
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Оптимизация портфеля облигаций федерального займа и сделок РЕПО

© 2022 г. В.М. Добровольский, Д.Ю. Голембиовский

В.М. Добровольский,

МГУ им М.В. Ломоносова, Москва; e-mail: VladimirDobrovolskyMSU@gmail.com

Д.Ю. Голембиовский,

МГУ им М.В. Ломоносова, Москва; e-mail: golemb@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 23.01.2022

Аннотация. В рамках рассматриваемой модели инвестор может совершать сделки по покупке и продаже облигаций федерального займа (ОФЗ), а также сделки прямого и обратного РЕПО под залог ОФЗ. Сделки заключаются с целью размещения свободной ликвидности и получения процентного дохода. Статья посвящена задаче построения оптимального портфеля сделок. В работе рассматриваются генерация сценариев изменения цен ОФЗ, математическая постановка задачи оптимизации, оценка ее размерности в зависимости от числа активов и сценариев, а также численные эксперименты на исторических данных и построение эффективной границы доходности и риска портфеля (efficient portfolio frontier). Генерация сценариев изменений цен ОФЗ реализована с помощью исторического моделирования параметрической кривой бескупонной доходности. Критерием оптимизации задачи формирования портфеля выбрана мера риска — условная стоимость под риском (conditional value at risk, CVAR). При этом соблюдаются ограничения на среднюю доходность и самофинансирование портфеля. Предложен метод ребалансировки портфеля без дополнительных инвестиций, целью которого является минимизация риска при заданной доходности. Численные эксперименты проводились на основе ликвидных ОФЗ, торговавшихся на Московской бирже в 2014–2020 гг. Для соответствия модели реальным условиям торговли были учтены комиссии за проведение сделок, дисконт РЕПО, бид, аск (bid, ask) спрэд котировок ОФЗ, объемы торгов. Полученные при численном моделировании результаты показали, что использование торговой стратегии на основе решения поставленной задачи в среднем приносит более высокий доход по сравнению с вложениями в отдельные облигации при сопоставимом риске инвестиций. Данный эффект наблюдается при достаточно высоких требованиях к средней доходности портфеля.

Ключевые слова: оптимизация инвестиционного портфеля, облигации, G-кривая, РЕПО, задача линейного программирования, эффективная граница портфеля, генерация сценариев цен облигаций, короткая позиция, торговая стратегия.

Классификация JEL: C61.

Для цитирования: Добровольский В.М., Голембиовский Д.Ю. (2022). Оптимизация портфеля облигаций федерального займа и сделок РЕПО // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 3. С. 129–141. DOI: 10.31857/S042473880018212-2

1. ВВЕДЕНИЕ

Значительная часть портфеля ценных бумаг финансовых организаций России состоит из облигаций, в том числе из облигаций федерального займа (ОФЗ). Для управления ликвидностью финансовые организации также часто прибегают к сделкам РЕПО — краткосрочному кредитованию под залог ценных бумаг. Привлечение недостающей ликвидности происходит через сделки прямого РЕПО (организация привлекает кредит, передавая контрагенту ценные бумаги, например ОФЗ, и получает их обратно по окончании срока кредита). Размещение ОФЗ в прямое РЕПО также позволяет создать финансовый рычаг, т.е. осуществить покупку облигаций на заемные средства. Размещение излишней ликвидности может быть произведено через сделки обратного РЕПО (организация выдает кредит, получая в залог ОФЗ, и обязуется вернуть их по окончании срока кредита). Продажа ОФЗ, являющихся залогом сделки обратного РЕПО, обязывает участника рынка, заключившего сделки (далее — Инвестор), купить на рынке эти облигации до окончания сделки. До осуществления покупки у Инвестора формируется *короткая позиция* в облигациях. ОФЗ являются наиболее ликвидными инструментами с фиксированным доходом на российском фондовом рынке. Риск дефолта ОФЗ традиционно оценивается как незначительный. Однако цены этих облигаций меняются в зависимости

от политики Банка России, рыночной конъюнктуры и прочих факторов. В связи с этим управление портфелем ОФЗ и сделок РЕПО является актуальной и важной задачей торгового подразделения и казначейства финансовой организации. Мотивом написания данной статьи стала потребность в современном механизме оптимизации данного портфеля, применимом на российском рынке.

Теория портфеля активов впервые была сформулирована Гарри Марковицем (Markowitz, 1952). На основе статистических оценок математического ожидания, дисперсии и ковариационной матрицы активов, входящих в портфель, выбиралось оптимальное соотношение активов. В задаче оптимизации минимизировалась дисперсия портфеля (как мера риска) при заданном ограничении на среднюю доходность. За прошедшие годы эта теория получила существенное развитие.

Неофициальным стандартом на сегодняшний день является использование в качестве меры риска условной стоимости под риском (conditional value at risk, CVAR). Н. Бусай и Д. Росен в (Busay, Rosen, 1999), а также Ф. Андерсон и С. Урясьев в (Andersson et al., 1999) использовали CVAR для оценки и оптимизации кредитного риска. В статьях (Embrechts, Resnick, Samorodnitsky, 1999; Embrechts, Kluppelberg, Mikosch, 1997) CVAR применяется в актуарных задачах. В отличие от дисперсии или, например, стоимости под риском (value at risk, VaR), данная мера риска является когерентной. Свойства когерентной меры риска сформулированы в (Artzner et al., 1999). Там же показано, что господствующая на тот момент мера VAR несубаддитивна, из-за чего не может считаться когерентной. Когерентность CVAR была доказана в статье (Rockafellar, Uryasev, 2002), и было показано, что задачу минимизации CVAR при ограничении на среднюю доходность на основе конечного множества сценариев потерь можно свести к задаче линейного программирования.

Для решения задачи необходимо генерировать сценарии, учитывающие взаимосвязанное поведение цен облигаций. Традиционным подходом к расчету цен облигаций является дисконтирование соответствующих денежных потоков по срочной структуре процентных ставок (кривая бескупонных доходностей, КБД). Моделирование КБД является предметом масштабных исследований. В частности, Ч. Нельсон и А. Сигель в (Nelson, Siegel, 1987) предложили параметрическую модель кривой Нельсона–Сигеля (КБД). Она представляет собой функцию от пяти параметров (первый параметр — срочность процентной ставки, остальные четыре — параметры кривой, определяющие ее форму). В 2017 г. Московская биржа (МБ) представила актуальную на текущий момент «Методику определения кривой бескупонной доходности государственных облигаций (ОФЗ)»¹. Данную кривую называют G-кривой, она является параметрической кривой Нельсона–Сигеля с добавлением корректирующих коэффициентов. К пяти параметрам классической кривой Нельсона–Сигеля добавлены еще девять. Это — корректирующие коэффициенты, уточняющие форму кривой на различных отрезках срочности.

