ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2022, том 58, № 3, с. 102–114

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Математическое моделирование многопродуктового рассредоточенного рынка в системе мирового хозяйства

 А.Г. Коваленко, А.В. Злотов

А.Г. Коваленко,
Самарский Государственный университет; Самара, e-mail: alexey.gavrilovich.kovalenko@rambler.ru

А.В. Злотов,
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН; Москва; e-mail: Zlot_a@mail.ru

Поступила в редакцию 02.12.2021

Аннотация. В статье строятся математические модели, которые являются развитием модели экономики Вальраса, как централизованной, так и децентрализованной пространственно-рассредоточенной экономической системы с взаимодействиями субъектов совершенной и несовершенной конкуренции. Новизна данной модели определяется введением в модели субъектов рынка: 1) домашних хозяйств, с описанием их функционирования с помощью функций полезности, эти хозяйства для своего существования потребляют ресурсы — различные виды товаров, а для получения товаров производят различные виды труда; 2) многопродуктовых предприятий, покупающих различные виды товарных и трудовых ресурсов; 3) перекупщиков, распространяющих продукты между локальными рынками и осуществляющих перемещение различных видов труда по транспортной сети от домашних хозяйств до предприятий. При поиске состояния равновесия используются задачи субъектов рынков в экстремальных постановках. Организуя различные виды взаимодействий субъектов на товарных рынках, строятся рынки как совершенной, так и несовершенной конкуренции. Разработаны численные методов анализа описанных моделей. Численные методы поиска состояния равновесия рассматриваемых моделей строятся на основе методов векторной оптимизации.

Ключевые слова: модель Эрроу–Дебре, несовершенная и совершенная конкуренция, домашние хозяйства, предприятия, перекупщики, сетевые задачи, теория гидравлических систем, поиск состояний равновесия.

Классификация JEL: C02.

Для цитирования: **Коваленко А.Г., Злотов А.В.** (2022). Математическое моделирование многопродуктового рассредоточенного рынка в системе мирового хозяйства // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 3. С. 102–114. DOI: 10.31857/S042473880021698-6

ВВЕДЕНИЕ

Проблема описания экономической системы и существования ее равновесия была изложена еще в работе Л. Вальраса (Вальрас, 2000, с. 448). В ней он писал, что «эта теория является математической, изложение и доказательство существование равновесия должно быть математическим». Моделям рынков несовершенной конкуренции (анализ рыночной власти и ее регулирование) посвящены работы нобелевских лауреатов К. Дж. Эрроу и Ж. Дебре (см. (Никайдо, 1972, с. 514)), а моделям рынков несовершенной конкуренции — нобелевского лауреата Ж. Тироля (Тироль, 1996). Однако в построенных ими моделях отсутствует пространственно-ценовая дифференциация рынков.

Данная статья посвящена следующему этапу развития моделей рассредоточенного рынка. В экономической системе взаимовлияние субъектов зависит от степени удаленности, лидерства в пределах локального рынка, взаимного расположения в структуре связей системы. Большое число локальных рынков и возможность варьирования в них субъектами, владеющими стратегической переменной, дают огромное количество вариантов рыночных структур. Для анализа этих структур мы предлагаем численные методы оптимизации, численные методы ТГС (Меренков, Хасилев, 1985), теории игр. Применение численных методов для анализа экономических систем привнес В. Леонтьев (Leontief, 1985), который применял эти методы для моделей межотраслевого баланса.

1. ОПИСАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Модель экономической системы состоит из следующих подсистем.

– Множества *домашних хозяйств,* основой существования которых является потребление продукции, покупаемой на различных рынках. Бюджетные средства, на которые покупаются товары, домашние хозяйства получают за счет продажи своего труда, а также за счет акций от предприятий, акций от перекупщиков, осуществляющих куплю–продажу товаров.

– Множества *предприятий*, потребляющих:

а) труд домашних хозяйств (обмен «деньги — труд» осуществляется на рассредоточенных рынках труда);

б) товары — ресурсы, выпускаемые другими предприятиями (товарно-денежный обмен на рассредоточенных товарных рынках);

в) ресурсы территории, на которой они находятся;

г) прибыль предприятий распределяется на оплату труда, оплату приобретаемых ресурсов, оплату по акциям домашних хозяйств–собственников предприятий.

– Множества *перекупщиков*, которые покупают товары у предприятий; перепродают их, транспортируют товары посредством соответствующей транспортной системы и продают домашним хозяйствам;

– *Транспортной системы*, по которым носители труда (представители домашних хозяйств) несут свой труд от мест проживания до мест потребления (предприятий), взамен получая оплату за труд.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СУБЪЕКТОВ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Модели поведения домашних хозяйств на основе функций полезности в структуре экономической системы

В соответствии с современным представлением экономической теории под домашним хозяйством будем понимать совокупность лиц, совместно добывающих и потребляющих необходимые предметы (блага) существования. Домашнее хозяйство может состоять из одного человека, живущего самостоятельно. Деятельность, направленную на добычу средств существования, будем называть *трудом*. Использование, применение добытых предметов существования будем называть *потреблением*. Домашнее хозяйство — это низший, неделимый субъект экономической системы.

Пусть W — конечное множество видов товаров экономической системы; w — вид товара, $w \in W$; L — конечное множество видов труда экономической системы; l — вид труда. Математические модели домашних хозяйств в микроэкономическом анализе широко известны (Гальперин, Игнатьев, Моргунов, 2000г). Модели строятся на основе теории бинарных отношений, задаваемых в пространствах векторов потребления и труда. Эти отношения позволяют строить так называемые порядковые функции полезности, максимизация которых при бюджетном ограничении описывает задачу потребителя.

Но возникает вопрос, откуда берется бюджет. Его нужно заработать, т.е. за счет труда. Современная микроэкономика использует естественное деление предметов (так как дальнейший анализ связан с обменом, то будем применять термин «товар») потребления на отдельные виды. И для каждого вида существует соответствующая единица измерения, позволяющая проводить количественное сравнение векторов товаров в пределах одного вида.

Сложнее дело обстоит с моделями труда. Труд — деятельность, направленная, прямо или косвенно, на приобретение товаров потребления. Естественным является деление труда на отдельные виды. Под видом труда будем понимать однородные деятельности, неотличимые друг от друга (например, деятельность слесарей, токарей, плотников и т.д.). Виды деятельности могут делиться на подвиды. Будем считать, что такое разбиение конечное. Характерной чертой вида труда служит возможность его измерения. Наиболее естественной (но не обязательной) единицей измерения физических видов труда при производстве той или иной продукции служит объем затрачиваемой энергии, или затрачиваемого времени. Будем считать, что каждый вид труда измеряется в условных единицах (у.е.). Два вида можно считать одинаковыми, если они могут производить одинаковую продукцию и различие может быть лишь в затратах (энергии/времени).

Обозначим через xw вектор товаров потребления, xl — вектор выполняемого труда, тогда каждая компонента вектора $x = (xw, xl)$ имеет свою единицу измерения. Если XW — пространство видов предметов потребления, пространство XL — видов труда, то прямое произведение $X = XW \times XL$ этих пространств дает полное пространство, описывающее состояние экономической системы.

Будем считать, что для любого домашнего хозяйства в пространстве X можно определить бинарное отношение строгого порядка «$\succ$»[1] и порядка эквивалентности «$\approx$», устанавливающее предпочтение на нем, что позволяет построить функцию полезности $u = u(x) = u(xw, xl)$.

Обозначим через ДХ множество домашних хозяйств в экономической системе. Пусть $i \in$ ДХ. Считаем, что для любых $x, y \in X$ домашнее хозяйство i либо $x \succ_i y$, либо $y \succ_i x$, либо $x \approx_i y$. Введенный порядок позволяет получить функцию полезности $u_i = u_i(x) = u_i(xw, xl)$. Обычно для домашнего хозяйства вектор $xw \in XW$ является благом, $xl \in XL$ — антиблагом.

