

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Доходный подход к задачам оптимизации ремонтной политики

© 2022 г. С.А. Смоляк

С.А. Смоляк,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: smolyak1@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.10.2021

Аннотация. Статья посвящена применению методов стоимостной оценки к задачам теории надежности — назначению сроков службы и сроков превентивного ремонта деградирующим объектам, подвергающимся отказам. В работах по надежности изменения характеристик объекта после ремонта описываются моделями Кидзимы и их модификациями, в которых состояние объекта характеризуется виртуальным/эффективным возрастом. Аналогичный показатель давно уже широко используется и в оценочной деятельности. Между тем, оказывается, что показатели такого типа не позволяют адекватно описать состояния деградирующих ремонтируемых объектов. Предлагается описывать их состояние двумя показателями — возрастом (наработкой) в начале текущего межремонтного цикла и временем работы в этом цикле. В сочетании с идеями Кидзимы это позволяет предложить более адекватную модель изменения характеристик объекта после ремонта. Для назначения сроков службы и сроков превентивного ремонта необходим обоснованный критерий оптимальности. Показано, что обычно принимаемый критерий минимума ожидаемых затрат на обслуживание и ремонт за единицу времени не отвечает интересам предприятий—участников рынка. Предлагается использовать доходный подход к стоимостной оценке, ориентированный на максимизацию стоимости предприятия (в простейшем случае такой подход приводит к критерию ожидаемых удельных дисконтированных затрат). Это дает возможность оценить необходимую для расчетов рыночную стоимость выполняемых объектов работ, причем соответствующий метод оценки может быть отнесен к затратному подходу. Построены и проанализированы соответствующие модели, приведен алгоритм их решения и численный пример, демонстрирующий нерациональность обычно используемых ремонтных политик.

Ключевые слова: срок службы, ремонтная политика, критерий оптимизации, деградация, модели Кидзимы, стоимостная оценка, доходный подход.

Классификация JEL: D21, D25, D46, D81.

Для цитирования: **Смоляк С.А.** (2022). Доходный подход к задачам оптимизации ремонтной политики // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 2. С. 112–124. DOI: 10.31857/S042473880019997-5

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы рассматриваем технические объекты (ТО), использующиеся в непрерывных производственных процессах предприятий—участников рынка и подвергающиеся отказам. Работа, выполняемая ТО, обладает полезностью для участников рынка и потому, согласно стандартам оценки (IVS, 2019), имеет определенную рыночную стоимость (РС). Иногда ее можно подтвердить данными рынка, но в общем случае, рассматриваемом в статье, эта РС требует оценки.

Состояние выпущенных, но еще не использованных ТО назовем *новым*. Все ТО, идентичные в новом состоянии, мы объединяем в одну *марку* (в технической литературе чаще говорят «модель»).

В процессе работы ТО подвергается физическому износу, его состояние ухудшается (в литературе это именуется деградацией). К тому же он может подвергнуться случайному отказу, что приведет к прерыванию производственного процесса и потерям для предприятия.

ТО подразделяются на ремонтируемые (РО) и неремонтируемые (НО). После отказа ТО необходимо утилизировать (вывести из эксплуатации) или заменить *новой копией* — ТО той же марки в новом состоянии, но РО можно еще и отремонтировать. Однако решение об утилизации, замене или (превентивном) ремонте можно принять и в отношении исправного ТО. Период использования РО разбивается ремонтами на межремонтные циклы (МРЦ). Ремонт устраняет некоторые последствия физического износа РО — тогда говорят об *устраняемом* износе. Однако другие

последствия накапливаются и, в конце концов, могут привести к выходу объекта из строя. Такой износ называют *неустранимым* (IVS, 2019; Федотова, 2018).

Назначенным сроком службы НО называется срок, по окончании которого объект, не отказавший ранее, подлежит утилизации. *Назначенной длительностью межремонтного цикла* (МРЦ) называется срок, по окончании которого РО, не отказавший ранее в этом цикле, подлежит утилизации или превентивному ремонту.

Оптимальному назначению срока службы НО и длительностей МРЦ РО и другим задачам оптимизации (политики) технического обслуживания и ремонта (ТОиР) посвящено много публикаций. Мы будем выяснять, как в этих задачах задавать критерий оптимальности и описывать изменение эксплуатационных характеристик ТО в процессе его использования и после ремонта.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СОСТОЯНИЯ РЕМОНТИРУЕМОГО ОБЪЕКТА

Состояние НО, как и в теории надежности, удобно характеризовать возрастом (наработкой с начала эксплуатации). Однако этот измеритель не учитывает улучшения состояния РО после ремонта. В свое время Кидзима¹ в (Kijima, 1989) предложил более приемлемый измеритель — *виртуальный возраст* (ВВ) и две модели его динамики (позднее они многократно обобщались). Основная их идея сводилась к следующему. У нового объекта ВВ = 0. В процессе работы ВВ растет синхронно с хронологическим возрастом, но после ремонта скачком уменьшается. В модели I это уменьшение прямо пропорционально ВВ объекта перед ремонтом, в модели II — длительности предшествующего МРЦ. При коэффициенте пропорциональности $\beta = 1$ после ремонта состояние РО становится новым — такой («совершенный») ремонт эквивалентен замене РО новой копией. При $\beta = 0$ («минимальный» ремонт) состояние РО после ремонта оказывается таким же, как и до ремонта. Оба эти случая мы считаем нереалистичными и далее считаем, что $0 < \beta < 1$.

Между тем, основная идея описания состояния РО одним измерителем была предложена намного раньше. Так, еще в (Welch, 1943) отмечалось, что для стоимостной оценки зданий некоторые оценщики используют показатель *эффективного возраста* (ЭВ), отражающий возраст типично используемого аналогичного здания, находящегося в том же состоянии, что и оцениваемое. Начиная с 1950-х годов концепция ЭВ стала использоваться в США при оценке зданий, машин и оборудования (в том числе — для налогообложения). Вначале ЭВ объектов оценщики оценивали экспертно, затем появились более обоснованные методы и таблицы, с которыми, видимо, ни Кидзима, ни его последователи не были знакомы. С этих позиций модели Кидзимы можно считать применением концепции ЭВ к задачам теории надежности.

Между тем, можно доказать, что неадекватным будет *любой* измеритель состояния (ИС) РО, растущий с ухудшением состояния, непрерывно возрастающий в процессе работы и уменьшающийся после ремонта.