В статье предложен подход к построению оптимального портфеля в соответствии с критерием оптимизации CVAR при ограничении на среднюю доходность для конечного числа сценариев изменения G-кривой. В отличие от таких мер риска, как VaR или дисперсия, CVAR позволяет учесть тяжелые хвосты в распределении доходностей (CVAR корректно учитывает ситуации, когда распределение не является нормальным). Построение сценариев в работе осуществляется методом исторического моделирования G-кривой (см. разд. 3). Данный подход удобен при работе с ОФЗ на российском рынке по ряду причин. Во-первых, при формировании сценариев участвуют только параметры G-кривой, что позволяет генерировать сценарии для облигаций с недостаточной историей торгов. Во-вторых, размерность сценариев не зависит от числа различных облигаций в портфеле, а только от числа параметров G-кривой. В-третьих, параметры G-кривой регулярно публикуются Московской биржей, благодаря чему необходимость в самостоятельном расчете параметров кривой отпадает.

2. ОПИСАНИЕ ТОРГОВОЙ СТРАТЕГИИ

Торговая стратегия, оптимизации которой посвящена статья, разрабатывалась на основе правил проведения торгов на МБ. Однако ввиду единообразия правил на различных биржах, допускающих заключение сделок по покупке/продаже облигаций, а также сделок РЕПО, данная торговая стратегия может быть адаптирована для применения и на других площадках.

¹ ПАО Московская биржа: «Методика определения кривой бескупонной доходности государственных облигаций» (<https://fs.moex.com/files/14299/24888>).

Будем считать, что Инвестор в дату построения инвестиционного портфеля t имеет возможность купить или продать облигации, а также заключить сделки РЕПО с различными выпусками ОФЗ. Будем обозначать выпуски облигаций индексом i , который может принимать значения от 1 до N . Далее более подробно описаны правила и условия заключения сделок.

Покупка/продажа ОФЗ. Сделки покупки/продажи облигаций осуществляются в режиме основных торгов « $T+1$ »². В данной статье подразумевается, что для ребалансировки портфеля сделки заключаются в конце торговой сессии. Подобная историческая статистика доступна в различных торговых системах (например, Bloomberg, Reuters, Cbonds).

В рамках данного режима торгов сделки осуществляются через центрального контрагента (ЦК), которым выступает Московская биржа. Торговая заявка содержит параметры: 1) цена — минимальная/максимальная цена, по которой участник рынка готов продать/купить облигацию; 2) объем — число облигаций, по которым участник рынка готов заключить сделку; 3) направление сделки — покупка или продажа.

В качестве цены покупки для целей исследования берется последняя цена ask . Для облигации с индексом i в момент времени t такую цену будем обозначать как $P_{i,ask}^t$. В качестве цены продажи — последняя цена bid . Такую цену будем обозначать $P_{i,bid}^t$.

Объем покупки/продажи каждой облигации определяется решением оптимизационной задачи. Объем покупки облигаций с индексом i будем обозначать как x_i^{buy} , объем продажи — x_i^{sell} . Чтобы учитывать возможности рынка удовлетворять заявки, в модели реализованы ограничения на максимальный суммарный объем сделок по каждому выпуску облигаций.

Цена, на основе которой рассчитывается стоимость портфеля, определяется как цена последней сделки в торговой сессии. Использование данной цены при оценке стоимости портфеля на балансе также является распространенной рыночной практикой. Для облигации с индексом i в момент времени t такую цену будем обозначать как $P_{i,last}^t$.

При покупке/продаже облигаций вместе с выплатой стоимости облигации, определяемой в результате торгов, участники рынка выплачивают также накопленный купонный доход (НКД, AI — accrued interest). Для облигации с индексом i в момент времени t НКД будем обозначать как AI_i^t .

Сделки РЕПО. Сделки прямого/обратного РЕПО заключаются в режиме безадресных сделок с ЦК³. В рамках описываемой торговой стратегии параметры сделки включают:

- 1) срок сделки РЕПО (Δt) — сделки РЕПО заключаются срочностью семь дней;
- 2) код ценной бумаги, выступающей в качестве обеспечения, — сделки РЕПО заключаются под залог ОФЗ;
- 3) сумма РЕПО — сумма кредита, выдаваемого в рамках сделки РЕПО. Для сделок прямого РЕПО сумму РЕПО будем обозначать как y_i^{direct} , для сделок обратного РЕПО — $y_i^{reverse}$;
- 4) дисконт РЕПО (d , %) — разница между стоимостью ценных бумаг, выступающих в качестве обеспечения, и суммой кредита. Дисконт вводится с целью снижения риска неполного покрытия кредита залогом в случае снижения его стоимости. В режиме безадресных сделок параметр устанавливается МБ;
- 5) число облигаций — число ценных бумаг, выступающих в качестве обеспечения в рамках сделки РЕПО (для прямого РЕПО — x_i^{direct} , для обратного — $x_i^{reverse}$);
- 6) расчетная цена облигации — стоимость одной ценной бумаги, являющейся обеспечением в сделке РЕПО. В режиме безадресных сделок расчетная цена определяется клиринговой организацией (национальный клиринговый центр, НКЦ). Ввиду отсутствия доступа к расчетным ценам, определяемым НКЦ, а также ввиду сравнительно небольшого (по сравнению, например, с акциями) разброса цен на ОФЗ внутри дня для численных экспериментов в качестве расчетной цены облигации используется цена последней сделки $P_{i,last}^t$;
- 7) ставка РЕПО — ставка по кредиту, выраженная в процентах годовых. Ввиду большого числа спецификаций сделок РЕПО и нерегулярных сделок по каждой спецификации на Московской бирже в рамках данной работы было введено допущение о том, что ставка РЕПО по всем сделкам

² См. <https://www.nationalclearingcentre.ru/catalog/020415/9374.html>

³ См. <https://www.moex.com/ru/markets/money/repo/>

недельной срочности определяется как значение индекса $MOEXREPO1WE^4$. Данный индекс рассчитывается Московской биржей в соответствии с «Методикой расчета индикаторов ставки РЕПО с ЦК». Далее будем обозначать ставку РЕПО как r_t . Предполагается, что ставка одинакова для сделок прямого и обратного РЕПО.