Так как каждому i принадлежит свой вектор товаров и свой вектор видов труда, будем применять XW_i и XL_i.

Каждое домашнее хозяйство узла $i \in$ ДХ на суммарный доход приобретает товары потребления и поставляет свой труд на рынки труда. Суммарный доход состоит из: 1) дохода $Д_i^1$ от продажи своих видов труда; 2) дохода $Д_i^2$ от владения акциями предприятий (сюда входят вложения в предприятия и перекупщиков в предыдущие периоды); 3) дохода $Д_i^3$ от владения акций перекупщиков.

Будем считать, что каждое домашнее хозяйство $i \in$ ДХ в результате своей деятельности максимизирует свою полезность. Максимум полезности домашнего хозяйства будет иметь вид

$$u_i = u_i(x) = u_i((xw_v)_{v \in V_W^+(i)}, \quad (xl_v)_{v \in V_L^-(i)}) \to \max_{\Theta_{ДХ}(i)},$$

где $\Theta_{ДХ}(i)$ — вектор переменных (параметров), по которым проводится оптимизация, в частности $\Theta_{ДХ}(i) = ((xw_v)_{v \in V_W^+(i)}; (xl_v)_{v \in V_L^-(i)})$; $V_W^+(i)$ — множество дуг, по которым товар поступает с товарных рынков; $V_L^-(i)$ — множество дуг, по которым труд выходит на рынки труда. Для $v \in V_W^+(i)$ цена товара, поступающего по дуге v из узла $h1(v)$, равна $P_{h1(v)}$, поэтому затраты на приобретение товаров будут иметь вид $\sum_{v \in V_W^+(i)} P_{h1(v)} xw_v$, а бюджетное ограничение — $\sum_{v \in V_W^+(i)} P_{h1(v)} xw_v \le Д_i^1 + Д_i^2 + Д_i^3$.

Доход от продажи труда. Первая часть от продажи труда вычисляется по зависимости $Д_i^1 = \sum_{v \in V_L^-(i)} Pl_{h2(v)} xl_v$, где $V_L^-(i)$ — множество дуг, выходящих из узла i в узлы рынков труда $h2(v)$, $v \in V_L^-(i)$; $P_{h2(v)}$ — цена труда в этих узлах.

Доход по акциям предприятий. Обозначим через J_i множество предприятий, акционером которого является домашнее хозяйство i, $J_i \subset$ ПР. Пусть для предприятия j, $j \in J_i$, прибыль равна π_j; I_j — множество домашних хозяйств–акционеров предприятия j, между которыми распределяется эта прибыль; α_j^k — доля прибыли, получаемая домашним хозяйством k от предприятия j. Коэффициенты α_j^k должны обладать свойствами $\sum_{k \in I_j} \alpha_j^k = 1$, $\alpha_j^k \ge 0$, $k \in I_j$. Тогда вторая часть бюджета домашнего хозяйства будет равна $Д_i^2 = \sum_{j \in J_i} \alpha_j^i \pi_j$.

Доход по акциям от перекупщиков. Пусть w — некоторый продукт, $w \in W$, u — перекупщик этого товара, $u \in V_W$; $VV = \bigcup_{w \in W} V_w$ — множество всех перекупщиков; JV_i — множество перекупщиков, акционером которого является домашнее хозяйство i. Возьмем перекупщика $jv \in JV_i$, его прибыль как перекупщика равна π_{jv}; IV_{jv} — множество домашних хозяйств–акционеров перекупщика jv, между которыми распределяется эта прибыль; β_{jv}^k — доля прибыли, получаемая домашним хозяйством k от перекупщика jv. Коэффициенты β_{jv}^k должны обладать свойствами: $\sum_{k \in IV_{jv}} \beta_{jv}^k = 1$, $\beta_{jv}^k \ge 0$, $k \in IV_{jv}$. Тогда третья часть бюджета домашнего хозяйства будет равна $Д_i^3 = \sum_{jv \in JV_i} \beta_{jv}^i \pi_{jv}$.

Задача домашнего хозяйства. Для узла i задача домашнего хозяйства ДХ(i) определяется как

$$u_i = u_i(x) = u_i\left((xw_v)_{v \in V_W^+(i)}, \ (xl_v)_{v \in V_L^-(i)}\right) \to \max_{\Theta_{ДХ}(i)} \tag{1}$$

при бюджетном ограничении

$$\sum_{v \in V_W^+(i)} P_{h1(v)} xw_v \le \sum_{v \in V_L^-(i)} Pl_{h2(v)} xl_v + \sum_{j \in J_i} \alpha_j^i \pi_j + \sum_{jv \in JV_i} \beta_{jv}^i \pi_{jv}. \tag{2}$$

[1] Например, запись $x \succ_i y$ означает, что x предпочтительнее y для домашнего хозяйства i.

Так как мы считаем, что домашние хозяйства непосредственно связаны дугами с узлами локальных рынков экономической системы, потоки по дугам обозначены q_v, начало дуги — $h1(v)$, конец дуги — $h2(v)$, то можем записать задачу домашнего хозяйства ДХ(i) как

$$\begin{cases} u_i = u_i(x) = u_i((q_v)_{v\in V_W^+(i)};(q_v)_{v\in V_L^-(i)}) \to \max\limits_{(q_v)_{v\in V_W^+(i)};(q_v)_{v\in V_L^-(i)}}, \\ \sum\limits_{v\in V_W^+(i)} P_{h1(v)}q_v \le \sum\limits_{v\in V_L^-(i)} Pl_{h2(v)}q_v + \sum\limits_{j\in J_i}\alpha_j^i\pi_j + \sum\limits_{jv\in JV_i}\beta_{jv}^i\pi_{jv}. \end{cases} \quad (3)$$

Для дуги $v\in V_{W(i)}^+$ узел $h1(v)$ принадлежит рынку товара w, для которого $h1(v)\in E^w$; для дуги $v\in V_{L(i)}^-$ узел $h2(v)$ принадлежит рынку труда l, для которого узел $h2(v)\in E^l$.

2.2. Модели поведения предприятий на основе функций полезности в структуре экономической системы

Пусть ПР — множество предприятий экономической системы, которые выпускают товары из множества W. Каждое предприятие может выпускать несколько видов товаров. Для узла i ∈ ПР, ПР(i) — предприятие узла i; $V_W^-(i)$ — множество дуг, по которым предприятие ПР(i) отправляет произведенный товар на соответствующие рынки.

Для любой дуги $v\in V_W^-(i)$ начало $h1(v)=i$. Конец дуги $j=h2(v)$ принадлежит множеству E_w рынка R_w товара w, $w\in W$. Дуга v определяет вид товара, отправляемого из предприятия.

Обозначим через $V_W^+(i)$ — множество дуг, по которым на предприятие ПР(i) поступают товары в качестве потребляемых ресурсов. Для любой дуги $v\in V_W^+(i)$ имеем $h2(v)=i$. Начало дуги $j=h1(v)\in E_w$ рынка R_w товара $w\in W$. Дуга v определяет вид товара, получаемого предприятием. Подробное описание товарных рынков будет приведено далее.

В производстве товаров предприятием ПР(i) принимают участие различные виды труда. Обозначим через $V_L^+(i)$ — множество дуг, по которым поступает труд на это предприятие. Пусть $v\in V_L^+(i)$, $j=h1(v)$. Среди множества видов труда найдется такой вид $l\in L$, что $j\in E_l$, где E_l — множество узлов конечного ориентированного графа $G_l=\langle E_l,V_l,H_l\rangle$, описывающего структуру связей локальных рынков труда вида l. Подробно структуры рынков труда будут описаны далее.

Пусть $v\in V_W^-(i)$, q_v — объем продукта, отправляемого по дуге v в узел $j=h2(v)$. Этот узел принадлежит одному, и только одному множеству узлов E_w, $w\in W$. Аналогично, если $v\in V_W^+(i)$, то q_v — объем продукта, получаемого в качестве потребляемого ресурса по дуге v из узла $j=h1(v)$. Этот узел принадлежит одному, и только одному множеству узлов E_w, $w\in W$.