Рассмотрим РО, вводимый в эксплуатацию с ИС = s_0 . Пусть его рациональное использование предусматривает превентивный ремонт при ИС = s , переводящий объект в состояние ХС = $s_1 < s$. Однако при отказе ремонт может потребоваться раньше, и после него (во втором МРЦ) состояние объекта окажется немного лучше: ИС = $s_2 < s_1$. Но в первом МРЦ он уже оказывался в состояниях s_1 и s_2 . Значит, рационально использоваться он должен так же, как и в первом МРЦ: работать, пока не достигнет ИС = s , если не откажет раньше. Но тогда после очередного ремонта (в третьем МРЦ) у него снова будет ИС < s_1 , и т.д. Таким образом, при рациональном использовании ИС объекта никогда не превысит s , а срок его службы будет неограниченным, что невозможно для ТО, подвергающихся *неустранимому* износу. Полученное противоречие показывает, что адекватно описать состояние обычных РО *одним* показателем типа ЭВ нельзя. Однако это можно сделать, используя *два* измерителя — возраст s в начале текущего МРЦ и время работы t в этом цикле² (Смоляк, 2013, 2014, 2019). Тогда зависимости характеристик РО от его состояния придется описывать функциями двух переменных. Оказывается, их можно упростить, используя идею Кидзимы.

¹ Соответствующий звук японского языка записывается в русской транслитерации (система Поливанова) как «дз», в английской (система Хэпберна) как «j». Поэтому в англоязычных текстах фамилия автора пишется «Kijima».

² Кстати, чтобы определить, как изменится состояние объекта после ремонта в модели II Кидзимы, нужно знать не только его виртуальный возраст перед ремонтом, но и виртуальный возраст в начале цикла.

Возьмем какую-нибудь эксплуатационную характеристику объекта (скажем, опасность отказа). Ее значение для объекта в состоянии (s, t) обозначим через $Z(s, t)$ и положим $z(t) = Z(0, t)$. Как и в модели I Кидзимы, примем, что характеристика РО, прошедшего первый ремонт в возрасте s , становится такой же, как и у РО меньшего возраста βs : $Z(s, 0) = Z(0, \beta s) = z(\beta s)$.

Но неустранимый износ первого РО — больше, чем у второго, значит, его характеристика будет далее ухудшаться быстрее. Иными словами, время для него как бы растет быстрее в некоторое число $1 + \delta$ раз. Поскольку через время t второй РО будет иметь характеристику $z(\beta s + t)$, то характеристика первого должна быть хуже — $Z(s, t) = z(\beta s + (1 + \delta)t)$. Логично считать, что «скорость роста времени» δ тем больше, чем больше различаются объекты по степени неустранимого износа и, значит, по возрасту³. Поэтому δ должна расти с увеличением s . Проще всего описать это прямой пропорциональной зависимостью $\delta = \gamma s$, трактуя коэффициент γ как «ускорение деградации», связанное с возрастом РО в начале цикла. Тогда зависимость характеристики РО от его состояния, учитывающая неустранимый износ, примет вид:

$$Z(s, t) = z(\beta s + t + \gamma st). \quad (1)$$

Такая модель, применимая к любым характеристикам РО, представляется более адекватной, чем модели Кидзимы, хотя и требует задавать дополнительный параметр γ .

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В многочисленных работах по теории надежности оптимальный вариант системы ТОиР выбирался по-разному (см., например, (Horenbeek, Pintelon, Muchiri, 2010)). Нередко предполагалось, что после замены ТО его новой копией начинается следующий аналогичный цикл. Здесь в качестве критерия выступали, например, средние за цикл число или стоимость ремонтов, суммарные дисконтированные затраты (Aven, 1983), средние за цикл затраты в единицу времени или их отношение к средней длительности цикла (Jiang, 2018). Правда, как справедливо отмечается в (Horenbeek, Pintelon, Muchiri, 2010), критерии оптимальности, как правило, выбираются без должных обоснований, в отрыве от интересов конкретного бизнеса.

Более того, и часто принимаемое допущение о неограниченной повторяемости циклов, и критерий дисконтированных затрат нельзя считать достаточно обоснованными. Конечно, указанное допущение сильно упрощает постановку задачи и дает возможность опереться на предельные теоремы теории вероятностей. К тому же, здесь вполне логично использовать критерий минимума суммарных (за бесконечный период) дисконтированных затрат. Однако это будет экономически необоснованным. Дело в том, что последовательное приобретение и использование ТО — это инвестиционный проект, а оптимальная политика ТОиР отвечает наилучшему его варианту. Но сравнивать варианты инвестиционного проекта по (суммарным дисконтированным) затратам можно только если они идентичны по достигаемым полезным результатам (Методические рекомендации..., 2000; Виленский, Лившиц, Смоляк, 2015). Между тем, при разных правилах выбора моментов превентивного ремонта будут разными и среднее число ремонтов, и средняя длительность цикла (если учесть время на ремонт и замену объекта), и средняя длительность перерыва производственного процесса в единицу времени. Но тогда будут различаться и средние результаты бизнеса (как за срок службы объекта, так и за единицу времени). Еще большие различия возникнут, если в процессе деградации ТО снижается его производительность (как, например, у строительных машин и некоторых станков).

Кроме того, оптимизируя бесконечную последовательность замен ТО, придется учесть, что в момент очередной замены может измениться экономическая ситуация (включая и систему цен) и появятся ТО новых марок, способные заменить выбывающий объект. Тогда придется выбирать и способ использования, и марку заменяющего объекта. Казалось бы, здесь можно построить модель оптимизации политики ТОиР для бесконечного периода. Но для ее применения потребуется прогноз цен и технического прогресса на неограниченную перспективу, что нереально. Мало этого, в такой модели решение предприятия о ремонте или утилизации объекта должно учитывать ситуации, которые могут возникнуть не только у них, но и у всех последующих его заменителей, тогда как интересы участников рынка — обычно краткосрочные (в лучшем случае — среднесрочные).

³ Альтернативная модель, где ускорение деградации связывалось с порядковым номером МРЦ, исследовалась, например, в (Антонов, Поляков, Чепурко, 2011; Антонов, Пляскин, Татаев, 2013; Bartholomew-Biggs, Zuo, Li, 2009).

С этих позиций представляется правильнее ориентироваться на оптимизацию использования ТО только на протяжении срока его службы. При такой постановке задачи в теории надежности используют критерий средних затрат в единицу времени (с учетом или без учета дисконтирования), что, как отмечалось выше, некорректно. Более обоснованным представляется применение критериев, принятых в теории оценки эффективности инвестиционных проектов и теории стоимостной оценки.

При выборе оптимального варианта инвестиционного проекта обычно используется критерий ожидаемого чистого дисконтированного дохода (ЧДД, NPV) — ожидаемая сумма дисконтированных *чистых доходов* проекта (Виленский, Лившиц, Смоляк, 2015). Чистые доходы от проекта в некотором периоде при этом понимаются как доходы от реализации результатов проекта (производимой продукции) за вычетом затрат по проекту в этом периоде.

В теории стоимостной оценки основным видом стоимости считается *рыночная* (РС, *market value*). Подробное определение этого понятия и комментарии к нему даются в стандартах оценки (IVS, 2019), и мы не будем их здесь приводить. Укажем лишь, что РС объекта оценки (имущества, работы или услуги) на определенную дату (дату оценки) отражает:

— цену этого объекта в сделке, совершаемой на дату оценки между независимыми и ведущими себя экономически рационально участниками рынка при определенных (указанных в стандартах оценки) условиях;

— вклад объекта в РС владеющего им предприятия.