Сделка прямого РЕПО происходит следующим образом: контрагент 1 (заемщик) передает ОФЗ с индексом i в количестве x_i^{direct} контрагенту 2 (кредитор). Контрагент 2 перечисляет заемщику денежные средства в объеме $y_i^{direct} = (P_{i,last}^t + AI_i^t)(1-d)$. Через Δt дней заемщик выплачивает кредитору $y_i^{direct} (1+r\Delta t/365)$. Кредитор возвращает заемщику облигации, а также купоны, выплаченные в период удержания ОФЗ. Сделка обратного РЕПО является зеркальной по отношению к сделке прямого РЕПО, т.е. участник рынка, совершающий сделку обратного РЕПО, выступает контрагентом по отношению к участнику, заключающему сделку прямого РЕПО.

Порядок осуществления сделок РЕПО на Московской бирже описан в «Правилах проведения торгов на Московской бирже»⁵.

Ограничение на самофинансирование. В рамках рассматриваемой задачи условие самофинансирования портфеля означает, что средств и облигаций, имеющихся у инвестора до начала ребалансировки, должно быть достаточно для построения нового портфеля. Допускается продажа имеющихся облигаций (x_i^0), а также облигаций, полученных в рамках сделок обратного РЕПО. Аналогично, допускается использование имеющихся денежных средств (x_{money}^0), а также заемных средств, привлеченных в рамках сделки прямого РЕПО.

Подход, описанный в данной статье, может быть реализован организацией, имеющей непосредственный доступ к торгам на Московской бирже, так как в этом случае достаточность средств и ценных бумаг на счете проверяется во время клиринга в конце торговой сессии (т.е. уже после всех операций). При торговле через брокера достаточность средств/ценных бумаг проверяется в момент заключения сделки. Случай, при котором торговая стратегия учитывает достаточность средств при каждой операции, в рамках данной статьи не рассматривается.

Требование самофинансирования можно формализовать следующими неравенствами.

1. Положительный баланс средств:

$$x_{money}^1 = x_{money}^0 + \sum_{i=1}^N (y_i^{sell} - y_i^{buy} + y_i^{direct} - y_i^{reverse}) \geq 0, \quad (1)$$

где x_{money}^1 — количество средств на балансе после ребалансировки портфеля; $y_i^{sell} = x_i^{sell} (P_{i,bid}^t + AI_i^t)$ — сумма, полученная от продажи x_i^{sell} облигаций с индексом i ; $y_i^{buy} = x_i^{buy} (P_{i,ask}^t + AI_i^t)$ — сумма, затраченная при покупке x_i^{buy} облигаций с индексом i .

2. Положительный баланс ценных бумаг:

$$x_i^1 = x_i^0 + x_i^{buy} - x_i^{sell} + x_i^{reverse} - x_i^{direct} \geq 0, \quad i=1, \dots, N, \quad (2)$$

где x_i^1 — число облигаций с индексом i после ребалансировки портфеля.

Определение финансового результата. В момент времени $t + \Delta t$ цена *bid* облигации с индексом i составляет $P_{i,bid}^{t+\Delta t}$ руб.; цена *ask* — $P_{i,ask}^{t+\Delta t}$; цена, по которой осуществляется расчет стоимости позиции, составляет $P_{i,last}^{t+\Delta t}$; накопленный купонный доход (НКД) равен $AI_i^{t+\Delta t}$.

Финансовый результат Инвестора формируется из нескольких составляющих:

1) полученные проценты по кредиту в рамках обратного РЕПО минус уплаченные проценты по кредиту в рамках прямого РЕПО;

2) изменение НКД облигаций, входящих в портфель, а также выплата купонов по ним;

3) уплата комиссий за биржевые сделки;

4) переоценка чистой стоимости облигаций, входящих в портфель.

При известной структуре портфеля, фактором неопределенности в финансовом результате Инвестора является только переоценка чистой стоимости облигаций.

⁴ См. ПАО Московская биржа: «Методика расчета индикаторов ставки РЕПО с ЦК» (<https://fs.moex.com/files/8804/34345>).

⁵ ПАО Московская биржа: «Правила проведения торгов на фондовом рынке, рынке депозитов и рынке кредитов ПАО «Московская Биржа ММВБ-РТС»», Часть III. Секция рынка РЕПО (<https://fs.moex.com/files/17020/35136>).

3. ГЕНЕРАЦИЯ СЦЕНАРИЕВ ЦЕН ОФЗ

3.1. G-кривая

G-кривая представляет собой параметрическую срочную структуру процентных ставок, описывающую функциональную зависимость процентной ставки бескупонной облигации от ее срочности:

$$r(T, \beta) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \tau (1 - e^{-T/\tau}) / T - \beta_2 e^{-T/\tau} + \sum_{i=1}^9 g_i e^{(T-a_i)^2/b_i^2},$$

где T — срочность ставки (лет); $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau, g_1, \dots, g_9)$ — набор параметров, динамически определяемых МБ; a_i, b_i — набор фиксированных параметров, определяемых по правилу:

$$a_1 = 0, a_2 = 0,6, a_{j+1} = a_j + a_2 k^{j-1}, j = 2, \dots, 8; b_1 = a_2, b_{j+1} = b_j k, j = 1, \dots, 8; k = 1,6.$$

В соответствии с методологией МБ определения КБД государственных облигаций⁶ G-кривая описывает срочную структуру ставок непрерывно начисляемых процентов.

3.2. Форвардная кривая

В рамках данной работы предполагается, что базовые ожидания участников рынка уже заложены в текущую срочную структуру процентных ставок. Чтобы учесть ожидания рынка на момент ребалансировки, в качестве точечного прогноза используется форвардная G-кривая:

$$f(T, \beta, \Delta t) = \left\{ r\left(T + \frac{\Delta t}{365}, \beta\right) \left(T + \frac{\Delta t}{365}\right) - r(\Delta t, \beta) \frac{\Delta t}{365} \right\} / T.$$

Подробно форвардные ставки описываются, например, в (Hull, 2009).