Вектор собственных ресурсов территории, принадлежащей предприятию, обозначим через r_i, ($r_i \le_i \bar{r}_i$), где $\bar{r}_i$ — предельный объем ресурсов предприятия, $\le_i$ — знак неравенства в пространстве, размерности вектора r_i. Модель выпуска товаров запишем как $(q_v)_{v\in V_W^-(i)}\in F^i((q_v)_{v\in V_W^+(i)},(q_v)_{V_L^+(i)},r_i))$, где F^i — множество достижимости объемов выпускаемой продукции при заданных значениях аргументов $((q_v)_{v\in V_W^+(i)},(q_v)_{V_L^+(i)},r_i)$. Вектор собственных ресурсов r_i можно интерпретировать как ресурсы, добываемые на территории и распределяемые для потребления (вообще говоря, в переработанном виде) на других предприятиях и по домашним хозяйствам экономической системы.

Задача предприятия ПР(i).

$$\pi_i = \sum_{v\in V_W^-(i)} P_{h2(v)}q_v - \left(\sum_{v\in V_W^+(i)} P_{h1(v)}q_v + \sum_{v\in V_L^+(i)} P_{h1(v)}q_v + \langle P_{n}r_i, r_i\rangle\right) \to \max_{\Theta_{\text{ПР}}(i)} \quad (4)$$

при ограничениях

$$(q_v)_{v\in V_W^-(i)}\in F^i\left((q_v)_{v\in V_W^+(i)},(q_v)_{V_L^+(i)},r_i)\right),\quad r_i\le_i \bar{r}_i,$$

где $\Theta_{\text{ПР}}(i)$ — список переменных, по которым берется максимум. Так, на рынках, в которых предприятие является монополистом, в этот список, помимо прочих, могут войти переменные $P_{h2(v)}, v\in V_W^-(i), P_{h1(v)}, v\in V_W^+(i),\ P_{h1(v)}, v\in V_L^+(i)$.

2.3. Модели поведения перекупщиков на основе функций полезности в структуре экономической системы

Пусть w — вид товара, $w\in W$. Этому виду товара соответствует рассредоточенный рынок R_w, имеющий структуру, задаваемую графом $G_w=\langle E_w,V_w,H_w\rangle$. Рассмотрим дугу $v\in V_w$. Будем считать, что $P_{h2(v)} \geq P_{h1(v)}$, или ($P_{h2(v)} - P_{h1(v)} \geq 0$). В этом случае перекупщик ПРК(v), соответствующий дуге v, покупает товар (и становится его собственником) в объеме $q_v \geq 0$ на рынке узла $h1(v)$ по цене $P_{h1(v)}$, транспортирует и продает на рынке узла $h2(v)$ по цене $P_{h2(v)}$. Прибыль перекупщика будет иметь вид

$$F_v = P_{h2(v)}q_v - \left(P_{h1(v)}q_v + \sum\nolimits_{u\in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \left\langle Pr_v, r_v \right\rangle\right).$$

Первое слагаемое — выручка от продажи в узле $h2(v)$, второе — издержки, которые содержат покупку товара в узле $h1(v)$; покупку ресурсов на рынках $h1(u), u \in V_v^+$ где V_v^+ — множество дуг, по которым поступают ресурсы; стоимость ресурсов, являющихся собственностью перекупщика, r_v — искомый вектор объемов ресурсов, используемых при транспорте купленной продукции, $\bar{r}_v$ — вектор максимальных объемов этих ресурсов, Pr_v — вектор цен на эти ресурсы, компоненты вектора цен являются внешними переменными.

После преобразования получим

$$F_v = (P_{h2(v)} - P_{h1(v)})q_v - \left(\sum\nolimits_{u\in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \left\langle Pr_v, r_v \right\rangle\right).$$

Задача перекупщика ПРК(v) примет вид

$$F_v = (P_{h2(v)} - P_{h1(v)})\,q_v - \left(\sum\nolimits_{u\in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \left\langle Pr_v, r_v \right\rangle\right) \Rightarrow \max_{\Theta_{\text{ПРК}}(v)},\ 0 \leq q_v \leq f_v((q_{h1(u)})_{u\in V_v^+}, r_v),$$

$$0_v \leq_v r_v \leq_v \bar{r}_v,$$

где $f_v((q_{h1(u)})_{u\in V_v^+}, r_v)$ — производственная функция, ограничивающая объем перевозки; $\Theta_{\text{ПРК}}(v)$ — перечень параметров, по которым берется максимум.

Пусть $P_{h2(v)} \leq P_{h1(v)}$. В этом случае перекупщик покупает товар (становится его собственником) в объеме q_v в узле $h2(v)$ по цене $P_{h2(v)}$, транспортирует в узел $h1(v)$ и продает по цене $P_{h1(v)}$. Так как поток движется от конца дуги к ее началу, то $q_v \leq 0$. Прибыль перекупщика будет иметь вид

$$F_v = P_{h1(v)}(-q_v) - \left(P_{h2(v)}(-q_v) + \sum\nolimits_{u\in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \left\langle Pr_v, r_v \right\rangle\right),$$

где первое слагаемое — это выручка от всей операции, второе — издержки. После несложных преобразований получаем:

$$F_v = -\left(P_{h2(v)} - P_{h1(v)}\right)(-q_v) - \left(\sum\nolimits_{u\in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \left\langle Pr_v, r_v \right\rangle\right).$$

Экстремальная задача перекупщика примет вид

$$F_v = (P_{h2(v)} - P_{h1(v)})\,q_v - \left(\sum\nolimits_{u\in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \left\langle Pr_v, r_v \right\rangle\right) \Rightarrow \max_{\Theta_{\text{ПРК}}(v)},$$

$$0 \leq -q_v \leq f_v((q_{h1(u)})_{u\in V_v^+}, r_v),$$

$$0_v \leq_v r_v \leq_v \bar{r}_v.$$

Объединяя оба случая, получим задачу перекупщика ПРК(v)

$$\begin{aligned}
&F_v = (P_{h2(v)} - P_{h1(v)})\,q_v - \left(\sum\nolimits_{u\in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \left\langle Pr_v, r_v \right\rangle\right) \Rightarrow \max_{\Theta_{\text{ПРК}}(v)},\\
&\left|q_v\right| \leq f_v((q_{h1(u)})_{u\in V_v^+}, r_v),\\
&0_v \leq_v r_v \leq_v \bar{r}_v,\\
&\operatorname{sign}(y_v) = \operatorname{sign}(P_{h2(v)} - P_{h1(v)}),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\left|q_v\right|$ — объем перевозок по дуге v, ограничиваемый значением производственной функции f_v; знак q_v совпадает со знаком ($P_{h2(v)} - P_{h1(v)}$) и определяет направление движения потока по дуге; покупка ресурсов на рынках $h1(u), u \in V_v^+$, где V_v^+ — множество дуг, по которым поступают ресурсы; r_v — искомый вектор объемов ресурсов, который используется при транспорте купленной продукции; Pr_v — стоимость ресурсов перекупщика, т.е. вектором цен на ресурсы являются внешние переменные; $\bar{r}_v$ — вектор максимальных объемов этих ресурсов, $\Theta_{\text{ПРК}}(v)$ — список параметров перекупщика дуги v, по которым ведется максимизация, в этот список, в зависимости от структуры локального рынка, могут входить переменные $P_{h2(v)}, P_{h1(v)}, q_v$, компоненты вектора r_v.

Замечание. В модели считается, что связь предприятий, перекупщиков и домашних хозяйств с локальным рынком осуществляется без посредников (перекупщиков).

