ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2022, том 58, № 4, с. 102–112

ПРОБЛЕМЫ ПРЕДПРИЯТИЙ

Методика оптимизации адаптивного управления выпуском продукции предприятия на основе динамической экономико-математической модели

А.Ф. Шориков,
Институт экономики УрО РАН, Екатеринбург; e-mail: afshorikov@mail.ru

Поступила в редакцию 13.03.2022

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-28-01868) «Разработка агент-ориентированной модели сетевого промышленного комплекса в условиях цифровой трансформации».

Аннотация. Статья посвящена применению динамических экономико-математических моделей управления производством продукции предприятия на основе использования принципа обратной связи. Приводится формирование дискретной управляемой динамической системы, описывающей процесс выпуска продукции производственным предприятием при наличии прогнозируемой функции спроса на продукцию. Фазовый вектор динамической системы описывает основные параметры производства продукции, а вектор управляющего воздействия (вектор управления) — интенсивность применения технологических способов производства продукции, имеющихся у субъекта управления. Предполагается, что в каждый период времени субъекту управления известна вектор-функция, описывающая объемы спроса на продукцию предприятия в последующие периоды времени, заданные геометрические ограничения на реализации фазового вектора, векторы управления и спроса. В качестве целевой функции рассматривается значение рассогласования объемов выпуска продукции предприятием относительно заданного прогнозируемого значения функции спроса в последующем периоде управления. На основе сформированной динамической системы в статье предлагается экономико-математическая модель исследуемой задачи оптимизации адаптивного управления выпуском продукции предприятия, включающая класс допустимых стратегий адаптивного управления и формулировку задачи. В работе предлагается методика решения сформулированной задачи оптимизации адаптивного управления выпуском продукции предприятия, которая реализуется в виде конечной последовательности одношаговых алгебраических операций над векторами конечномерного векторного пространства, конечного набора решений задач линейного и выпуклого математического программирования. Полученные результаты могут быть использованы при разработке интеллектуальных систем поддержки принятия управленческих решений для актуальных задач управления производством продукции на промышленных предприятиях.

Ключевые слова: экономико-математическое моделирование, динамические системы, оптимизация управления, стратегии управления, адаптивное управление, управление с обратной связью, производственное предприятие, выпуск продукции.

Классификация JEL: C02, C44, C61, D24.

Для цитирования: **Шориков А.Ф.** (2022). Методика оптимизации адаптивного управления выпуском продукции предприятия на основе динамической экономико-математической модели // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 4. С. 102–112. DOI: 10.31857/S042473880019197-5

ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена применению динамических экономико-математических моделей управления производством продукции предприятия с использованием принципа обратной связи. Приводится формирование дискретной управляемой динамической системы, описывающей процесс выпуска продукции производственным предприятием при наличии прогнозируемой функции спроса на продукцию. Фазовый вектор динамической системы определяет основные параметры производства продукции, а вектор управляющего воздействия (вектор управления) — интенсивность использования технологических способов производства продукции, имеющихся в распоряжении субъекта управления. Предполагается, что в каждый период субъекту управления известна вектор-функция объемов спроса на продукцию предприятия в последующие периоды времени, заданные геометрические ограничения на реализации фазового вектора, вектора управления и вектора спроса. В качестве целевой функции задачи рассматривается значение рассогласования объемов выпуска продукции относительно заданного прогнозируемого значения функции спроса в последующем периоде управления. Используя сформированную динамическую систему, в работе предлагается экономико-математическая модель исследуемой задачи оптимизации адаптивного управления выпуском продукции предприятия, включающая класс допустимых стратегий адаптивного управления и формулировку задачи.