3.3. Исторические отклонения от форвардной кривой

Обозначим вектор β параметров G-кривой в некоторый исторический момент Θ как β_Θ . В этот момент КБД можно представить как функцию $r(T, \beta_\Theta)$. Форвардная КБД на срок Δt определялась как $f(T, \beta_\Theta, \Delta t)$. Предполагается, что данная КБД является точечным прогнозом КБД на момент времени $\Theta + \Delta t$. Однако в действительности в момент времени $\Theta + \Delta t$ вектор β параметров G-кривой составит $\beta_{\Theta+\Delta t}$, а соответствующая данным параметрам КБД — $r(T, \beta_{\Theta+\Delta t})$. В общем случае $r(T, \beta_{\Theta+\Delta t}) \neq f(T, \beta_\Theta, \Delta t)$. Разность между реализовавшейся на момент времени $\Theta + \Delta t$ процентной ставкой и форвардной ставкой на момент времени Θ для каждой фиксированной срочности T можно представить как функцию $\Delta r(T, \Theta, \Delta t) = r(T, \beta_{\Theta+\Delta t}) - f(T, \beta_\Theta, \Delta t)$.

3.4. Сценарии КБД

На исторических данных возьмем N_{scen} последовательных отрезков времени длиной Δt дней. Проиндексируем отрезки индексом s . Для каждого интервала рассчитаем функцию $\Delta r_s = \Delta r(T, \Theta_s, \Delta t)$, где Θ_s — начало отрезка с индексом s .

Сценарий КБД определяется как точечный прогноз (форвардная КБД), скорректированный на отклонение Δr_s :

$$r_s(T, \Delta t, \beta_t) = f(T, \Delta t, \beta_t) + \Delta r_s, s = 1, \dots, N_{scen},$$

где $r_s(t, \Delta t, \beta_t)$ — сценарная КБД; β_t — вектор β параметров G-кривой на дату ребалансировки портфеля.

Далее рассмотрим пример исторического моделирования сценариев G-кривой. Пусть дата, в которую осуществляется моделирование, будет 31.07.2018. Возможные сценарии КБД формируются на 07.08.2018. Ошибки прогноза берутся как разности значений форвардной G-кривой, построенной 22.09.2016 на день 29.09.2016, и значений фактической G-кривой 29.09.2016 (сценарий № 1). В сценарии № 2 ошибки представляют собой разности форвардной кривой, построенной 21.10.2016 на дату 28.10.2016, и фактической кривой 28.10.2016.

Приведенные исторические отклонения от прогноза прибавляются к форвардной кривой на дату 07.08.2018. Таким образом, получается столько сценариев, сколько имеется исторических отклонений КБД от форвардной кривой (в рассматриваемом примере — два сценария). Форвардная кривая на 07.08.2018, а также КБД, соответствующие сценариям № 1 и № 2, и G-кривая на 07.08.2018 представлены на рис. 1.

⁶ ПАО Московская биржа: «Методика определения кривой бескупонной доходности государственных облигаций» (<https://fs.moex.com/files/14299/24888>).

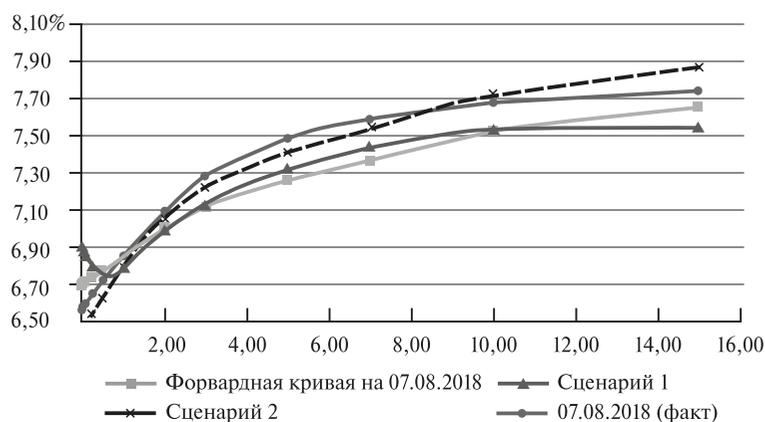


Рис. 1. Прогноз, исторические сценарии и факт КБД

3.5. Приведенная стоимость облигации в различных сценариях изменения КБД

Для каждой облигации в портфеле с индексом i известен будущий поток платежей CF_{ij} , где индекс j равен порядковому номеру предстоящего платежа по облигации в дату t_j дней. Всего по облигации с индексом i предусмотрено N_i купонных выплат. В соответствии с методом дисконтирования денежных потоков приведенная стоимость ОФЗ с индексом i в дату ребалансировки портфеля определяется по формуле $PV_i^t = \sum_{j=1}^{N_i} CF_{ij} e^{-r(T_j, \beta_t) T_j}$, где $T_j = (t_j - t) / 365$.

Сценарная приведенная стоимость — это приведенная стоимость облигации, срок до выплаты всех купонов которой уменьшился на Δt , а дисконтирование этих купонов осуществляется в соответствии со сценарием изменения КБД:

$$PV_i^s = \sum_{j: t_j > t}^{N_i} CF_{ij} \exp \left\{ -r_s \left(T_j - \frac{t}{365}, t, \beta_t \right) \left(T_j - \frac{t}{365} \right) \right\}.$$

3.6. Сценарии цены облигации

Так как G-кривая представляет собой модель оценки КБД, приведенная стоимость, полученная путем дисконтирования денежных потоков облигации при помощи G-кривой, является аппроксимацией рыночной цены ОФЗ + НКД (полная цена). Разность между приведенной стоимостью и рыночной ценой ОФЗ + НКД назовем *ошибкой аппроксимации*. Для облигации с индексом i обозначим данную ошибку как $\varepsilon_i^t = (P_{i, last}^t + AI_i^t) - PV_i^t$. Цена облигации в сценарии s определяется в этом сценарии как приведенная стоимость, скорректированная на ошибку аппроксимации, а также очищенная от НКД:

$$P_{i, last}^s = PV_i^s + \varepsilon_i^t - AI_i^{t+\Delta t}. \quad (3)$$

3.7. Описание и анализ задачи оптимизации

В статье (Rockafellar, Uryasev, 2000) авторы показали: когда совместная функция распределения потерь активов портфеля задана конечным набором векторов u_s , $S = 1, \dots, N_{scen}$ с соответствующими вероятностями p_s , задача оптимизации портфеля по критерию минимума CVAR может быть представлена в виде задачи линейного программирования

$$\min_{x, \beta, y^+} \beta + (1 - \alpha)^{-1} \sum_{s=1}^{N_{scen}} p_s y_s^+ \quad (4)$$