3. ПРОСТРАНСТВЕННО РАССРЕДОТОЧЕННЫЕ ТОВАРНЫЕ РЫНКИ

3.1. Описание структуры модели

Пусть как и выше, W — множество видов товаров экономической системы. Каждому виду $w \in W$ рынка соответствует свой однопродуктовый пространственно-рассредоточенный рынок R_w. Структуру рынка задаем ориентированным графом $G_w = \langle E_w, V_w, H_w \rangle$, где E_w — множество узлов, осуществляющих обмен товаром; V_w — множество дуг — перекупщиков товара; H_w — отображение для дуг $H_w(v) = (h1(v), h2(v))$, $h1(v)$ — узел, начало дуги v; $h2(v)$ — узел, конец дуги v.

Каждому $i \in E_w$ поставим в соответствие переменную P_i, которая обозначает цену обмена товара. Каждому $v \in V_w$ соответствует переменная q_v — объем перевозимого перекупщиком товара, $q_v \ge 0$, если направление потока совпадает с направлением дуги, $q_v < 0$, в противном случае. Переменная q_v определятся моделью перекупщика этой дуги.

3.2. Граничные условия, условия продуктового баланса однопродуктового рынка товара

Разобьем множество узлов E_w товара w на 3 непересекающиеся части: $E_w = E_w^1 \,\&\, E_w^2 \,\&\, E_w^3$, где $E_w^1 \cap E_w^2 = \varnothing$, $E_w^1 \cap E_w^3 = \varnothing$, $E_w^2 \cap E_w^3 = \varnothing$,

$$\begin{cases} z_i - \text{свободная переменная}, \\ P_i - \text{константа}, P_i = P^*{}_i, \end{cases} \quad i \in E_w^1; \tag{6}$$

$$\begin{cases} z_i - \text{константа}, z_i = B^*{}_i, \\ P_i - \text{свободная переменная}, \end{cases} \quad i \in E_w^2; \tag{7}$$

$$z_i = B^*{}_i(P_i), \quad i \in E_w^3. \tag{8}$$

Для $z_i = B^*{}_i(P_i)$ эластичность не равна нулю и не равна бесконечности. В условиях равновесия выполняется равенство

$$\left(\sum\nolimits_{v \in V^+} q_v - \sum\nolimits_{v \in V^-} q_v\right) + \left(\sum\nolimits_{v \in V^+_{\text{ПР}}(i)} q_v - \sum\nolimits_{v \in V^-_{\text{ПР}}(i)} q_v\right) - \sum\nolimits_{v \in V^-_{\text{ПРК}}(i)} q_v - \sum\nolimits_{v \in V^-_{\text{ДХ}}(i)} q_v = z_i, \; i \in E_w^2 \cup E_w^3. \tag{9}$$

Здесь первое слагаемое обозначает сумму потоков, которые ввозят перекупщики в узел, за вычетом потоков, которые вывозят перекупщики из узла; $V^+(i)$ — множество дуг, входящих в узел i, $V^-(i)$ — множество дуг, выходящих из узла i. Второе слагаемое — сумма потоков товаров узлов $h1(v)$, $v \in V^+_{\text{ПР}}(i)$, ввозимых для продажи в узел i, минус потоки товара, которые вывозят предприятия $h2(v)$, $v \in V^-_{\text{ПР}}(i)$ из узла i. Эти предприятия используют вывозимые потоки как ресурсы для своего производства. Третье слагаемое — сумма потоков товаров, которые вывозят перекупщики из узла и используют как ресурсы для транспорта товара. Дуги $v \in V^-_{\text{ПРК}}(i)$ нестандартного определения, начало дуги $h1(v)$ — это узел i, конец дуги — $h2(v)$, который так же является дугой из множества ПРК. Четвертое — сумма потоков товаров, которые вывозят домашние хозяйства для потребления. Начало дуги $v \in V^-_{\text{ДХ}}(i)$ является узлом i, т.е. $h1(v) = i$.

Выражение, стоящее в (9) справа — внешнеторговый баланс. Для узлов $i \in E_w^1$ в состоянии равновесия внешнеторговый баланс является величиной расчетной и вычисляется выражением

$$\left(\sum_{v \in V^+(i)} q_v - \sum_{v \in V^-(i)} q_v\right) + \left(\sum_{v \in V^+_{\text{ПР}}(i)} q_v - \sum_{v \in V^-_{\text{ПР}}(i)} q_v\right) - \sum_{v \in V^-_{\text{ПРК}}(i)} q_v - \sum_{v \in V^-_{\text{ДХ}}(i)} q_v = z_i, \quad i \in E_w^1. \tag{10}$$

3.3. Баланс денежных потоков в узлах рынков

В узлах осуществляется товарно-денежный обмен, вместе с движением товаров происходит перенос их эквивалентной стоимости. Расчет эквивалентной стоимости обмена товаров выводится из соотношения (9):

$$\left(\sum_{v \in V^+(i)} q_v P_i - \sum_{v \in V^-(i)} q_v P_i\right) + \left(\sum_{v \in V^+_{\text{ПР}}(i)} q_v P_i - \sum_{v \in V^-_{\text{ПР}}(i)} q_v P_i\right) - \sum_{v \in V^-_{\text{ПРК}}(i)} q_v P_i - \sum_{v \in V^-_{\text{ДХ}}(i)} q_v P_i = z_i P_i$$

или

$$\left(\sum_{v \in V^+(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V^+_{\text{ПР}}(i)} q_v P_i\right) - \left(\sum_{v \in V^-(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V^-_{\text{ПР}}(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V^-_{\text{ПРК}}(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V^-_{\text{ДХ}}(i)} q_v P_i\right) = z_i P_i.$$

Направление движения денежных потоков, которые участвуют в обмене, противоположно направлению товарных движений потоков. Отметим, что если система замкнутая, т.е. $z_i = 0$, то

$$\left(\sum_{v\in V^+(i)} q_v P_i + \sum_{v\in V^+_{\text{ПР}}(i)} q_v P_i\right) - \left(\sum_{v\in V^-(i)} q_v P_i + \sum_{v\in V^-_{\text{ПР}}(i)} q_v P_i + \sum_{v\in V^-_{\text{ПРК}}(i)} q_v P_i + \sum_{v\in V^-_{\text{ДХ}}(i)} q_v P_i\right) = 0.$$

4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА ТРУДА В ЭКОНОМИКО-ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ МИРОВОГО ХОЗЯЙСТВА

4.1. Описательная модель

В основу построения модели пространственно рассредоточенного рынка труда положим модель передвижения носителей видов труда между источниками труда — домашними хозяйствами, и потребителями труда — предприятиями. Для описания структуры рынков труда, как и при описании товарных рынков, воспользуемся понятием графа. Каждому виду труда $l \in L$ соответствует свой граф G_l. В нем узлы — локальные рынки труда — места непосредственной связи рынков с предприятиями, и места пересадок при движении по транспортной сети. Рынками труда пользуются и перекупщики, поэтому в граф добавляются нестандартные дуги, начало который находится в узле — рынке труда, конец — дуга, соответствующая перекупщику. Будем считать, что остановочные пункты находятся в непосредственной близости от потребителей и поставщиков труда. Такой подход не умаляет связи с действительностью. Одному и тому же участку транспортной сети может соответствовать несколько различных дуг графа различных видов труда.

4.2. Математическая модель рынка труда

Как и выше, L — конечное множество видов труда экономико-географической системы. Пусть $l \in L$, рассредоточенный рынок труда l обозначим R_l. Ему соответствует конечный ориентированный граф $G_l = \langle E_l, V_l, H_l \rangle$, описывающий структуру связей локальных рынков труда вида l; E_l — остановочные пункты и пункты пересадок, где носители труда могут сменить маршрут движения. Пусть $i \in E_l$, $V^+(i), V^-(i)$ — множества дуг соответственно входящих и выходящих из узла i в инцидентные узлы из E_l, через $V^+_{\text{ДХ}}(i)$, $V^-_{\text{ПР}}(i)$, $V^-_{\text{ПРК}}(i)$ обозначены множества дуг соответственно входящих в домашние хозяйства (множество ДХ) и выходящих в направление предприятий (множество ПР) и в направление перекупщиков (множество ПРК). Обозначим через P_i цену труда в узле i, для $v \in V_l$, q_v — величина потока труда вида l, перемещаемого по дуге v.