Для определения РС объекта используются три подхода.

При сравнительном (рыночном) подходе РС объекта оценивается по данным о ценах сделок, совершаемых на дату оценки с аналогичными объектами.

При затратном подходе РС объекта оценивается по затратам, необходимым для его создания. Этот подход используется, в основном, для оценки зданий и сооружений, но применимость его ограничена стандартами оценки и вообще представляется спорной, особенно в отношении машин и оборудования (Микерин, Смоляк, 2010; Смоляк, 2018).

Доходный подход основан на принципе ожидания выгод, упомянутом, но подробно не раскрытом, в (IVS, 2019). Мы будем опираться на следующую его формулировку (Смоляк, 2016).

РС объекта на дату оценки равна ожидаемой сумме дисконтированных выгод от его наиболее эффективного использования в прогнозном периоде (который может быть выбран произвольно) и дисконтированной (к дате оценки) РС того же объекта в конце периода.

К этой формулировке необходимо сделать ряд важных комментариев.

1. Термин «*ожидаемый*» в условиях вероятностной неопределенности понимается как математическое ожидание (в (IVS, 2019) — т.е. «взвешенное по вероятностям»).

2. *Выгоды* от использования объекта в некотором периоде определяются как РС результатов использования объекта за вычетом затрат на его использование в этом периоде. Они совпадают с чистыми доходами, если результаты использования объекта реализуются на рынке по РС. Обычно при разработке инвестиционных проектов реализуемая продукция и потребляемые ресурсы оцениваются в рыночных ценах, так что выгоды от проекта совпадают с чистыми доходами. В общем же случае понятие выгод шире, поскольку применимо и к объектам, результаты использования которых не обращаются на рынке (например, выполняющим промежуточные операции в технологическом процессе).

3. Длительность прогнозного периода может быть выбрана произвольно, поскольку РС объекта от этой длительности не зависит.

4. Наиболее эффективным считается способ использования, максимизирующий указанную в определении ожидаемую сумму.

5. Добавление к общей сумме выгод РС объекта в конце периода можно трактовать и как выгоды от (виртуальной) продажи объекта по РС в этот момент. При такой трактовке наиболее эффективное использование объекта может допускать и его продажу по РС в какой-то момент времени. На этом основании далее, говоря о *суммарных* выгодах от использования объекта в некотором периоде, мы будем включать в их состав и РС объекта в конце периода.

6. Наиболее эффективное использование объекта, находящегося в «плохом» состоянии, может предусматривать его утилизацию. Его рыночная стоимость в этот момент называется *утилизационной* (*salvage value*) и обычно определяется как РС годных к использованию отдельных элементов объекта (например, металлолома) за вычетом расходов на демонтаж и доставку элементов объекта к месту утилизации. Одновременно она отражает и выгоды от утилизации объекта (производимой наиболее эффективно).

7. Согласно стандартам оценки (IVS, 2019) для дисконтирования выгод должна использоваться после- или доналоговая ставка в зависимости от того, включен ли при их исчислении налог на прибыль в состав затрат или нет. Нам удобнее принять второй вариант и дисконтировать выгоды по номинальной доналоговой ставке r .

Мы видим, что при стоимостной оценке объектов (как и при оценке эффективности проектов) используется критерий ожидаемых суммарных дисконтированных выгод (ОСДВ). При этом максимальное значение ОСДВ от использования объекта совпадает с его РС. Но тогда оценка РС объекта предусматривает и выбор наиболее эффективного способа его использования, что позволяет предприятию получить максимальные ОСДВ и максимально увеличить свою стоимость. Именно на такой критерий оптимальности (максимизацию стоимости предприятия) мы ориентируемся.

Имеется много задач, связанных с формированием политики ТОиР. Для объектов, включающих взаимосвязанные ненадежные элементы, подвергающихся отказам разного типа и проходящих разного вида ремонты, в таких задачах возникает много специфических ограничений. Из-за этого предложить какую-то единую их постановку невозможно. По этой причине ниже мы рассмотрим две подобные задачи в более корректной, на наш взгляд, постановке, предполагая, что инфляция отсутствует, а налог на прибыль в составе затрат не учитывается.

ОПТИМИЗАЦИЯ НАЗНАЧЕННОГО СРОКА СЛУЖБЫ НЕРЕМОНТИРУЕМОГО ОБЪЕКТА

Мы рассматриваем НО определенной марки, приобретаемый предприятием—типичным участником рынка по РС K и используемый для осуществления непрерывного производственного процесса. Состояние исправного НО характеризуется его возрастом t . От него зависит интенсивность $C(t)$ операционных затрат (сумму этих затрат в малую единицу времени) и опасность отказа $\lambda(t)$, под которой мы понимаем $\lim_{h \rightarrow 0} P(t, h)/h$, где $P(t, h)$ — вероятность того, что исправный НО, находящийся в состоянии t , откажет в ближайшем периоде h . Функции $\lambda(t)$ и $C(t)$ мы считаем неубывающими, однако хотя бы одна из них должна неограниченно возрастать при $t \rightarrow \infty$.

При отказе НО становится неисправным и утилизируется, а у предприятия возникают дополнительные затраты L . В их состав мы включаем потери (ущерб), связанные с прерыванием производственного процесса⁴ за вычетом выгод от утилизации объекта (выгоды от утилизации неисправного объекта обычно меньше, чем от утилизации исправного, и могут даже быть отрицательными).

Поскольку с течением времени опасность отказа растет, политика ТОиР сводится к назначению срока службы T , по достижении которого исправный НО подлежит утилизации, приносящей выгоды в размере утилизационной стоимости U . Мы ставим задачу выбора оптимальной такой политики, т.е. оптимального T . Критерием оптимальности при этом будут ОСДВ от приобретения и использования НО за весь срок его службы.

Обозначим $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) dx$. Тогда вероятность безотказной работы объекта в течение времени t составит $e^{-\Lambda(t)}$, а вероятность его отказа в интервале $(t, t + dt)$ — $e^{-\Lambda(t)} \lambda(t) dt$.

Обозначим также через B (неизвестную) РС выполняемой объектом в единицу времени работы⁵.

⁴ При оценке указанного ущерба в некоторых случаях можно использовать РД 03-496-02 «Методические рекомендации по оценке ущерба от аварий на опасных производственных объектах» (утв. постановлением Госгортехнадзора России от 29.10.02 № 63).

⁵ Независимость B от состояния объекта предполагает, что его производительность в процессе работы не меняется.