при ограничениях

$$y_s^+ \geq 0, \quad (5)$$

$$x^T u_s + \beta + y_s^+ + \Delta \Pi_s^0 \geq 0, \quad s = 1, \dots, N_{scen}, \quad (6)$$

$$-x^T \bar{u} - \Delta \bar{\Pi}^0 \geq \Delta W, \quad (7)$$

$$-x^T LI \leq \bar{LI}, \quad (8)$$

где x — вектор вложений в активы портфеля (в количестве ценных бумаг); β — уровень потерь по портфелю, который не будет превышен с вероятностью уровня значимости α (VaR); y^+ — вектор

вспомогательных переменных задачи, состоящий из y_s^+ ; u_s — потери активов портфеля, соответствующие сценарию s ; $\Delta\Pi_s^0$ — потери портфеля, состоящего из начальных вложений, соответствующие сценарию s ; \bar{u} — средние потери активов портфеля; $\Delta\Pi^0$ — средние потери портфеля, состоящего из начальных вложений; ΔW — минимальный средний доход, требуемый от портфеля, LI — матрица преобразования вида $-x^T LI = (x_i^{buy} + x_i^{sell} + x_i^{direct} + x_i^{reverse})_i$, суммирующая число ценных бумаг каждого выпуска, участвующих в ребалансировке; \bar{LI} — вектор ограничений на максимальное число ценных бумаг каждого выпуска, участвующих в ребалансировке (ограничение на объем сделок с каждой ОФЗ).

Под потерями в данной задаче подразумевается размер убытка Инвестора в денежном выражении. Если портфель приносит прибыль, потери будут принимать отрицательные значения.

Оптимизация портфеля осуществляется с помощью подбора оптимального числа облигаций для покупки/продажи, а также передачи/получения в рамках сделок РЕПО. В таком случае вектор x оптимизационных переменных для задачи (4)–(8) представляется в виде $x = (x_1^{buy}, x_1^{sell}, x_1^{direct}, x_1^{reverse}, x_1^1, \dots, x_N^{buy}, x_N^{sell}, x_N^{direct}, x_N^{reverse}, x_N^1)$.

Всем историческим сценариям G-кривой придается одинаковая, обратно пропорциональная числу исторических сценариев: $p_s = 1/N_{scen}$, $s = 1, \dots, N_{scen}$. Для сценария с индексом s цена облигации с индексом i определяется по формуле (3). Сценарное изменение стоимости портфеля без учета начальных вложений:

$$\Delta\Pi_s = \sum_{i=1}^N (P_{i,mid}^s - P_{i,mid}^t) (x_i^{buy} - x_i^{sell}). \tag{9}$$

Функция потерь u_s из (6) для сценария s — это величина, противоположная финансовому результату

$$x^T u_s = - \left(\frac{\Delta t}{365} rCredit + \Delta\Pi_s + \theta\Pi - Fee \right), \quad s = 1, \dots, N_{scen}, \tag{10}$$

где $\theta\Pi = \sum_{i=1}^N (AI_i^{t+\Delta t} - AI_i^t + \sum_{j:t_j < \Delta t} CF_{ij}) (x_i^{buy} - x_i^{sell})$ — увеличение НКД и выплата купона за период сделки РЕПО; $Fee = c \sum_{i=1}^N (P_{i,bid}^t x_i^{sell} + P_{i,ask}^t x_i^{buy})$ — уплата комиссий за покупку и продажу ценных бумаг; c — ставка комиссии.

Часть портфеля, которая соответствует начальным вложениям, не зависит от выбора значений переменных x , однако потери этой части портфеля все равно зависят от сценария изменения цен. Потери для этой составляющей портфеля определяются по формуле:

$$\Delta\Pi_s^0 = - \sum_{i=1}^N (P_{i,last}^s + AI_i^{t+\Delta t} - P_{i,last}^t - AI_i^t) x_i^0, \tag{11}$$

$$\Delta\Pi^0 = \sum_{s=1}^{N_{scen}} p_s \Delta\Pi_s^0.$$

Минимальный доход ΔW из ограничения (7) может быть представлен как

$$\Delta W = Y_{min} (\Delta t / 365) \Pi^0, \tag{12}$$

где $\Pi^0 = x_{money}^0 + \sum_{i=1}^N (P_{i,last}^t + AI_i^t)$ — стоимость портфеля до ребалансировки; Y_{min} — требуемая минимальная средняя доходность, выраженная в процентах годовых.

Таким образом, задача оптимизации портфеля ОФЗ и сделок РЕПО представлена в виде задачи линейного программирования. Критерий оптимизации находится из формулы (4) с равными вероятностями, ограничения — из неравенств (5)–(8). Размерность вектора оптимизационных переменных зависит от числа облигаций в портфеле N , а также от числа сценариев N_{scen} ; $(x, \beta^+, \beta^-, y^+) \in R^{N+2+N_{scen}}$. Число ограничений зависит только от числа сценариев. Матрица ограничений A имеет размерность $\dim(A) = (N_{scen} + 1, N + 2 + N_{scen})$.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Эффективность предложенного подхода оценивалась с помощью моделирования торговой стратегии на исторических данных. Тестирование осуществлялось на историческом периоде 05.07.2017 — 19.11.2019; дата начала этого периода — T_{start} ; дата окончания — T_{end} ; дата расчета — t . На первую расчетную дату T_{start} Инвестору доступны средства в размере 1 млрд руб.; вложений в ценные бумаги на начальную дату у него нет ($x_{money}^0 = 10^9$, $x_i^0 = 0$).

Моделирование торговой стратегии на исторических данных можно описать циклом действий на каждую расчетную дату внутри периода.

1. Выбираются ОФЗ, находившиеся в обращении в дату t , а также в течение недели после этой даты. Число различных выпусков таких облигаций будем обозначать $N_{[t, t+\Delta t]}$.

2. Для данных ОФЗ производится расчет сценариев изменения цен облигаций. Расчет осуществляется на исторических данных, предшествующих расчетной дате. Число сценариев — N_{scen} .

