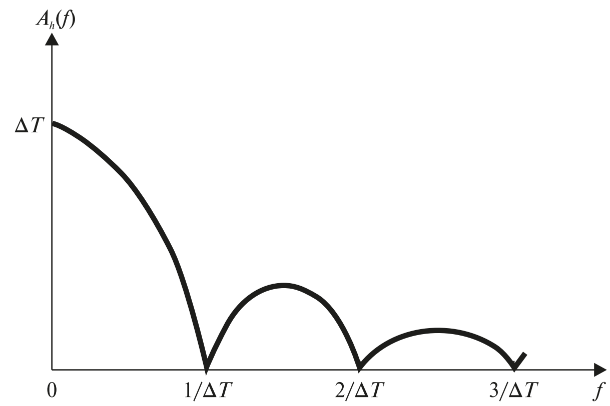

Рис. 5. Фурье-образ амлитудной компоненты импульсной функции $H(\tau)$

в котором переменная α называется параметром регуляризации. Последний член в правом выражении для Ψ характеризует гладкость функции $X(t)$ и называется стабилизатором задачи. Поиск приближенного решения $X_\alpha(t)$ формулируется как минимизация функционала Ψ: $\Psi \underset{X_\alpha(t)}{\to} \min$, которую можно выполнить в частотной области. Фурье-образ функционала Ψ имеет вид

$$\Psi\left[X_\alpha(f)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)X_\alpha(f)-G(f)\right|^2 df+\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{p}b_l f^{2l}\right]\left|X_\alpha(f)\right|^2 df,$$

где $X_\alpha(f)$ — Фурье-образ $X_\alpha(t)$. Решение $X_\alpha(f)$, обеспечивающее минимум функционала $\Psi[X_\alpha(f)]$, определяется экстремальным условием $\partial\Psi[X_\alpha(f)]/\partial X_\alpha(f)=0$, которое приводит $X_\alpha(f)$ к виду:

$$X_\alpha(f)=H^*(f)G(f)/\left[A_h^2(f)+\alpha B_p(f)\right]. \tag{6}$$

Здесь индекс “*” — знак сопряжения, $B_p(f)=\sum_{l=0}^{p}b_l f^{2l}$. Подстановка выражения (6) в функционал Ψ преобразует его в функцию параметра α:

$$\Psi(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha B_p(f)|G(f)|^2}{A_h^2(f)+\alpha B_p(f)}df.$$

Следовательно, задача минимизация функционала $\Psi[X_\alpha(f)]$ сводится к нахождению минимума функции одной переменной. Она реализуется, например, как числовой поиск (вычислительные испытания) минимума функции $\Psi(\alpha)$ (Onwubolu, Babu, 2013). Найденное оптимальное значение α_{opt} используется для вычисления в соответствии с (6) образа $X_\alpha(f)$, обратное преобразование Фурье которого дает решение $X_\alpha(t)$.

Следует отметить особенности этого преобразование. Как правило, функция доходов имеет растущий долговременный тренд, т.е. ее начальное $G(0)$ и конечное $G(t_1)$ значения различны. Преобразование Фурье функции $G(t)$ предполагает периодичность этого фрагмента, из чего следует появление разрыва между $G(t_1)$ и первым значением гипотетического продолжения функции $G(t)$. В результате решение $X_\alpha(t)$ имеет колебания (явление Гиббса) в областях, прилегающих к точкам $t = 0$ и t_1. Разрыв указанных значений *ВП* можно устранить дополнением конечной точки $G(t_1)$ кубической параболой $Q(t)$ (рис. 6).

Коэффициенты полинома $Q(t) = q_0 + q_1t + q_2t^2 + q_3t^3$ определяются из граничных условий:

$$Q(t_1) = G(t_1);\ Q(t_2) = G(0);\ dQ(t)/dt\big|_{t_1}=dG(t)/dt\big|_{t_1},\ dQ(t)/dt\big|_{t_2}=dG(t)/dt\big|_{t=0},$$

где $t_2 = 2t_1$. Поскольку производные полинома $Q(t)$ выше третьего порядка равны нулю, то в стабилизаторе задачи параметр $p = 3$. Коэффициенты b_l стабилизатора можно связать с коэффициентами полинома Баттерворта:

$$B_3(f) = b_3f^3 + b_2f^2 + b_1f + b_0 = (\lambda + f)^3 = f^3 + 2\lambda f^2 + 2\,\lambda f + \lambda^3.$$

Здесь λ — масштабный коэффициент, изменение значений которого приводит к изменению полосы пропускания фильтра Баттерворта, но не влияет на форму амлитудной компоненты $A_B(f)$ его частотной характеристики. Значение λ определяется корреляцией частот среза $G(f)$ и $A_B(f)$.