Основные соотношения модели

Допустим, что НО назначен срок службы T . Будем отсчитывать время от момента ввода объекта в эксплуатацию. Поскольку исправный НО в состоянии T (в момент T) должен быть утилизирован, то выгоды, получаемые предприятием от его использования, равны утилизационной стоимости U . Однако оказаться в состоянии T объект может только если он в течение времени T работал безотказно, а вероятность такого события равна $e^{-\Lambda(T)}$. Определим теперь выгоды от использования НО в малом периоде времени $(t, t + dt)$ при $t < T$. При этом учтем, что если НО дожил до момента t , то до этого момента он работал безотказно. Здесь возможны две ситуации.

1. НО проработал безотказно до момента времени t , но отказал в малом периоде $(t, t + dt)$, нанеся предприятию ущерб L . Вероятность этой ситуации $e^{-\Lambda(t)} \lambda(t) dt$.
2. НО проработал безотказно до момента времени t и не отказал в периоде $(t, t + dt)$. Вероятность этой ситуации $e^{-\Lambda(t)} [1 - \lambda(t) dt]$. Здесь выгоды предприятия будут равны стоимости выполненным объектом работ за вычетом операционных затрат $Bdt - C(t)dt$.

Умножая указанные выгоды на вероятности их получения, дисконтируя к дате оценки и суммируя, получим следующую формулу для ОСДВ $V(T)$ от принятого способа использования объекта за весь срок его службы:

$$V(T) = \int_0^T e^{-rt} [B - C(t)] e^{-\Lambda(t)} dt - \int_0^T e^{-rt} L e^{-\Lambda(t)} \lambda(t) dt + e^{-rT} U e^{-\Lambda(T)}. \tag{2}$$

Решение. Наиболее эффективный способ использования НО должен обеспечивать максимальное значение ОСДВ. Легко видеть, что $V'(T) = \{B - C(t) - [L + U] (t) - rU\} e^{-r-\Lambda(t)}$. При этом выражение в фигурной скобке с ростом T неограниченно убывает, а, значит, при больших T становится отрицательным. Если оно отрицательно при малых $T > 0$, то оптимальным решением будет $T = 0$. Но в этом случае использовать объект по назначению становится неэффективным, хотя типичные участники рынка его используют. Поэтому такой случай невозможен. Но тогда $V'(0) > 0$, а в этом случае существует единственное конечное положительное T , при котором $V'(T) = 0$. Оно же и будет оптимальным. Другое дело, что для определения T необходимо узнать пока неизвестную величину B .

Чтобы ее найти, воспользуемся принципом ожидания выгод. Из него следует, что заданные формулой (2) ОСДВ не превосходят РС объекта на дату оценки (K) и совпадают с K при наиболее эффективном использовании объекта, т.е. при оптимальном T . Отсюда и из (1) вытекает, что

$$B \leq \left(K + \int_0^T e^{-r-\Lambda(t)} [C(t) + L\lambda(t)] dt - U e^{-rT-\Lambda(T)} \right) / \int_0^T e^{-r-\Lambda(t)} dt, \tag{3}$$

причем равенство здесь достигается при оптимальном T , которое, как мы видели, единственное.

Выражение, стоящее в правой части (3), можно трактовать как *ожидаемые удельные дисконтированные затраты* от использования НО — отношение ожидаемых суммарных дисконтированных затрат к ожидаемому дисконтированному объему производства работ. Правда, в отличие от обычно используемого в работах по надежности показателя затрат за единицу времени, здесь затраты и результаты дисконтируются, а учитываемые затраты и потери уменьшаются на утилизационную стоимость выбывающего объекта.

Поскольку равенство в формуле (2) имеет место при оптимальном T , из нее вытекает, что наиболее эффективный способ использования объекта обеспечивает минимальное значение ОУДЗ, что может рассматриваться как некоторое оправдание применяемому в теории надежности критерию. В связи с этим укажем, что применение критерия удельных дисконтированных затрат для оптимизации сроков службы в детерминированной ситуации было обосновано еще в 1970-е годы (Лившиц, Смоляк, 1971, 1972; Смоляк, 1988), и такой критерий практически применялся при установлении норм амортизации некоторых строительных машин.

Отметим, что формула (2) позволяет оценить РС выполняемых объектом работ, даже если они не обращаются на рынке, и эта РС совпадает с определенным образом подсчитанными ожидаемыми затратами на наиболее эффективное выполнение работ, что отвечает затратному подходу к оценке.

К сожалению, в более сложных задачах оптимизации столь простого критерия уже не получается. Мы покажем это в следующем разделе.

ОПТИМИЗАЦИЯ СРОКОВ ПРЕВЕНТИВНЫХ РЕМОНТОВ

Рассмотрим теперь ремонтируемый объект (РО), выполняющий некоторую работу в рамках производственного процесса предприятия. При случайном отказе РО у предприятия возникают потери L из-за прерывания производственного процесса, а РО придется утилизировать или подвергнуть аварийному ремонту. Все ремонты объекта имеют одну и ту же стоимость R . Утилизационную стоимость объекта будем считать нулевой. Состояние объекта характеризуется парой (s, t) , где s — возраст объекта в начале межремонтного цикла (МРЦ), t — время его работы в этом цикле. Время на утилизацию и на проведение ремонта считается пренебрежимо малым, так что объект в состоянии (s, t) , подлежащий ремонту, после ремонта переходит в состояние $(s + t, 0)$.

Опасность отказа и интенсивность операционных затрат РО в состоянии (s, t) обозначим соответственно через $\lambda(s, t)$ и $C(s, t)$. Как и раньше, будем считать, что эти функции — неубывающие по своим аргументам, но хотя бы одна из них неограниченно растет при $s \rightarrow \infty$ и при $t \rightarrow \infty$. Введем также обозначение $\Lambda(s, t) = \int_0^t \lambda(s, x) dx$.

МРЦ, в начале которого РО имеет возраст s , обозначим M_s , а его назначенную длительность — T_s . Это значит, что РО, доживший до состояния (s, T_s) , подлежит превентивному ремонту или утилизации. РС объекта в состоянии (s, t) обозначим $V(s, t)$ и положим $f(s) = V(s, 0)$. Получим для $f(s)$ оценку сверху.

Заметим, что РО в начале цикла M_s приносит выгоды с интенсивностью $B - C(s, 0)$, имеет опасность отказа $\lambda(s, 0)$, но затем эти характеристики ухудшаются до конца цикла, после чего объект переходит в следующий МРЦ. Отсюда видно, что его стоимость не больше, чем у виртуального объекта, всегда приносящего выгоды с интенсивностью $B - C(s, 0)$, отказы которого происходят с постоянной интенсивностью $\lambda(s, 0)$ и не приводят к потерям. Но такой объект за малое время dt отказывает с вероятностью $\lambda(s, 0) dt$, а значит, требует ожидаемых затрат на ремонт $\lambda(s, 0) R dt$ и приносит ожидаемые выгоды $[B - C(s, 0) - \lambda(s, 0)R] dt$. Поэтому ОСДВ от его использования за бесконечный срок службы равны $[B - C(s, 0) - \lambda(s, 0)R]/r$. Если эта величина положительна, то она совпадает с РС виртуального объекта $W(s)$, иначе использовать виртуальный объект неэффективно, и его стоимость $W(s)$ равна нулю. Но тогда $W(s) = \max\{[B - C(s, 0) - \lambda(s, 0)R]/r; 0\}$, а $f(s) \leq W(s) = \max\{[B - C(s, 0) - \lambda(s, 0)R]/r; 0\}$. Поскольку хотя бы одна из функций $C(s, 0)$ и $\lambda(s, 0)$ неограниченно возрастает при $s \rightarrow \infty$, отсюда следует, что для достаточно больших s будет $f(s) = 0$.