3. На основе сценариев изменения цен, а также исторических рыночных данных на дату t (цены облигаций, НКД, ставка РЕПО), осуществляется постановка задачи оптимизации. Задача решается методом внутренней точки (оптимизация реализована средствами языка Python, использовался солвер из библиотеки `scipy.optimize.linprog`). В результате решения переменная β в соответствии с теоремой Рокафеллара—Урясьева принимает значение VAR-портфеля, а целевая функция — CVAR-портфеля.

4. На дату $t + \Delta t$ по портфелю рассчитывался модельный финансовый результат.

5. Модельный финансовый результат прибавляется к средствам, доступным Инвестору ($x_{money}^0 := x_{money}^0 + PnL$). За расчетную дату принимается дата $t + \Delta t$.

6. Пока $t + \Delta t < T_{end}$, переходим к шагу 1.

В портфель были включены 20 выпусков ОФЗ с погашением от 11.05.2016 до 09.08.2034. Для построения сценариев использовались только исторические данные, известные на расчетную дату (т.е. более старые, чем расчетная дата). Горизонт планирования Δt равен 1 неделе. За выбранный период было произведено 119 ребалансировок портфеля. Дисконт РЕПО был определен на уровне 10%. Комиссия за сделку составляла 0,01%. Уровень значимости α из (4) был принят равным 95%. Ограничение на максимальный объем сделок с каждым выпуском определялось на основе недельного объема торгов. Для большинства выпусков данное ограничение составляло порядка 10 млн бумаг.

Процедура моделирования стоимости портфеля на исторических данных осуществлялась при различных ограничениях на минимальную среднюю доходность Y_{min} . В качестве ограничения использовались значения от 7 до 15% с шагом в 0,5%.

В табл. 1 описаны основные параметры ОФЗ, составляющих портфель. В табл. 2 представлены цена и НКД соответствующих ОФЗ на дату ребалансировки (26.08.2019), а также на дату расчета финансового результата портфеля (02.09.2019). Решением рассмотренной задачи стал портфель, состоящий из сделок, указанных в табл. 3.

Финансовый результат от данной стратегии за неделю составил 50,42 млн руб. (5,04%). Сюда вошли:

- прибыль от переоценки рыночной цены облигаций — 52,16 млн руб.;
- прибыль от получения/уплаты процентов по сделкам РЕПО — 21,55 млн руб.;

Таблица 1. Основные параметры ОФЗ, составляющих портфель

№	Код isin	Дата погашения	Ставка купона, %	Погашение основного долга
1	RU000A0JTG59	11.12.2019	6,78	В дату погашения
2	RU000A0JTYA5	27.05.2020	6,38	В дату погашения
3	RU000A0JREQ7	14.04.2021	7,58	В дату погашения
4	RU000A0JVW30	18.08.2021	7,48	В дату погашения
5	RU000A0D0G29	24.11.2021	3,24	По графику
6	RU000A0JXB41	07.12.2022	7,38	В дату погашения
7	RU000A0JTJL3	25.01.2023	6,98	В дату погашения
8	RU000A0JPLH5	19.07.2023	5,48	По графику
9	RU000A0JU4L3	16.08.2023	6,98	В дату погашения
10	RU000A0JWM07	16.09.2026	7,73	В дату погашения
11	RU000A0JS3W6	03.02.2027	8,13	В дату погашения
12	RU000A0JTK38	19.01.2028	7,03	В дату погашения
13	RU000A0JVW48	17.09.2031	8,48	В дату погашения
14	RU000A0GN9A7	06.02.2036	6,88	По графику

Таблица 2. Цены и НКД ОФЗ, руб. за одну ОФЗ

№	Название выпуска	Цена 26.08.2019	НКД 26.08.2019	Цена 02.09.2019	НКД 02.09.2019
1	Россия 2019–6,78%	1 000,23	13,97	1 000,32	15,28
2	Россия 2020–6,38%	997,40	15,60	998,37	16,83
3	Россия 2021–7,58%	1 013,30	27,28	1 015,20	28,74
4	Россия 2021–7,48%	1 013,15	1,03	1 016,00	2,47
5	Россия 2021–3,24% амортизируемая	996,21	15,85	998,90	17,10
6	Россия 2022–7,38%	1 017,70	15,21	1 020,50	16,63
7	Россия 2023–6,98%	1 006,31	4,99	1 010,17	6,33
8	Россия 2023–5,48% амортизируемая	962,09	4,97	967,90	6,03
9	Россия 2023–6,98%	1 007,50	0,96	1 012,50	2,30
10	Россия 2026–7,73%	1 039,15	32,27	1 049,17	33,76
11	Россия 2027–8,13%	1 064,03	2,68	1 071,03	4,24
12	Россия 2028–7,03%	1 000,13	5,02	1 009,51	6,37
13	Россия 2031–8,48%	1 107,98	33,76	1 115,05	35,39
14	Россия 2036–6,88% амортизируемая	943,50	2,27	961,00	3,59

– убыток от изменения НКД облигаций — (16,52) млн руб.;

– уплата комиссий — (6,7) млн руб.

Согласно теореме Рокафеллара–Урясьева параметр β равен уровню потерь, которые не будут превышены в $\alpha\%$ случаев. Значение $-\beta/x_0$ определяет VAR относительного финансового результата портфеля. Значение целевой функции соответствует оценке CVAR-портфеля.

Для того чтобы оценить качество модели, прогноз, полученный при решении оптимизационной задачи, сравнивался с реализацией, полученной в результате численного моделирования на

Таблица 3. Инвестиционная стратегия на 26.08.2019 в соответствии с решением оптимизационной задачи, ед. ценных бумаг

Ценная бумага	Купить	Продать	Передать в прямое РЕПО	Получить в обратное РЕПО	Открытая позиция
Денежные средства	–	–	–	–	–
Россия 2019–6,78%	–	5 001 150	–	5 001 150	–5 001 150
Россия 2020–6,38%	–	4 987 000	–	4 987 000	–4 987 000
Россия 2021–7,58%	–	5 066 500	–	5 066 500	–5 066 500
Россия 2021–7,48%	5 065 750	–	5 065 750	–	5 065 750
Россия 2021–3,24% амортизируемая	4 981 050	–	4 981 050	–	4 981 050
Россия 2022–7,38%	–	–	–	–	–
Россия 2023–6,98%	–	4 957 708	31 127	4 988 835	–4 957 708
Россия 2023–5,48% амортизируемая	–	4 810 450	–	4 810 450	–4 810 450
Россия 2023–6,98%	–	5 037 500	–	5 037 500	–5 037 500
Россия 2026–7,73%	5 195 750	–	5 195 750	–	5 195 750
Россия 2027–8,13%	5 320 150	–	5 320 150	–	5 320 150
Россия 2028–7,03%	–	4 899 092	34 385	4 933 477	–4 899 092
Россия 2031–8,48%	–	5 539 900	–	5 539 900	–5 539 900
Россия 2036–6,88% амортизируемая	6 133 301	–	3 301 699	–	6 133 301