4.3. Ценовая взаимосвязь субъектов рынков труда

Возможны 2 случая:

Случай 1. $P(h2(v) \geq P(h1(v))$, поток движется от узла $h1(v)$ к $h2(v)$, поэтому $q_v \geq 0$. Обозначим через $\theta_v(q_v)$ — стоимость транспорта носителей труда за единицу потока при общем потоке q_v по дуге v. В состоянии равновесия будет выполняться $P(h2(v) = P(h1(v)) + \theta_v(q_v)$.

Случай 2. $P(h2(v)) < P(h1(v))$, поток труда движется от узла $h2(v)$ к узлу $h1(v)$. В этом случае $q_v < 0$, $\theta_v(-q_v)$ — стоимость транспорта носителей труда за единицу потока при общем потоке q_v по дуге v. В состоянии равновесия будет выполняться $P(h1(v) = P(h2(v)) + \theta_v(-q_v)$.

Объединяя оба случая, получаем, что для любого q_v:

$$P(h2(v)) - P(h1(v)) = \operatorname{sign}(q_v)\theta_v(|q_v|)$$

или

$$\theta_v(|q_v|) = \operatorname{sign}\big(P(h2(v)) - P(h1(v))\big)\big(P(h2(v)) - P(h1(v))\big).$$

Обозначим через θ_v^{-1} — обратную функцию для θ_v, тогда

$$|q_v| = \theta_v^{-1}\left|P(h2(v)) - P(h1(v))\right| \text{ или } q_v = \operatorname{sign}(P(h2(v)) - P(h1(v)))\,\theta_v^{-1}\left|P(h2(v)) - P(h1(v))\right|.$$

Если $\Delta_v = (P(h2(v)) - P(h1(v)))$, предыдущую зависимость можно записать

$$q_v = \operatorname{sign}(\Delta_v)\,\theta_v^{-1}(\Delta_v). \tag{11}$$

4.4. Граничные условия

Пусть $E_l = E_l^1 \cup E_l^2 \cup E_l^3$, где $E_l^1 \cap E_l^2 = \varnothing$, $E_l^1 \cap E_l^3 = \varnothing$, $E_l^2 \cap E_l^3 = \varnothing$. На рынке труда:

$$\begin{cases} z_i - \text{ свободная переменная}, \\ P_i - \text{ константа}, P_i = P^*_i, \end{cases} \quad i \in E_l^1; \tag{12}$$

$$\begin{cases} z_i - \text{ константа}, z_i = B^*{}_i \\ P_i - \text{ свободная переменная}, \end{cases} \quad i \in E_l^2; \tag{13}$$

$$z_i = B_i^*(P_i), \quad i \in E_l^3. \tag{14}$$

Для $i \in E_l^3$ внешнеторговый баланс z_i связан с ценой P_i функцией $B_i^*(P_i)$. Для этой функции эластичность не равна нулю и не равна бесконечности. Соотношения (12) соответствуют случаю, когда моделируемая система не может повлиять на цены систем узлов $i \in E_l^1$, соотношения (13) соответствуют случаю, когда объем потребления (поставки) узлами $i \in E_l^2$ постоянный и не зависит от цены равновесия в узле.

4.5. Узловой баланс труда

Пусть $i \in E_l \setminus E_l^1$ (т.е. $i \in E_l^2 \cup E_l^3$), $v \in \left(V^+(i) \cup V^-(i)\right) \cup \left(\cup V^+_{\text{ДХ}}(i) \cup V^-_{\text{ПР}}(i)\right) \cup V^-_{\text{ПРК}}(i)$, для каждого $i \in E_l$ в состоянии равновесия выполняется

$$\sum_{v \in V^+(i)} q_v - \sum_{v \in V^-(i)} q_v + \sum_{v \in V^+_{\text{ДХ}}(i)} q_v - \sum_{v \in V^-_{\text{ПР}}(i)} q_v - \sum_{v \in V^-_{\text{ПРК}}(i)} q_v = B_i(P_i).$$

Для $i \in E_l^1$

$$\sum_{v \in V^+(i)} q_v - \sum_{v \in V^-(i)} q_v + \sum_{v \in V^+_{\text{ДХ}}(i)} q_v - \sum_{v \in V^-_{\text{ПР}}(i)} q_v - \sum_{v \in V^-_{\text{ПРК}}(i)} q_v = z_i, \tag{15}$$

которое является формулой расчета экспортно-импортного сальдо.

5. УЗЛОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ В МОДЕЛИ ОБЩЕГО РАВНОВЕСИЯ ЭКОНОМИКО-ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МИРОВОГО ХОЗЯЙСТВА

5.1. Продуктовый баланс в виде экстремальной задачи

«Невидимая рука» локального продуктового рынка. Рассмотрим произвольный вид товара $w \in W$, $i \in E_w^2 \cup E_w^3$. Узлы $i \in E_w^1$ не берем, так как для них переменная P_i — константа, на переменную z_i ограничений нет, она может принимать любые значения в соответствии с (10).

Зафиксируем для всех узлов–товарных рынков $j \in E_w \setminus \{i\}$ и всех рынков труда $j \in E_l$ значение цены P_j. Переменные P_j, $j \in (E_w \setminus \{i\}) \cup E_l$, дальше будем обозначать P_{-i}. Если в узле i рынок — совершенная конкуренция, то переменная P_i независимая, переменные P_{-i} ее функции, и (9) можно записать

$$F = \left(\sum_{v \in V^+(i)} \eta_v(P_i, P_{-i}) - \sum_{v \in V^-(i)} \eta_v(P_i, P_{-i}) \right) + \left(\sum_{v \in V^+_{\text{ПР}}(i)} \eta_v(P_i, P_{-i}) - \sum_{v \in V^-_{\text{ПР}}(i)} \eta_v(P_i, P_{-i}) \right), \tag{16}$$

где $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ — функция отклика потока товара на переменную P_i при постоянных значениях переменных P_{-i} для: $V^+(i)$ — перекупщиков-продавцов в узел i на цену P_i; $V^-(i)$ — перекупщиков-покупателей из узла i на цену P_i; $v \in V^+_{\text{ПР}}(i)$ — предприятий $h1(v)$-продавцов на цену P_i; $v \in V^-_{\text{ПР}}(i)$ — предприятий $h2(v)$-покупателей на цену P_i; $v \in V^-_{\text{ПРК}}(i)$ — перекупщиков $h2(v)$ покупателей на цену P_i; $v \in V^-_{\text{ДХ}}(i)$ — домашних хозяйств $h2(v)$ на цену P_i.

Левую часть равенства (16) будем называть *небалансом* в узле i при цене P_i и обозначать $N_i(P_i, P_{-i})$, тогда (16) примет вид

$$N_i(P_i, P_{-i}) = 0. \tag{17}$$

В дальнейшем уравнения (17) будем называть для узла i центральными.

Определение НР1. Будем говорить, что узел i находится в состоянии равновесия при цене P_i^* при фиксированных P_{-i}, если выполняется $N_i(P_i^*, P_{-i}) = 0$. Значение P_i^* будем называть равновесной ценой рынка узла i при фиксированных P_{-i}.

Определение НР2. Будем говорить, что экономическая система находится в состоянии равновесия, если все товарные рынки и рынки труда находятся в состоянии равновесия.

Таким образом, из задач домашнего хозяйства (3); задачи предприятий (4); задачи перекупщика (15) и из условий на границах связи с другими экономическими системами (граничных условий) (6)–(8) и продуктового баланса (9), (10) получаем эквивалентную задачу, состоящую из граничных условий (6)–(8) и системы узловых уравнений (17).