Пусть $g(x)$ — РС объекта возраста x , находящегося в конце цикла (перед утилизацией или ремонтом). Она отвечает суммарным выгодам от лучшего варианта дальнейшего использования этого РО. Но утилизация РО дает нулевые выгоды, а ремонт требует затрат R и переводит объект в начало следующего цикла — в состояние $(x, 0)$, где он будет иметь стоимость $f(x)$. Следовательно,

$$g(x) = \max[f(x) - R; 0]. \quad (4)$$

Циклы M_s , в которых $f(s) > 0 = g(s + T_s)$, назовем *завершающими* — в них эффективно использовать РО по назначению, но в конце цикла — утилизировать.

Величину $B - C$ работ, выполняемых исправным объектом за малую единицу времени, временно будем считать известной. В таком случае выгоды, приносимые РО в состоянии (s, t) , за малое время безотказной работы dt составят $B dt - C(s, t) dt$.

Политика ГОиР здесь состоит в том, чтобы назначить для каждого цикла M_s длительность T_s и указать, какие из них — завершающие.

Оптимизационная модель. Допустим, что для цикла M_s назначена длительность T . Возьмем РО в начале этого цикла и найдем ожидаемые суммарные дисконтированные (к началу цикла) выгоды $Q(s, T)$, приносимые им за цикл, отдельно учитывая выгоды от его использования по назначению, потери от отказа и стоимость РО в конце цикла.

Заметим вначале, что длительность цикла M_s с вероятностью $e^{-\Lambda(s, T)}$ равна T , а с вероятностью $\lambda(s, x) e^{-\Lambda(s, x)} dx$ — лежит в интервале $(x, x + dx)$ при $x < T$.

При длительности цикла T объект в конце цикла имеет возраст $s + T$ и РС $g(s + T)$. Потерь от отказа при этом нет. Длительность цикла $x < T$ возможна только если РО отказал в состоянии (s, x) , когда его возраст составлял $s + x$. Но тогда суммарные выгоды при этом будут включать РС объекта в конце цикла за вычетом потерь от отказа, т.е. $g(s + x) - L$.

Выгоды от использования по назначению РО в состоянии (s, x) за малый период dx составляют $[B - C(s, x)] dx$. Однако РО принесет их только если за время x его работы в цикле не произойдет отказа, т.е. с вероятностью $e^{-\Lambda(s, x)}$.

Теперь, учитывая величину возможных выгод и их вероятности, можно найти искомые ОСДВ:

$$Q(s, T) = e^{-rT} e^{-\Lambda(s, T)} g(s + T) + \int_0^T e^{-rx} [g(s + x) - L] (s, x) e^{-\Lambda(s, x)} dx + \int_0^T e^{-rx} e^{-\Lambda(s, x)} [B - C(s, x)] dx = e^{-N(s, T)} g(s + T) + \int_0^T e^{-N(s, x)} H(s, x) dx, \quad (5)$$

где

$$N(s, x) = rx + \Lambda(s, x); \quad H(s, x) = B - C(s, x) + \lambda(s, x)[g(s + x) - L]. \quad (6)$$

Заметим теперь, что стоимость $f(s)$ РО в начале цикла M_s равна максимальному значению $Q(s, T)$, откуда и в силу (5) имеем:

$$f(s) = \max_T Q(s, T) = \max_T \left\{ e^{-N(s, T)} g(s + T) + \int_0^T e^{-N(s, x)} H(s, x) dx \right\}. \quad (7)$$

При этом оптимальное T_s будет тем значением T , при котором $Q(s, T)$ максимально. Но, быть может, таких T несколько либо $T = \infty$. Рассмотрим оба этих варианта.

1. Допустим, что максимум $Q(s, T)$ достигается и при $T = T'$, и при $T = T'' > T'$. Но работающий в цикле M_s объект, прежде чем попасть в состояние (s, T'') , должен вначале оказаться в состоянии (s, T') , где будет принято решение о его ремонте или утилизации. Поэтому при рациональном использовании РО просто не доживет до состояния (s, T'') . Это значит, что в качестве T_s необходимо принять наименьшее из всех возможных значений T , обеспечивающих максимум $Q(T)$.

2. Случай $T = \infty$ невозможен, поскольку $Q(s, T)$ при больших T убывает. Действительно, как показано выше, при достаточно больших s будет $f(s) = 0$. Отсюда и из (4) следует, что при фиксированном s и достаточно большом T будет $g(s + T) = 0$, а тогда в силу (5) и (6) $Q(s, T) = \int_0^T e^{-N(s, x)} H(s, x) dx$ и $Q'_T(s, T) = e^{-N(s, T)} [B - C(s, T) - \lambda(s, T)L]$. Поскольку хотя бы одна из функций $C(s, t)$ и $\lambda(s, t)$ при $t \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, при достаточно большом T будет $Q'_T(s, T) < 0$, а $Q(s, T)$ будет убывать, что и требовалось доказать.

Для дальнейшего важно отметить, что функция $Q(s, T)$ — непрерывная, но не монотонная по T и потому может иметь несколько локальных максимумов в точках $T^1(s), T^2(s), \dots$. Разумеется, в качестве T_s должно быть принято такое $T^k(s)$, для которого значение $Q(s, T^k(s))$ наибольшее. Пусть, например, при некотором s будет $Q(s, T^1(s)) > Q(s, T^2(s)) > Q(s, T^3(s)) > \dots$, так что $T_s = T^1(s)$. Однако при изменении s указанный порядок может измениться, а некоторые из локальных максимумов могут просто исчезнуть. В результате зависимость T_s от s может оказаться разрывной, и в точках разрыва максимальное значение $Q(s, T)$ будет достигаться сразу в двух точках. Аналогичные ситуации могут возникнуть и при фиксированном s , если начать изменять исходные данные, например величину потерь L или зависимости $\lambda(s, t)$ и $C(s, t)$.