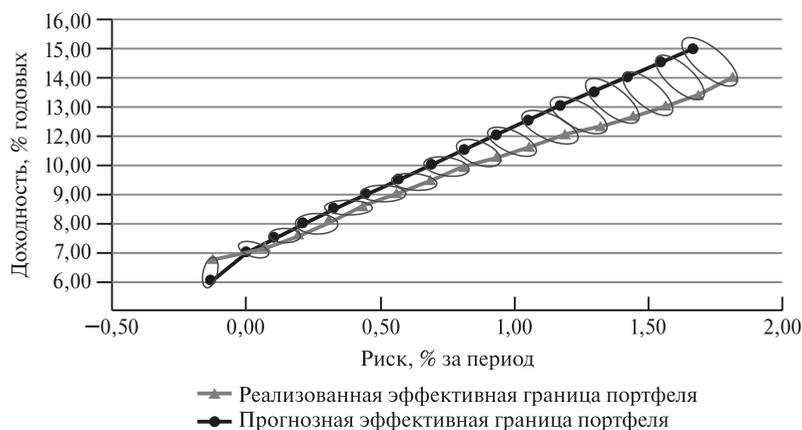


Рис. 2. Реализованная и прогнозная эффективные границы портфеля

истории. Прогнозной доходностью портфеля будем считать ограничение на минимальную доходность (параметр задачи). За реализованную доходность портфеля принимается средний относительный финансовый результат, определяемый в процентах годовых.

Прогнозом относительного риска для портфеля будем считать среднее по всем расчетным датам при одинаковом ограничении на минимальную среднюю доходность значение $-\beta/x_0$, полученное в результате решения оптимизационной задачи. В таком случае реализованным относительным риском будет квантиль модельного относительного финансового результата. Так как для решения оптимизационной задачи использовался 95%-ый уровень значимости, квантиль модельного относительного финансового результата брался на уровне 5%.

Бэк-тестирование CVAR не проводилось ввиду сравнительно небольшого объема статистики (для каждого уровня минимальной средней доходности — 119 наблюдений).

На рис. 2 представлены графики зависимости минимальной средней доходности (по оси Y) от прогнозного риска (по оси X , прогнозная эффективная граница портфеля), а также реализованной средней доходности (по оси Y) от реализованного риска (по оси X , реализованная эффективная граница портфеля). Для наглядности точки, определяющие реализованное и прогнозное соотношение риска и доходности, соответствующие одному и тому же портфелю, обведены овалом.

Чтобы оценить, насколько эффективно использовать данные торговые стратегии на рынке, был построен график зависимости реализованной средней доходности от реализованного риска для портфелей, состоящих из вложений в отдельные ОФЗ (далее — маргинальные портфели). Доходность и риск по маргинальным портфелям рассчитывались в соответствии с методикой, описанной ранее. На рис. 3 представлено сравнение реализованной эффективной границы портфеля и графика реализованной доходности к риску для маргинальных портфелей.

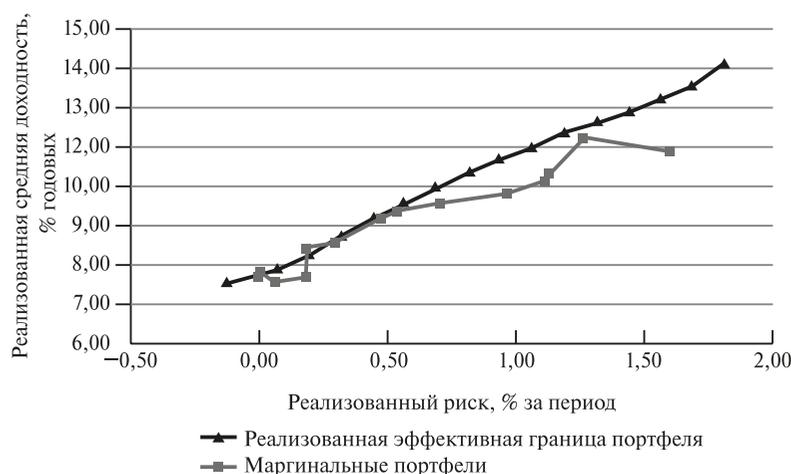


Рис. 3. Эффективная реализованная граница портфеля и характеристики маргинальных портфелей

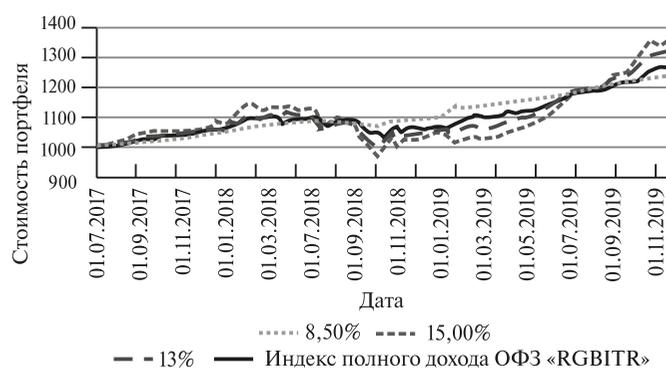


Рис. 4. Динамика стоимости портфелей с различными ограничениями на минимальную среднюю доходность в сравнении с индексом ОФЗ, млн руб.