Пусть $\overline{P}_j,\ j \in E_w^1 \cup E_w^2 \cup E_w^3$ — решение системы узловых уравнений (17) и граничных условий (11)–(14), тогда $\forall i \in E_w^2 \cup E_w^3\ \overline{P}_i$ является решением одного уравнения

$$N_i(P_i, \overline{P_{-i}}) = 0 \tag{18}$$

с одним неизвестным — P_i. Задачу (18) поиска состояния равновесия в узле можно записать в виде экстремальной задачи

$$\begin{gathered}\sum_{v \in V^+(i)} \operatorname{sign}(P_i - P_{h1(v)})\,\theta_v^{-1}(P_i - P_{h1(v)}) - \sum_{v \in V^-(i)} \operatorname{sign}(P_{h2(v)} - P_i)\,\theta_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_i) + \\ + \sum_{v \in V^+_{\text{ДХ}}(i)} \left(q_v\right) - \sum_{v \in V^-_{\text{ПР}}(i)} \left(q_v\right) - \sum_{v \in V^-_{\text{ПРК}}(i)} \left(q_v\right) = B_i(P_i).\end{gathered} \tag{19}$$

Если $N_i(P_i, \overline{P}_{-i}) = 0$, то в (19) имеем $NB_i(\overline{P}_i, \overline{P}_{-i}) = 0$. Учитывая, что $NB_i(P_i) \geq 0$, получаем, что $\overline{P}_i$ — оптимальное решение (19).

Справедливо в обратную сторону: если в задаче (19) $\overline{P}_i$ оптимальное решение и $NB_i(\overline{P}_i, \overline{P}_{-i}) = 0$, то $N_i(\overline{P}_i, \overline{P}_{-i}) = 0$, т.е. выполняется (18).

Используя термин Адама Смита, задачу (19) будем называть задачей «невидимой руки рынка» узла $i \in E_w^2 \cup E_w^3$. Если в некотором узле $i \in E_w^2 \cup E_w^3$ значение P_i оказалось таким, что $NB_i(P_i, \overline{P}_{-i}) \geq 0$, то «невидимая рука рынка» осуществляет переход узла к такой цене P_i', при которой $NB_i(P_i', \overline{P}_{-i})$ будет минимальной, т.е. стремиться к состоянию равновесия. Равновесие во всей сети будет соответствовать ценам P_i^*, $i \in E_w^2 \cup E_w^3$, при которых $NB_i(P_i^*, P_{-i}^*) = 0$, $i \in E_w^2 \cup E_w^3$, т.е. все узлы будут в состоянии равновесия. В ТГС такой подход является одним из подходов поузловой увязки сети.

Алгоритм «невидимой руки товарного рынка»

$i \in E_w^2 \cup E_w^3$. Организуем варьирование переменной P_i для минимизации функционала (19). Для каждого значения P_i выполняем:

1) $\forall v \in V^+(i)$ и значения P_i ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на основе решения задачи перекупщика (5);

2) $\forall v \in V^-(i)$ и значения P_i ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на основе решения задачи перекупщика (5);

3) $\forall v \in V^+_{\text{ПР}}(i)$ предприятия-продавца $j = h1(v) \in \text{ПР}$, ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на цену P_i на основе решения задачи (4) узла j при фиксированных P_{-i};

4) $\forall v \in V^-_{\text{ПР}}(i)$ предприятия-покупателя $j = h2(v) \in \text{ПР}$, ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на цену P_i на основе решения задачи (4) узла j при фиксированных P_{-i};

5) $\forall v \in V^-_{\text{ПРК}}(i)$ перекупщика-покупателя $u = h2(v) \in VV = \bigcup_{w \in W} V_w$, ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на цену P_i на основе решения задачи (4) узла j при фиксированных значениях P_{-i};

6) $\forall v \in V^-_{\text{ДХ}}(i)$ домашнего хозяйства $j = h2(v) \in \text{ДХ}$, ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на цену P_i на основе решения задачи (3);

7) ищем отклик экспортно-импортного сальдо $z_i = B_i^*(P_i, P_{-i})$ внешних субъектов узла i;

8) используя полученные в п. 1–6 значения q_v, а также значение z_i из узла i на основе зависимости (9), получаем значение функционала «руки рынка» $NB_i(P_i, \overline{P}_{-i})$.

Используя значение P_i и $NB_i(P_i, \overline{P}_{-i})$, отбраковываем заведомо неоптимальные решения.

Замечание 1. Нетрудно убедиться, что в описываемом алгоритме осуществляется минимизация функции одной переменной с вычислением только значений функции, поэтому в алгоритме можно использовать алгоритмы одномерной оптимизации порядка 0.

Замечание 2. Переход в состояние равновесия в одном узле может вывести из состояния равновесия другие узлы. В работе (Коваленко, 1986) приведены теоремы, в которых доказано, что если локальные однопродуктового рынка каждого узла стремятся к состоянию равновесия, то и вся система сходится к состоянию равновесия. Однако, как показывают оценки сходимости, переход всей системы в состояние равновесия может быть достаточно длительным процессом.

Замечание 3. Описываемая система представляет собой игру с состоянием равновесия по Нэшу. «Невидимые руки рынков» узлов $i \in E_w^2 \cup E_w^3$ являются субъектами этой игры. Функционалы (19) описывают критерии минимизации каждого субъекта игры и взаимовлияние между ними.

5.2. Условия баланса труда в виде экстремальной задачи

«Невидимая рука локального рынка труда». Пусть для вида труда $l \in L$, $i \in E_l^2 \cup E_l^3$. Узлы $i \in E_l^1$ не берем, так как для них переменная P_i — константа, на переменную z_i ограничений нет, она может принимать любые значения в соответствии с (15).

Будем считать, что для всех узлов товарных рынков и рынков труда $j \in E_l \setminus \{i\}$ значение цены P_j зафиксировано. Переменные P_j, $j \in E \setminus \{i\}$, дальше будем обозначать P_{-i}. В условиях совершенной конкуренции все субъекты рынка i являются ценополучателями, поэтому для всех $v \in V_l$ справедливо (11), где $\Delta_v = (P(h2(v)) - P(h1(v)))$, или $q_v = \text{sign}(P_{h2(v)} - P_{h1(v)})\,\theta_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_{h1(v)})$. Для $v \in V^+(i)$ имеем $h2(v) = i$, для $v \in V^-(i)$ — $h1(v) = i$, поэтому (13) можно записать

$$\sum_{v \in V^+(i)} \text{sign}(P_i - P_{h1(v)})\,\theta_v^{-1}(P_i - P_{h1(v)}) - \sum_{v \in V^-(i)} \text{sign}(P_{h2(v)} - P_i)\,\theta_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_i) + \\ + \sum_{v \in V^+_{ДХ}(i)} \left(q_v\right) - \sum_{v \in V^-_{ПР}(i)} \left(q_v\right) - \sum_{v \in V^-_{ПРК}(i)} \left(q_v\right) = B_i(P_i). \tag{20}$$

Для $v \in V^+_{ДХ(i)}$ функция q_v является откликом на переменную P_i при фиксированных P_{-i} для задач домашних хозяйств ДХ(j), $j = h1(v)$. Для $v \in V^-_{ПР(i)}$ функция q_v будет откликом на переменную P_i при фиксированных P_{-i} в задаче предприятий ПР(j) для $j = h2(v)$. Для $v \in V^-_{ПРК(i)}$ функция q_v — отклик на переменную P_i при фиксированных P_{-i} в задаче перекупщика ПРК(u) для $u = h2(v)$. (Напомним, что перекупщикам в системе обозначений соответствуют дуги графа, поэтому конец дуги v ссылается на дугу u.) Таким образом, (20) можно записать

$$\sum_{v \in V^+(i)} \text{sgn}(P_i - P_{h1(v)})\,\theta_v^{-1}(P_i - P_{h1(v)}) - \sum_{v \in V^-(i)} \text{sgn}(P_{h2(v)} - P_i)\,\theta_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_i) + \\ + \sum_{v \in V^+_{ДХ}(i)} \left(q_v\right) - \sum_{v \in V^-_{ПР}(i)} \left(q_v\right) - \sum_{v \in V^-_{ПРК}(i)} \left(q_v\right) - B_i(P_i) = 0. \tag{21}$$