Решение модели. Для нахождения неизвестной функции $f(s)$ подставим в формулу (7) обозначение (4) и представим ее в виде

$$f(s) = \mathbf{G}(f(s)), \quad (8)$$

где \mathbf{G} — оператор, переводящий функцию одного переменного $\varphi(s)$ в другую функцию $\Phi(s)$ следующим образом:

$$\Phi(s) = \mathbf{G}(\varphi(s)) \triangleq \max_{T \geq 0} \left\{ \max [\varphi(s + T) - R; 0] e^{-N(s, T)} + \int_0^T e^{-N(s, x)} [B - C(s, x) + \lambda(s, x) \max [\varphi(s + x) - R; 0] - \lambda(s, x) L] dx \right\}. \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что если функция $\varphi(s)$ непрерывная, неотрицательная и ограниченная при $s \geq 0$, то и функция $\Phi = \mathbf{G}(\varphi)$ будет такой же. Легко видеть также, что оператор \mathbf{G} монотонный: если $\varphi_1(s) \geq \varphi_2(s)$, то и $\Phi_1(s) \geq \Phi_2(s)$. Это позволяет решать уравнение (8) методом итераций. Например, за первое приближение можно взять полученную выше верхнюю оценку для $f(s)$: $f_1(s) = W(s)$, а последующие — находить по формуле $f_{n+1} = \mathbf{G}(f_n)$. Тогда последовательность $\{f_n(s)\}$ будет монотонной и ограниченной, а значит, будет иметь предел («неподвижную точку» оператора \mathbf{G}) — искомую функцию $f(s)$, равную нулю для достаточно больших s . Одновременно для каждого цикла M_s определится и его

назначенная длительность T_s — наименьшее T , при котором достигается максимум в (5). Разумеется, длительности T_s разных МРЦ будут разными, что выявилось еще в детерминированной ситуации, например в (Смоляк, 2013, 2014). Далее можно определить все завершающие циклы, а также максимальный срок службы РО T_{max} — он отвечает наименьшему s , при котором $f(s) = 0$. Зная $f(s)$, можно рассчитать и РС объектов, находящихся в любых состояниях. Соответствующие формулы выводятся аналогично формулам (5) и (7), но нам они не потребуются.

Определение неизвестной стоимости работ B . В изложенной процедуре РС работ, выполняемых исправным объектом за малую единицу времени, B считалась известной, хотя обычно владельцам машин и оборудования она неизвестна, да и оценщики почти никогда не оценивают стоимость работ (кроме, пожалуй, строительного-монтажных и ремонтных работ).

Для решения этой проблемы заметим, что указанную процедуру можно проводить при разных значениях B , причем все стоимости $f(s)$ будут неубывающими функциями от B . Это относится и к РС нового РО $f(0)$. Но эта стоимость нам известна и равна K . Поэтому искомая величина B должна быть корнем уравнения $f(0) = K$. Такой метод оценки стоимости работ точно отвечает затратному подходу к оценке, хотя именно в данном виде он до сих пор оценщиками не использовался.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ

По описанной выше модели были проведены экспериментальные расчеты. В них принималось:

- РС нового объекта $K = 100$;
- стоимость ремонта $R = 25$;
- интенсивность операционных затрат нового объекта $C_0 = C(0, 0) = 40$.

В первом межремонтном цикле интенсивность операционных затрат $C(0, t)$ растет линейно с возрастом со скоростью $i = 0,03$, а отказы имеют распределение Рэлея с параметром ω (среднее время работы до отказа при этом равно $\omega\sqrt{\pi/2}$). В других циклах M_s интенсивность операционных затрат и опасность отказа определялись по модели (1):

$$C(s, t) = C_0 [1 + i(\beta s + t + \gamma st)]; \lambda(s, t) = (\beta s + t + \gamma st) / \omega^2, \text{ где } \beta = 0,4, \gamma = 0,2.$$

Потери от отказа L и параметр распределения отказов ω варьировались. РС работ, выполняемых объектом в малую единицу времени, B , подбирались так, чтобы выполнялось условие $f(0) = K$.

Мы изучали влияние параметров L и ω на назначенные сроки превентивных ремонтов и максимальный срок службы объекта T_{max} . Приведем лишь часть полученных результатов (в полном объеме они заняли бы слишком много места).

Величина L варьировала от 100 до 1000 (от однократной до десятикратной стоимости объекта). Ее влияние при $\omega = 4$ и 8 лет показано на рис. 1–3. На рис. 1 представлена зависимость от L

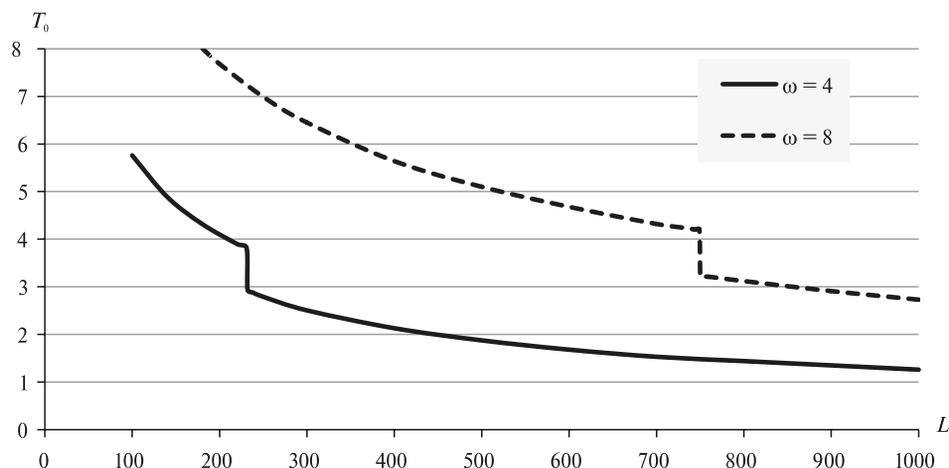


Рис. 1. Зависимости назначенного срока первого ремонта (T_0 , годы) от L при $\omega = 4$ и 8 лет

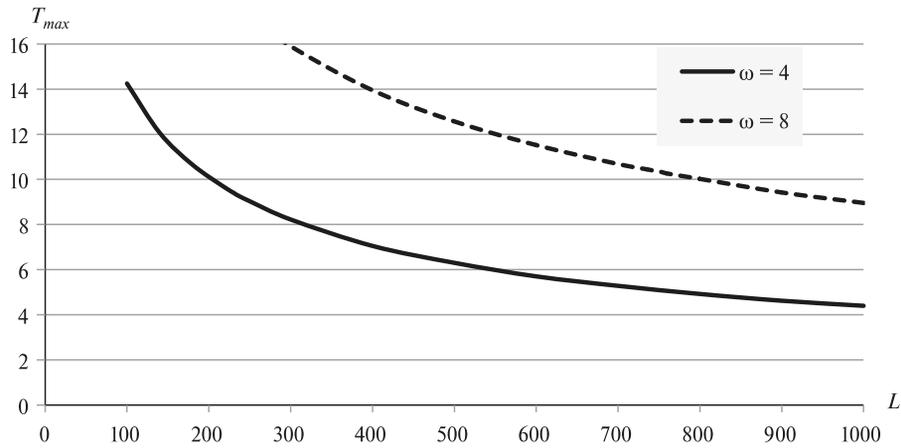


Рис. 2. Зависимости максимального срока службы объекта (T_{max} , годы) от L при $\omega = 4$ и 8 лет