Наличие восстановленной доходной функции позволяет оценивать параметры модели АР(2). Однако флуктуации $X(t)$, как это иллюстрирует рис. 2, являются совокупностью разнообразных экономических циклов (Китчина, Жюглара, Кондратьева и пр.). Поэтому для адаптиции модели интересующего цикла необходимо выделить из восстановленной реализации $X_\alpha(t)$ лишь его данные. Для чего можно применить полосовой фильтр (Schlichtharle, 2011), который позволяет проходить без изменений узкополосным процессам, находящимся в его полосе пропускания частот $f_1 \le f \le f_2$, и подавляет все остальные. Поскольку основная часть энергии цикла сконцентрирована в окрестностях собственной частоты f_0, то для его выделения значения f_1 и f_2 фильтра можно определить, например, как представлено на рис. 7.

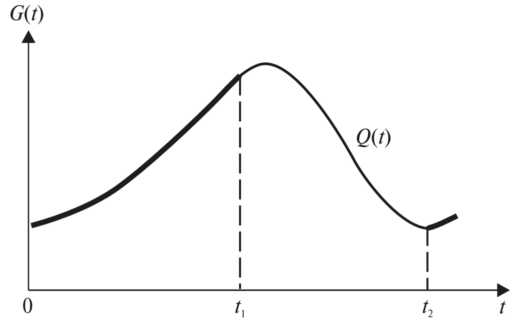

Рис. 6. Формирование периодически непрерывной функции

Для оценивания параметров модели АР(2) можно применять фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ), которые всегда стабильны. Выход такого фильтра ξ_i вычисляется как взвешенная сумма входных значений x_i: $\xi_i = \sum_{l=1}^{q} c_j x_{i-j+1}$ Важной особенностью КИХ-фильтра является тот факт, что ковариационная функция процесса АР(2) не испытывает влияния фильтрации за пределами запаздывания q. Это позволяет составить на основе указанных ковариаций систему уравнений Юла–Уокера в виде

$$\gamma_{q+3} = a_1\gamma_{q+2} + a_2\gamma_{q+1}; \quad \gamma_{q+4} = a_1\gamma_{q+3} + a_2\gamma_{q+2}. \quad (7)$$

Ее решение позволяет получить оценки коэффициентов a_1 и a_2.

Как было отмечено во введении, экономическая система в принципе является нестационарной вследствие в том числе эволюционного роста ее эффективности. Это сопровождается увеличением (уменьшением) коэффициента усиления (издержек), а соответственно, значения коэффициента демпфирования h.

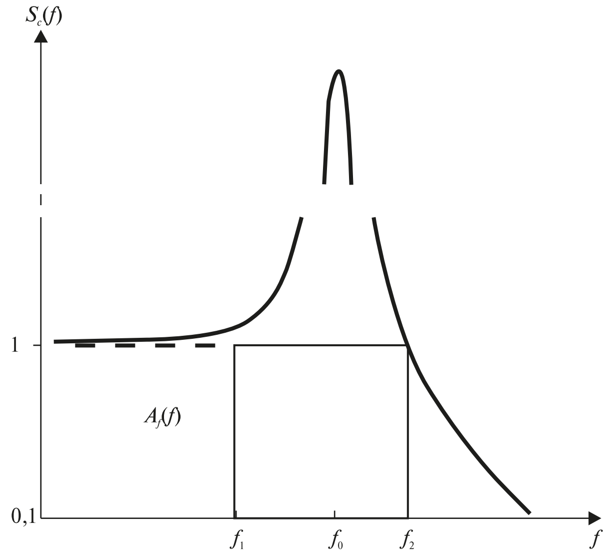

Рис. 7. Амплитудный спектр цикла $S_c(f)$ и АЧХ полосового фильтра $A_f(f)$

Если допустить монотонный характер этого изменения, можно предложить следующую процедуру адаптации нестационарной модели цикла к эмпирическим данным. В дискретной последовательности ξ_i ($i = 1,..., n$) следует выделить два последовательных фрагмента, в которых изменения значений коэффициентов a_1 и a_2 сопоставимы со статистической изменчивостью их оценок. Это позволит представить исходный ряд в виде псевдостационарных фрагментов, применяя, например, методы теории статистических выводов (Zacks, 1981). В этом случае определение размера фрагментов реализации будет осуществляться проверкой гипотезы о свойствах некоторой статистики. Уменьшение коэффициента демпфирования h приводит к увеличению значений корреляции ρ_i процесса АР(2). В качестве статистики для проверки гипотезы об изменении a_1 и a_2 можно взять, например, корреляцию ρ_1. Природу ее оценки определим, подставив $\xi_{i-1} \approx \rho_1 \cdot \xi_i$ в выражение для $\tilde{\rho}_1$:

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{m}{m-1} \times \frac{\sum_{i=2}^{m} \xi_i \xi_{i-1}}{\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2} \approx \frac{m}{m-1} \times \frac{\sum_{i=2}^{m} \sigma_\xi z_i \ (\rho_1 \sigma_\xi z_i)}{\sum_{i=1}^{m} D_\xi z_i^2} = \rho_1 \frac{\chi_{m-1}^2}{\chi_m^2} = \rho_1 F_{m-1,m}.$$

Здесь Z — стандартная нормальная величина, χ_{m-1}^2 и χ_m^2 — величины с χ^2-распределением, $F_{m-1,m}$ — F-статистика. Нулевая гипотеза H_0 была сформулирована как равенство значений ρ_1, вычисляемых по обоим соседним фрагментам реализации ξ_i. Если значение $\rho_{1,1}$ находится по текущему фрагменту временного ряда, а $\rho_{1,2}$ — по предшествующему, то H_0: $\rho_{1,2} = \rho_{1,1}$. Процедура теста заключается в поиске размерности m фрагментов временного ряда, при которой разницу в оценках значений $\tilde{\rho}_{1,1}$ и $\tilde{\rho}_{1,2}$ нельзя отнести к их статистической изменчивости. Поскольку цель статистического теста — проверка эволюционного роста значения корреляции ρ_1, то в качестве критического значения $\tilde{\rho}_{1,\alpha}$ следует принять нижнюю границу *доверительного интервала* ($P = \alpha$) оценки текущего фрагмента $\tilde{\rho}_{1,1}$: $\tilde{\rho}_{1,\alpha} = \tilde{\rho}_{1,1} F_{\alpha,m-1,m}$.

Гипотеза о равенстве корреляций соседних фрагментов не может быть отклонена, если вычисленное по второму фрагменту значение $\tilde{\rho}_{1,2}$ лежит в области выше критического значения, т.е. когда $\tilde{\rho}_{1,2} \geq \tilde{\rho}_{1,\alpha}$. В этом случае различие оценок обусловлено их статистической изменчивостью. При $\tilde{\rho}_{1,2} < \tilde{\rho}_{1,\alpha}$ разницу значений $\tilde{\rho}_{1,1}$ и $\tilde{\rho}_{1,2}$ нельзя отнести к статистической изменчивости из-за малой вероятности $P = \alpha$ такого события. Последовательное увеличение значения $m = (t_1 - t_0) / \Delta t$ приводит к нахождению псевдостационарного фрагмента корреляции ρ_1 (рис. 8). Для установленного значения m составляется система уравнений (7), из которой находятся оценки коэффициентов модели ряда Юла.

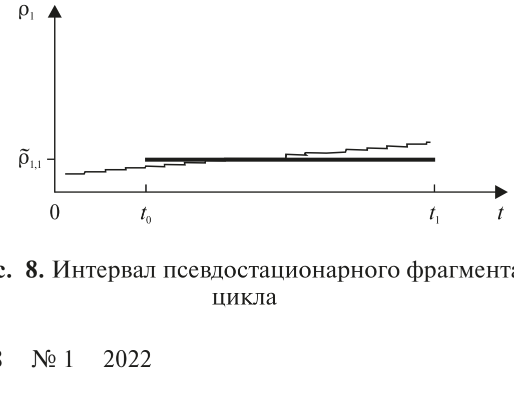

Рис. 8. Интервал псевдостационарного фрагмента цикла

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложена процедура адаптации стохастической модели экономического цикла, имеющая математическое описание от исходных значений ВП до оценок параметров модели. Эта процедура сводит задачу нахождения их значений к линейной задаче оценивания коэффициентов модели процесса АР(2) с учетом следующих особенностей экономических систем и их эмпирических данных: отсутствие прямых оценок функции доходов; многокомпонентность оценок валового продукта; эволюционная нестационарность экономических систем; статистическая изменчивость оценок параметров модели.