Левую часть равенства (21) будем называть небалансом

$$\sum_{v \in V^+(i)} \text{sign}(P_i - P_{h1(v)})\,\theta_v^{-1}(P_i - P_{h1(v)}) - \sum_{v \in V^-(i)} \text{sign}(P_{h2(v)} - P_i)\,\theta_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_i) + \\ + \sum_{v \in V^+_{ДХ}(i)} \left(q_v\right) - \sum_{v \in V^-_{ПР}(i)} \left(q_v\right) - \sum_{v \in V^-_{ПРК}(i)} \left(q_v\right) - B_i(P_i) = 0$$

в узле i при цене P_i и фиксированных ценах P_{-i} и обозначим $N_i(P_i, P_{-i})$, тогда в состоянии узлового равновесия должно выполняться

$$N_i(P_i, P_{-i}) = 0. \tag{22}$$

Обозначив $NB_i(P_i, P_{-i}) = \left(N_i(P_i, P_{-i})\right)^2$, задачу поиска состояния равновесия в (22) запишем как

$$P_i^* = \underset{P_i \text{ при } P_{-i} = \text{const}}{\arg\min}\, NB_i(P_i, P_{-i}). \tag{23}$$

Используя термин Адама Смита, задачу (23) будем называть задачей «невидимой руки рынка» узла $i \in E_l^2 \cup E_l^3$. Если для всех $i \in E_l^2 \cup E_l^3$ (т.е. и для товарных рынков тоже) значения P_i^* таковы, что $NB_i(P_i^*, P_{-i}^{\ *}) = 0$, то получившееся значения дают состояния равновесия совершенной конкуренции для экономической системы в целом.

6. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УЗЛОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ НЕСОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ В МОДЕЛИ ОБЩЕГО РАВНОВЕСИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Переход от совершенной конкуренции к несовершенной заключается в смене лидерства «руки рынка» на лидерство одного из субъектов рынка. В зависимости от этого мы получаем ту или иную структуру локального рынка, и, соответственно, структуру всей системы. Поиск состояния равновесия всей системы, как и выше, заключается в поузловой увязке всех узловых задач. Приведем модели узловых задач для некоторых структур несовершенной конкуренции и алгоритмы поиска состояния равновесия в них.

6.1. Алгоритм лидерства производителя — продавца на товарном рынке. Узловая монополия

Пусть в узле i производитель $j = h1(u)$, $u \in V_{\text{ПР}}{}^{+}(i)$, занял положение лидера. Мы получаем монополию производителя j в узле i. В условиях монополии производителя j в узле i рыночная власть переходит к нему. Он имеет возможность выбора значения стратегической переменной P_i, варьируя ее с целью максимизации своей прибыли. При этом отметим, что, как и раньше, в узле должно быть выполнено условие продуктового баланса. Так как $i = h2(u)$, задача лидера примет вид

$$\pi_j = P_i\, q_u + \sum_{v\in V_W^-(j)\setminus\{u\}} P_{h2(v)} q_v - \left(\sum_{v\in V_W^+(j)} P_{h1(v)} q_v + \sum_{v\in V_L^+(j)} P_{h1(v)} q_v + \left\langle P\, r_j, r_j \right\rangle \right) \to \max_{\Theta_{\text{ПР}}(j)} \qquad (24)$$

при ограничении

$$\left(q_u, (q_v)_{v\in V_W^-(j)\setminus\{u\}} \right) \in F^i \left((q_v)_{v\in V_W^+(i)}, (q_v)_{V_L^+(i)}, r_i \right), \quad r_j \le_j \bar{r}_j.$$

Искомые переменные $\Theta_{\text{ПР}}(j) = (P_i, q_u, (q_v)_{v\in V_W^-(j)\setminus\{u\}}, (q_v)_{v\in V_W^+(j)}, (q_v)_{v\in V_L^+(j)}, r_j)$, по которым берется максимум, разобьем на 3 части: P_i, q_u, и $((q_v)_{v\in V_W^-(j)\setminus\{u\}}; (q_v)_{v\in V_W^+(j)}; (q_v)_{v\in V_L^+(j)}; r_j))$. В соответствии с этим строим трехуровневую схему максимизации π_i.

1 уровень. Организация перебора по переменной P_i.

2 уровень. Для каждого фиксированного P_i решаем:

а) $\forall k = h1(v)$, $v \in V^+(i)\setminus\{u\}$ задачи ПР(k), получаем объем продаж q_v предприятиями — совершенными конкурентами;

б) $\forall k = h2(v)$, $v \in V^-(i)$ задачи ПР(k), получаем объем q_v потребления ресурсов с рынка i;

в) $\forall\, v \in V^+(i)$ задачи перекупщиков ПРК(v), получаем объем ввоза q_v;

г) $\forall v \in V^-(i)$ задачи перекупщиков ПРК(v), получаем объем вывоза q_v;

д) $\forall v \in V_{\text{ДХ}}^-(i)$, $k = h2(v)$, по задаче домашнего хозяйства ДХ(k) находим объем потребления q_v с рынка i;

е) рассчитываем $z_i(P_i)$.

3 уровень.

А. На основе продуктового баланса (9) находим объем производства, который должен выпускать монополист:

$$q_u = -\left(\sum_{v\in V^+(i)} q_v - \sum_{v\in V^-(i)} q_v \right) - \left(\sum_{v\in V_{\text{ПР}}^+(i)\setminus\{u\}} q_v - \sum_{v\in V_{\text{ПР}}^-(i)} q_v \right) - \left(-\sum_{v\in V_{\text{ПРК}}^-(i)} q_v \right) - \left(-\sum_{v\in V_{\text{ДХ}}^-(i)} q_v \right) + z_i.$$

Б. При заданном P_i и полученном q_u решаем задачу (24), в результате получаем π_j. В этом случае максимум берется по переменным $(q_v)_{v\in V_W^-(j)\setminus\{u\}}, (q_v)_{v\in V_W^+(j)}, (q_v)_{v\in V_L^+(j)}, r_j$.

Как и выше, мы не уточняем, каким образом осуществляется вариация по переменной P_i, для этого может быть применена вариация любого метода одномерной оптимизации 0-порядка. Также не уточняем методы решения задач второго уровня. Это можно делать любым из методов условной оптимизации. Так как каждая из этих задач может в качестве начального приближения брать решение от предыдущей итерации, то интересным является метод возвращающих направлений, модифицирующий метод возможных направлений Зонтендейка (Zoutendijk, 1960)

6.2. Алгоритм лидерства домашнего хозяйства в узле. Узловая монопсония

Для того чтобы получить модель монопсонии в узле, следует лидерство предприятия заменить на лидерство домашнего хозяйства. Место задачи (24) займет задача (2).

6.3. Алгоритм лидерства перекупщика, инцидентного локальному рынку. Узловая монополия перекупщика

Рассмотрим случай, когда на рынке узла i перекупщик $u \in V^+(i)$, $i = h2(u)$, является лидером. (Случай $u \in V^-(i)$ аналогичен.) Как и ранее, организуем варьирование переменной P_i для максимизации функционала задачи перекупщика (5) при $u \in V^+(i)$.