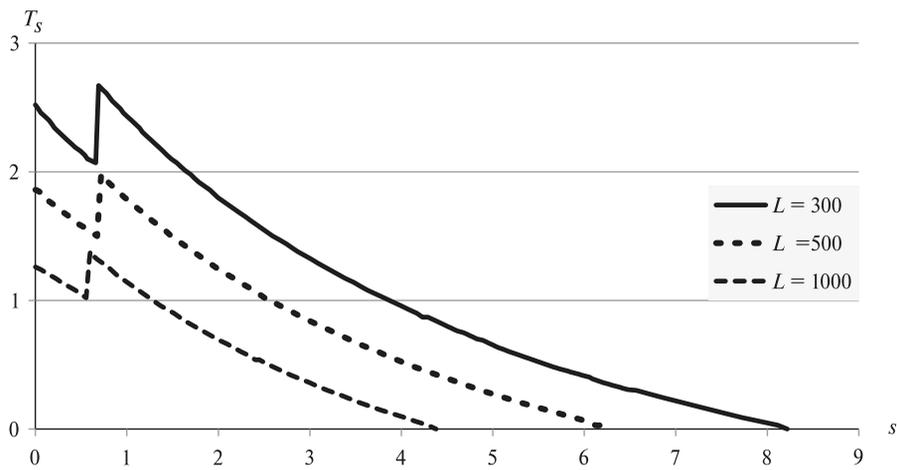


Рис. 3. Зависимости назначенного срока превентивного ремонта (T_s , годы) от возраста объекта в начале цикла (s , годы) при $\omega = 4$ года и разных L

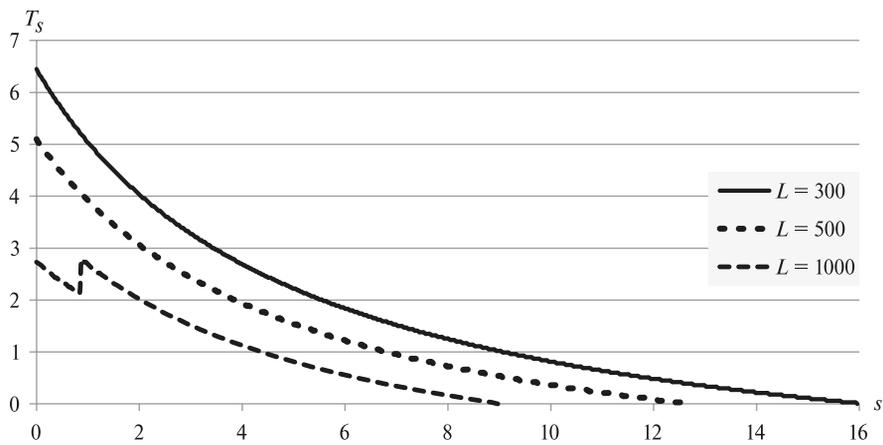


Рис. 4. Зависимости назначенного срока превентивного ремонта (T_s , годы) от возраста объекта в начале цикла (s , годы) при $\omega = 8$ лет и разных L

назначенного срока первого ремонта (T_0 , годы). Скачки на графике отвечают описанным в предыдущем разделе ситуациям, когда максимальное значение $Q(s, T)$ достигается сразу в двух точках. Зависимость максимального срока службы объекта (T_{\max} , годы) от L представлена на рис. 2. Рис. 3–4 демонстрируют зависимости длительности циклов (T_s , годы) от возраста объекта в начале цикла (s , годы) при разных сочетаниях L и ω . Из них видно, что оптимальная политика ТООИР существенно отличается от распространенной, при которой сроки превентивного ремонта назначаются одинаковыми или зависящими от порядкового номера ремонта, независимо от размера ущерба, вызываемого отказом. Отметим, что объектам «достаточно большого» возраста необходимо назначать совсем короткие сроки очередного ремонта, что технически неудобно и дает небольшой экономический эффект. Поэтому таким объектам целесообразно вообще не назначать срока очередного превентивного ремонта, утилизируя их только при очередном отказе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Затратные критерии, применяемые в теории надежности для оптимизации политики ремонта объектов, не в полной мере отвечают коммерческим интересам предприятий. Экономически обоснованное решение подобных задач обеспечивают методы и критерии, используемые в теории стоимостной оценки. Они позволяют оценить стоимость работ (услуг), выполняемых объектами, а в частном случае — приводят к критерию минимума ожидаемых удельных дисконтированных затрат, изредка встречающемуся в литературе по надежности (в общем случае столь простого результата не получается).

Изменение технико-экономических характеристик объекта после ремонта в литературе по надежности описывают моделями виртуального (эффективного) возраста Кидзимы. Аналогичный показатель за полвека до Кидзимы был предложен для стоимостной оценки активов и практически используется оценщиками и сейчас. Однако мы показываем неадекватность описания состояния ремонтируемых объектов каким-то одним подобным показателем. Более адекватным представляется характеризовать их состояние двумя показателями — временем работы (наработкой) в начале межремонтного цикла и в течение этого цикла.

Изложенные положения позволяют построить модели оптимизации ремонтной политики, отвечающей экономическим интересам участников рынка. Показано, что в каждом межремонтном цикле срок очередного превентивного ремонта должен назначаться в зависимости от ущерба, вызываемого отказом, и возраста объекта в начале цикла, а не от порядкового номера ремонта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Антонов А.В., Пляскин А.В., Татаев Х.Н.** (2013). К вопросу расчета надежности резервированных структур с учетом старения элементов // *Надежность*. № 1. С. 55–67. DOI: 10.21683/1729-2646-2013-0-1-55-67. [Antonov A.V., Plyaskin A.V., Tataev Kh.N. (2013). On the issue of reliability calculation for redundant structures in view of ageing elements. *Dependability*, 1, 55–67 (in Russian)]. DOI: 10.21683/1729-2646-2013-0-1-55-67 (in Russian).]
- Антонов А.В., Поляков А.А., Чепурко В.А.** (2011). Модель анализа надежности объектов с неполным восстановлением // *Надежность*. № 3 (38). С. 33–41. [Antonov A.V., Polyakov A.A., Chepurko V.A. (2011). A model for analyzing the reliability of objects with incomplete restoration. *Dependability*, 3 (38), 33–41 (in Russian)].
- Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А.** (2015). Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика. Учебное пособие. Изд. 5-тое. М.: ПолиПринтСервис. 1300 с. [Vilensky P.L., Livshits V.N., Smolyak S.A. (2015). *Evaluation of the efficiency of investment projects: Theory and practice*. Textbook. 5th ed. Moscow: PolyPrintService. 1300 p. (in Russian).]
- Лившиц В.Н., Смоляк С.А.** (1971). Сроки службы основных фондов в оптимальном плане. В кн.: Первая конференция по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством. Тезисы докладов. Секция 1. Вып. 1. М.: ЦЭМИ РАН. С. 352–357. [Livshits V.N., Smolyak S.A. (1971). Service life of fixed assets in the optimal plan. In: *The first conference on optimal planning and management of the national economy*. Abstracts of reports. Section 1. Issue 1. Moscow: CEMI RAS. 352–357 (in Russian).]
- Лившиц В.Н., Смоляк С.А.** (1972). Экономико-математические модели локальной оптимизации. В кн.: Труды четвертой школы по математическому программированию и смежным вопросам. Вып. IV. М.: ЦЭМИ РАН. С. 179–213. [Livshits V.N., Smolyak S.A. (1972). Economic and mathematical models of local optimization. In: *Proceedings of the Fourth school on mathematical programming and related issues*. Issue IV. Moscow, CEMI RAS, 179–213 (in Russian).]