Предложенная процедура адаптации применима для эконометрических задач оценивания параметров систем, описываемых обыкновенными дифференциальными и разностными уравнениями второго порядка. Примером, обосновывающим это утверждение, служит клиринговая модель делового цикла (Gandolfo, 2010), однородное уравнение которой имеет вид $\xi_i - b(1+k)\xi_{i-1} + bk\xi_{i-2} = 0$, где b — предельная склонность к потреблению, k — акселератор, отражающий чувствительность инвестиций к изменению дохода. Из условия равенства коэффициентов этого уравнения и АР(2)-модели можно найти связь последних с параметрами клиринговой модели цикла в виде выражений: $k = -a_2/(a_1 + a_2)$; $b = a_1 + a_2$. Наличие оценок $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ позволяет определить значения параметров b и k.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

Кармалита В.А. (2018). Цифровая обработка случайных колебаний. Изд. 2-е. М.: Инновационное машиностроение. 88 с. [**Karmalita V.** (2019). *Digital processing of random oscillations*. Berlin, Boston: De Gruyter. 97 p.]

Кармалита В.А. (2021). Синергетический подход к макроэкономическим исследованиям // Экономика и математические методы. Т. 57. № 4. С. 17–26. [**Karmalita V.A.** (2021). Synergetic approach to macroeconomic studies. *Economics and Mathematical Methods*, 57 (4), 17–26 (in Russian)].

Болотин В.В. (1976). Случайные колебания упругих систем. М.: Наука. 336 с. [**Bolotin V.V.** (1984). *Random vibrations of elastic systems*. Heidelberg: Springer. 486 p.]

Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C., Ljung G.M. (2015). *Time series analysis: Forecasting and control*. 5th ed. Hoboken, New Jersey: Willey. 712 p.

Gandolfo G. (2010). *Economic dynamics*. 4th ed. Berlin: Springer-Verlag. 829 p.

Jenkins G.M., Watts D.G. (1968). *Spectral analysis and its applications*. London: Holden Day. 525 p.

Karmalita V. (2020). *Stochastic dynamics of economic cycles*. Berlin, Boston: De Gruyter. 106 p.

Korotaev A.V., Tsirel S.V. (2010). Spectral analysis of World GDP dynamics: Kondratieff waves, Kuznets swings, Juglar and Kitchin cycles in global economic development, and the 2008–2009 economic crisis. *Structure and Dynamics*, 4 (1), 3–57.

Onwubolu G.C., Babu B.V. (2013). New optimization technics in engineering. Berlin, Heidelberg: Springer. 712 p.

Schlichtharle D. (2011). *Digital filters: Basics and design*. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag. 527 p.

Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. (1997). *Solution of ill-posed problems*. Washington: Winston & Sons. 258 p.

Yamaguchi R., Islam M., Managi S. (2019). Inclusive wealth in the twenty-first century: A summary and further discussions of Inclusive Wealth Report 2018. *Letters in Spatial and Resource Sciences*, 12 (2), 101–111.

Zacks S. (1981). *Parametric statistical inference: Basic theory and modern approaches*. New York: Pergamon Press. 404 p.

Adaptation of stochastic model of economic cycles to empiric data

V.A. Karmalita,
Private consultant, Canada; e-mail: karmalita@videotron.ca

Received 22.08.2021

Abstract. This paper deals with adaptation of the stochastic model of the economic cycle, represented by the values of the gross product. Establishing the statistical equivalence of the Yule series to discrete samples of income oscillations made it possible to determine analytical expressions between the coefficients of the Yule model and the parameters of economic cycle. Thus, the adaptation of the cycle model to empirical data is reduced to the linear problem of estimating the Yule model factors. The peculiarity of solution to this problem ensures the presence of an optimal discretization of the income function in the form of four samples for the cycle period. It is shown that with such discretization, the highest accuracy of calculated parameter estimates is ensured, that is, the efficiency of the estimates is obtained. The proposed procedure for adapting the cycle models considers the features of the economic data and provides: 1) recovery of the income function from values of the gross product estimates; 2) extraction of values of a cycle under interest from the recovered data; 3) determination of the time interval of cycle pseudo-stationarity; 4) parameter estimation of the cycle model; 5) accuracy analysis of parameter estimates. The procedure is formally (mathematically) described from the empirical values of the gross product to getting estimates of cycle parameters. It is applicable for econometric problems of estimating the parameters of systems described by ordinary differential and difference equations of the second order.

Keywords: economic cycles, random oscillations, Yule series, maximum likelihood estimates, pseudo-stationarity.

JEL Classification: C22, C65, C83.

Quoting: **Karmalita V.A.** (2022). Adaptation of stochastic model of economic cycles to empiric data. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 1, 131–139. DOI: 10.31857/S042473880018968-3