Для каждого значения P_i выполняем:

1) $\forall v \in V^+(i) \setminus u$ и значения P_i, ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на основе решения задачи перекупщика (5);

2) $\forall v \in V^{-}(i)$ и значения P_i, ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на основе решения задачи перекупщика (5);

3) $\forall v \in V^{+}_{ПР}(i)$ предприятия-продавца $j = h1(v) \in ПР$, ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на цену P_i на основе решения задачи (4) узла j при фиксированных P_{-i};

4) $\forall v \in V^{-}_{ПР}(i)$ предприятияпокупателя $j = h2(v) \in ПР$, ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на цену P_i на основе решения задачи (4) узла j при фиксированных P_{-i};

5) $\forall v \in V^{-}_{ПРК}(i)$ перекупщикапокупателя $u = h2(v) \in VV = \bigcup_{w \in W} V_w$, ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на цену P_i на основе решения задачи (4) узла j при фиксированных значениях P_{-i};

6) $\forall v \in V^{-}_{ДХ}(i)$ домашнего хозяйства $j = h2(v) \in ДХ$, ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на цену P_i на основе решения задачи (3);

7) ищем отклик — экспортно-импортное сальдо $z_i = B^{*}_i(P_i, P_{-i})$ внешних субъектов узла i;

8) используя полученные в п. 1–6 значения q_v, а также значение z_i из п. 7 на основе зависимости (9), получаем значение функционала задачи перекупщика (5) при $u \in V^{+}(i)$;

9) используя значение P_i и значение функционала задачи перекупщика (5) при $u \in V^{+}(i)$, отбраковываем заведомо неоптимальные решения.

Замечания 1 и 2 справедливы и для приведенного алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как отмечено в обзоре (Коваленко, 2001, с. 92–106), модели общего равновесия имеют широкое применение в прикладных экономических исследованиях пространственно рассредоточенных систем благодаря тому, что они позволяют количественно оценивать взаимосвязи между различными подсистемами экономической системы, а также воздействие различных факторов. Но как отмечено в (Изотов, 2014, с. 138–167), что «несмотря на многочисленные попытки, не удалось найти сколько-нибудь общие и естественные условия, обеспечивающие единственность и устойчивость равновесия». Предложенные модели фактически развивают и уточняют модели Эрроу–Дебре, и позволяют ответить на вопросы, поставленные в (Изотов, 2014, с. 138–167). В реальной экономике, как функции полезности, так и производственные функции, используемые для описания, могут быть линейными. Изменение цен в узлах может приводить к скачкам в экстремальных задачах, описывающих поведение субъектов рынков, что, в свою очередь, приводит к нарушению равновесия всей системы. Для получения ответов на фундаментальные вопросы, поставленные в (Изотов, 2014, с. 138–167). целесообразно применение функций с постоянной эластичностью.

Для моделей рассредоточенного рынка однородного продукта совершенной конкуренции (это пространственно рассредоточенный слой модели общего равновесия) сходимость к состоянию равновесия доказывается в (Коваленко, 2006). Но в доказательстве используются особые свойства функций спроса и предложения. Решение аналогов ТГС не вызывала сомнения единственности решения, но в ТГС при решении задач для описания движения потока используются квадратичные функции. Проблемы неустойчивости и неединственности возникают при учете режима течения потока (ламинарный, турбулентный и т.д.). При переходе «ламинарный → турбулентный» гидравлического удара не бывает — слишком малы пертурбации. Просто хаос в потоке скачком нарастает вместо порядка (ламинарный режим).

Данная работа содержит инструментарий для поиска состояния равновесия для случаев, когда в любом локальном рынке может быть монополист. В результате получаем огромное количество различных структур, начиная от совершенной конкуренции, каскадов монополий (Коваленко, 2006) до централизованного управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

Вальрас Л. (2000). Элементы чистой политической экономии. М.: Изограф. 448 с. [**Walras L.** (2000). *Elements of pure political economy*. Moscow: Izograf. 448 p. (in Russian).]

Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.Н. (2000). Микроэкономика. Под общей редакцией В.М. Гальперина. СПб.: Экономическая школа. [**Galperin V.M., Ignatyev S.M., Morgunov V.N.** (2000). Microeconomics. Under the general editorship V.M. Galperin. Saint Petersburg: Ekonomicheskaja shkola (in Russian).]

Изотов Д.А. (2014). Эмпирические модели общего экономического равновесия // *Пространственная экономика*. № 3. С. 138–167. [**Izotov D.A.** (2014). Empirical models of general economic equilibrium. *Spatial Economics,* 3, 138–167 (in Russian).]

Коваленко А.Г. (2001). Математические модели межотраслевого баланса в условиях рассредоточенного рынка // *Экономика и математические методы*. Т. 37. № 2. С. 92–106. [**Kovalenko A.G.** (2001). Mathematical models of interbranch balance in a dispersed market. *Economics and Mathematical Methods*, 37, 2, 92–106 (in Russian).]

Коваленко А.Г. (2006). Развитие математических моделей и методов теории гидравлических сетей и их применение для моделирования рассредоточенного рынка. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18. РГБ ОД, 71:06–1/237. Москва. 307 с. [**Kovalenko A.G.** (2006). *Development of mathematical models and methods of the theory of hydraulic networks and their application for modeling a dispersed market*. Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences: 05.13.18. RSL DD. Moscow (in Russian).]

Коваленко А.Г. (2012). К вопросу о взаимосвязи децентрализованного многопродуктового пространственно-рассредоточенного рынка и централизованного управления этой экономической системой // *Журнал экономической теории. Секция экономики*. № 3. С. 148–154. [**Kovalenko A.G.** (2012). On the question of the relationship between a decentralized multi-product spatially dispersed market and the centralized management of this economic system. *Journal of Economic Theory. Series "Economics",* 3, 148–154 (Russian).]

Меренков А.П., Хасилев В.Я. (1985). Теория гидравлических цепей. М.: Наука. 278 с. [**Merenkov A.P., Khasilev V.Ya.** (1985). *Theory of hydraulic circuits*. Moscow: Nauka. 278 p. (in Russian).]

Никайдо Х. (1972). Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир. 514 с. [**Nikaido H.** (1972). *Convex structures and mathematical economics*. Moscow: Mir. 514 p. (in Russian).]

Полтерович В.М. (1998). Кризис экономической теории // *Экономическая наука современной России*. № 1. С. 46–66. [**Polterovich V.M.** (1998). Crisis of economic theory. *Economics of Contemporary Russia*, 1, 46–66 (in Russian).]

Тироль Ж. (1996) Рынки и рыночная власть: Теория организации промышленности. СПб.: Экономическая школа 745 с. [**Tyrol J.** (1996). *Markets and market power: The theory of industrial organization*. St. Petersburg: Ekonomicheskaya Shkola Publishers. 745 p. (in Russian).]

Leontief W. (1985). *Essays in economics: Theories, theorizing, facts, and policies*. New Brunswick, Oxford: Transaction books, Cop. First published in New York: Oxford University Press, 1966.

Mathematical modeling of a multi-product dispersed market in the system of the world economy

A.G. Kovalenko,
Federal public autonomous educational institution of the higher education "Samara National Research University under the name of the academician S.P. Korolev", Samara; Russia; e-mail: alexey.gavrilovich.kovalenko@rambler.ru

A.V. Zlotov,
Federal Research Center "Informatics and Control" RAS; Moscow, Russia; e-mail: Zlot_a@mail.ru

Received 02.12.2021

Abstract. Mathematical models are built that is the development of the Walras model of the economy, both centralized and decentralized spatially dispersed economic system with the interactions of subjects of perfect and imperfect competition. The novelty of this model is determined by the introduction into the model of market entities: households, with a description of their functioning using utility functions, these households consume resources for their existence — various types of goods and produce various types of labor to obtain goods; multi-product enterprises that buy various types of commodity and labor resources; resellers who distribute products between local markets and carry out the movement of various types of labor along with the transport network from households to enterprises. When searching for an equilibrium state, the tasks of market subjects in extreme formulations are used. By organizing various types of interactions between subjects in commodity markets, markets of both perfect and imperfect competition are built. Numerical methods for the analysis of the described models have been developed. Numerical methods for finding the equilibrium state of the considered models are based on vector optimization methods.

Keywords: Arrow–Debré model, imperfect and perfect competition, households, enterprises, resellers, network problems, theory of hydraulic systems, search for equilibrium states.

JEL Classification: C02.

For reference: **Kovalenko A.G., Zlotov A.V.** (2022). Mathematical modeling of a multi-product dispersed market in the system of the world economy. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 102–114. DOI: 10.31857/S042473880021698-6