- Методические рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов (2 редакция) (2000). М.: Экономика. 421 с. [*Methodological recommendations for evaluating the efficiency of investment projects*. Second edition (2000). Moscow: Ekonomika 421 p. (in Russian).]
- Микерин Г.И., Смоляк С.А.** (2010). Оценка эффективности инвестиционных проектов и стоимостная оценка имущества: возможности конвергенции. М.: ЦЭМИ РАН. 120 с. [**Mikerin G.I., Smolyak S.A.** (2010). *Efficiency assessment of investment projects and property valuation: Opportunities for convergence*. Moscow: CEMI RAS. 120 p. (in Russian).]
- Смоляк С.А.** (1988). Оптимизация управления развитием многономенклатурных производств. Дис... докт. экон. наук: 08.00.13. М.: ЦЭМИ РАН. [**Smolyak S.A.** (1988). *Optimization of management of the development of diversified industries*. Dr. Econ. Sci. Diss. 08.00.13. Moscow: CEMI RAS (in Russian).]
- Смоляк С.А.** (2013). Оценка рыночной стоимости машин с учетом устранимого и неустраимого износа // *Экономика и математические методы*. Т. 49. Вып. 1. С. 54–72. [**Smolyak S.A.** (2013). Valuation of machines and equipment in view of curable and incurable depreciation. *Economics and Mathematical Methods*, 49, 1, 54–72 (in Russian).]
- Смоляк С.А.** (2014). Оптимизация ремонтной политики и оценка стоимости машин с учетом их надежности // *Журнал Новой экономической ассоциации*. Т. 2 (22). С. 102–131. [**Smolyak S.A.** (2014). Overhaul policy optimization and equipment appraisal concerning its reliability. *Journal of the New Economic Association*, 2 (22), 102–131 (in Russian).]
- Смоляк С.А.** (2016). Стоимостная оценка машин и оборудования (секреты метода ДДП). М.: Опцион. [**Smolyak S.A.** (2016). *Valuation of machinery and equipment (secrets of the DCF method)*. Moscow: Option (in Russian).]
- Смоляк С.А.** (2018). О затратном подходе к оценке машин и оборудования // *Вестник ЦЭМИ РАН*. Вып. 1. DOI: 10.18254/S0000090-2-1 [**Smolyak S.A.** (2018). On the cost approach to the machinery and equipment valuation. *Bulletin of CEMI*. Issue 1. DOI: 10.18254/S0000090-2-1 (in Russian).]
- Смоляк С.А.** (2019). Оптимизация количества и периодичности ремонтов // *Экономическая наука современной России*. № 2. С. 84–103. [**Smolyak S.A.** (2019). Optimization of the number and frequency of repairs. *Economics of Contemporary Russia*, 2, 84–103. DOI: 10.33293/1609-1442-2019-2(85)-84-103 (in Russian).]
- Федотова М.А.** (ред.). (2018). Оценка машин и оборудования. Учебник. Изд. 2-е. М.: ИНФРА-М. 324 с. [**Fedotova M.A.** (Ed.). (2018). *Machinery and Equipment Valuation*. Textbook. 2nd ed. Moscow: INFRA-M. 324 p. (in Russian).]
- Aven T.** (1983). Optimal replacement under a minimal repair strategy. *Advances in Applied Probability*, 15, 1, 198–211. DOI: 10.2307/1426990
- Bartholomew-Biggs M., Zuo M.J., Li X.** (2009). Modelling and optimizing sequential imperfect preventive maintenance. *Reliability Engineering & System Safety*, 94, 53–62. DOI: 10.1016/j.res.2008.03.002
- Horenbeek A. van, Pintelon L., Muchiri P.** (2010). Maintenance optimization models and criteria. *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, 1 (3), 189–200. DOI: 10.1007/s13198-011-0045-x
- IVS (2019). *Effective 31 January 2020*. London: International Valuation Standards Council.
- Jiang R.** (2018). Performance evaluation of seven optimization models of age replacement policy. *Reliability Engineering & System Safety*, 180 (C), 302–311. DOI: 10.1016/j.res.2018.07.030
- Kijima M.** (1989). Some results for repairable systems with general repair. *Journal of Applied Probability*, 26, 89–102.
- Welch R.B.** (1943). *Depreciation of buildings for assessing purposes*. Chicago: International association of assessing officers.

The income approach to the problems of optimizing the repair policy

© 2022 S.A. Smolyak

S.A. Smolyak,

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;
e-mail: smolyak1@yandex.ru*

Received 01.10.2021

Abstract. The article is devoted to the application of approaches and methods used in the valuation of assets to the problems of reliability theory — the assignment of service life and the timing of preventive repairs to degrading item that is subject to failures. In the works on reliability, changes in the characteristics of the item after repair are described by Kijima models and their modifications, in which the state of item is characterized by a virtual / effective age. A similar indicator has been widely used in appraisal activity since the middle of the last century. Meanwhile, it turns out that indicators of this type do not allow us to adequately describe the state of degraded repairable items. It is proposed to describe their condition by two indicators — the age (operating time) at the beginning of the current inter-repair cycle and the same in this cycle. In combination with Kijima's ideas, this allows us to offer a more adequate model of changing the item's characteristics after repair. To assign service life and terms of preventive maintenance of items, a well-grounded criterion of optimality is required. It is shown that the usually accepted criterion of the minimum expected maintenance and repair costs per unit of time do not meet the interests of enterprises participating in the market. We propose to use the so-called income approach to valuation, focused on maximizing the market value of the enterprise (in the simplest case, this approach leads to the criterion of the expected discounted costs per unit of work performed by the item). This makes it possible to assess the market value of the work performed by the item necessary for calculations, and the corresponding assessment method can be attributed to the cost approach. We construct and analyze the corresponding mathematical models, provide an algorithm for solving them and a numerical example demonstrating the irrationality of commonly used repair policies.

Keywords: lifetime, repair policy, optimization criterion, degradation, Kijima models, valuation, income approach.

JEL Classification: D21, D25, D46, D81.

For reference: **Smolyak S.A.** (2022). The income approach to the problems of optimizing the repair policy. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 2, 112–124. DOI: 10.31857/S042473880019997-5