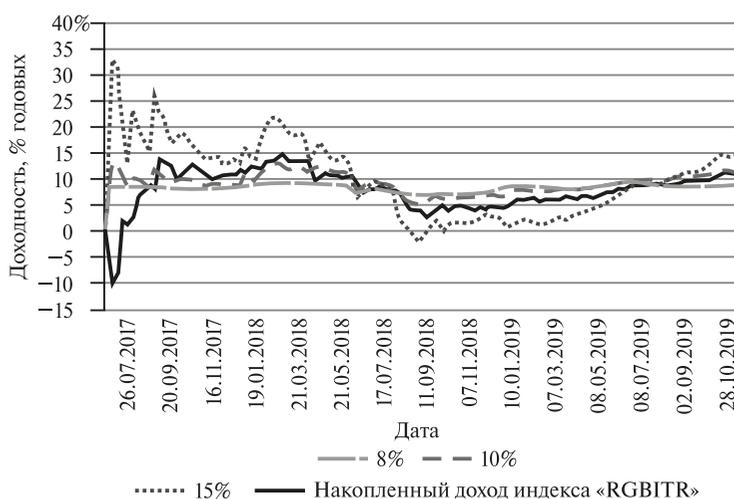


Рис. 5. Накопленный доход торговых стратегий с различными требованиями к минимальной средней доходности

Как видно, высокодоходные портфели в среднем приносят более высокий доход, чем вложения в облигации с сопоставимым уровнем риска. Кроме того, благодаря финансовому рычагу, реализованному через сделки РЕПО, можно построить портфель с более высокой средней доходностью, чем доходность любой ОФЗ, торгуемой на рынке.

На рис. 4 и 5 приведены графики стоимости и накопленной доходности портфелей при различных ограничениях на минимальную среднюю доходность в процентах годовых. Накопленная доходность определяется как средняя за период моделирования доходность, рассчитанная на шаг 4 цикла действий моделирования торговой стратегии. Графики сравнивались с графиком RGBITR — индекса Московской биржи (индекс полного дохода ОФЗ)⁷. Для наглядности значения индекса были масштабированы до уровня, соответствующего объему изначальных вложений в портфель, а также были учтены комиссии за ребалансировку.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была представлена торговая стратегия по управлению портфелем ОФЗ и сделок РЕПО. Стратегия учитывает такие особенности биржевой торговли на Московской бирже, как дисконт РЕПО, комиссии за проведение сделок, выплата накопленного купонного дохода, bid-ask-спрэд, клиринг и пр.

⁷ Подробнее про методику расчета и состав индекса описано на сайте МБ (<https://www.moex.com/ru/index/RGBITR>).

Для указанной торговой стратегии на основе модели Рокафеллара–Урясьева была сформулирована задача оптимизации CVAR-портфеля для конечного числа сценариев изменения цен облигаций. Для построения этих сценариев в работе был представлен метод генерации сценарных цен облигаций на основе исторических данных. Поставленная оптимизационная задача является задачей линейного программирования сравнительно невысокой размерности, что позволяет быстро решать ее на относительно слабых компьютерных системах.

Для различных вариантов ограничения на минимальную доходность портфеля было произведено моделирование торговой стратегии на историческом периоде протяженностью более двух лет. Результаты численного моделирования показали, что реализованная доходность портфеля оказалась несколько ниже, чем прогнозная, а реализованный риск портфеля — выше, чем прогнозный; соотношение доходность—риск торговой стратегии лучше, чем аналогичное соотношение для отдельных выпусков ОФЗ. Возможность создавать финансовый рычаг путем покупки облигаций на заемные средства или формировать короткие позиции через продажу облигаций, полученных в обратное РЕПО, позволила сформировать портфели с более высокой доходностью, чем у ОФЗ, торгуемых на рынке.

За рамками настоящей работы остался следующий ряд проблем:

— при моделировании сценариев G-кривой никак не учитывается возможное изменение ошибки аппроксимации G-кривой рыночной цены облигации;

— подход, описанный в данной статье, не учитывает проверку на достаточность средств при проведении каждой сделки и предполагает, что проверка достаточности будет осуществляться во время клиринга в конце торговой сессии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Andersson F., Mausser H., Rosen D. et al. (2001). Credit risk optimization with conditional Value-at-Risk criterion. *Math. Program.*, 89, 273–291.
- Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9, 3, 203–228.
- Bucay N., Rosen D. (1999). Credit risk of an international bond portfolio: A case study. *ALGO Res. Quart.*, 2, 241–282.
- Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T. (1997). *Modelling extremal events for insurance and finance*. New York: Springer.
- Embrechts P., Resnick S.I., Samorodnitsky G. (1999). Extreme value theory as a risk management tool. *North American Actuarial Journal*, 3, 2, 30–41.
- Hull J. (2017). *Futures, options and other derivatives*. 10 edition. London: Pearson.
- Markowitz H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7, 77–91.
- Nelson C.R., Siegel A.F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, 60, 4, 473–489.
- Rockafellar R.T., Uryasev S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2, 21–42.
- Rockafellar R.T., Uryasev S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26, 7, 1443–1471.

Optimization of portfolio of federal loan bonds and REPO trades

© 2022 V.M. Dobrovolskiy, D. Yu. Golembiovskiy

V.M. Dobrovolskiy,*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; e-mail: VladimirDobrovolskyMSU@gmail.com***D.Yu. Golembiovskiy,***Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; e-mail: golemb@cs.msu.ru*

Received 23.01.2022

Abstract. Within the framework of the considered model, the Investor can make transactions for buying and sailing of federal loan bonds (OFZ), as well as direct and reverse REPO deals secured by OFZ. Transactions are made for liquidity management and increasing interest income. This paper discusses the problem of constructing an optimal portfolio of such transactions. The paper considers the approach for the generation of scenarios for OFZ price changes, the mathematical formulation of the optimization problem, the assessment of its dimension depending on the number of assets and the number of scenarios, numerical experiments on historical data and the construction of an efficient portfolio frontier. The generation of scenarios for OFZ price changes is implemented using historical modeling of a parametric zero-coupon yield curve. The optimization problem criterion is the conditional value at risk (CVAR) risk measure. Constraints on the average return and self-financing of the portfolio are taken into account. As a result, the method of portfolio rebalancing without additional investment, the purpose of which is to minimize risk for a given profitability, is proposed. Numerical experiments are based on historical data on active traded OFZ in 2014–2020. The model is close to the real world: it takes into account commissions, repo discount, bid-ask spreads, trade volumes. Numerical results show that a trading strategy based on the introduced model is more profitable on average than investments in individual OFZ with comparable risk. Note that this effect is shown for strategies with high average profit constraints.

Keywords: investment portfolio optimization, treasury bonds, federal loan bonds, G-curve, REPO, linear programming problem, efficient portfolio frontier, bonds prices scenarios generation, short position, trade strategy.

JEL Classification: C61.

For reference: **Dobrovolskiy V.M., Golembiovskiy D.Yu.** (2022). Optimization of portfolio of federal loan bonds and REPO trades. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 129–141. DOI: 10.31857/S042473880018212-2