В статье в рамках описываемой линейной дискретной управляемой динамической экономико-математической модели производства продукции предприятия с выпуклой целевой функцией в классе введенных допустимых стратегий управления формулируется задача оптимизации адаптивного управления выпуском продукции для выполнения предприятием договорных обязательств. Предлагается методика решения сформулированной задачи, которая реализуется в виде конечной последовательности одношаговых алгебраических операций над векторами конечномерного векторного пространства, выполнения алгебраических операций, преобразующих описание выпуклых многогранников-компактов, заданных набором своих вершин, в конечные системы алгебраических равенств и неравенств (и наоборот), а также конечного набора решений задач линейного и выпуклого математического программирования. Полученные результаты могут быть использованы при разработке автоматизированных и интеллектуальных систем поддержки принятия управленческих решений для решения актуальных задач управления производством продукции на промышленных предприятиях.

МЕТОДЫ И ПОДХОДЫ

При решении различных задач оптимизации управления производством продукции предприятия возникает необходимость моделировать динамику объектов с целью прогнозирования допустимых значений основных параметров, описывающих их состояние в конкретный период времени, а также управление процессами для достижения приемлемых или наилучших (оптимальных) значений выбранных критериев качества их реализации. Для функционирования производственного предприятия одной из основных задач является создание инструментария, позволяющего реализовать управление выпуском продукции в заданных прогнозируемых объемах и в определенный срок, т.е. способствовать эффективному выполнению договорных обязательств. Решение этой задачи требует наличия на предприятии информационной системы, позволяющей прогнозировать состояние основных параметров, характеризующих процессы производства продукции и управлять ими. При этом в реальных ситуациях производства возникают непредвиденные ситуации или реализуется негативное возмущение (см. рисунок), которые влияют на объемы производства, и система управления должна реагировать на них, т.е. включать обратную связь — использовать возможности адаптации к сложившимся условиям. Для этого необходимо иметь экономико-математические модели и методики, позволяющие оптимизировать адаптивное управление выпуском продукции при его заданных прогнозируемых объемах.

Вопросы оптимизации управления выпуском продукции предприятия активно исследуются в рамках различных подходов. В работе (Mrgineanu, Lixndroiu,2021) для этого используются модели линейного математического программирования. На базе данной методики разработан программный продукт для поддержки принятия управленческих решений и приведено его описание. В статье (Zhang et al., 2021) для управления медицинским предприятием и оптимизации корпоративной социальной ответственности формируется модель нелинейного математического

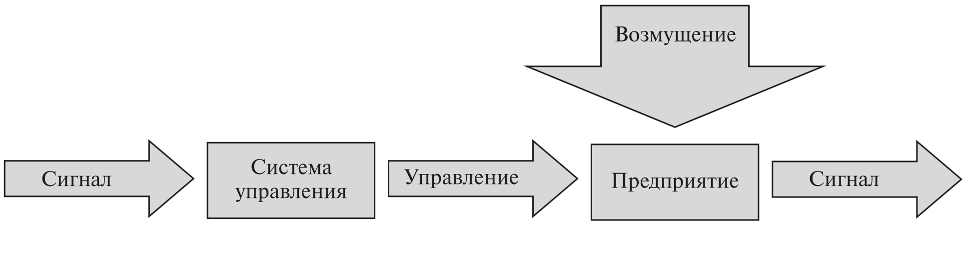

Рисунок. Общая схема системы управления предприятием программирования, которая линеаризуется для решения задачи. Для ускорения поиска оптимального решения авторы разработали итеративный эвристический алгоритм, позволяющий избегать повторения вычислительных операций. Представлено описание алгоритма и результаты проведенного вычислительного эксперимента, позволяющего искать приемлемое решение.

Задача многокритериальной оптимизации управления производственной деятельностью предприятия (выпуск керамических подшипников) рассматривается в работе (Szopa, Marczyk, 2011). Для поиска компромиссных решений авторы используют модель линейного математического программирования и анализируют различные допустимые варианты решений. В (Cheng, Xiao-Bing, 2013) для планирования производства и оптимизации управления при наличии векторной целевой функции авторы используют метод скаляризации векторной целевой функции, т.е. осуществляют редукцию исходной задачи к стандартной задаче линейного математического программирования и ведут поиск решения в среде MatLab.

Задача оптимизации затрат при производстве заданных объемов продукции рассматривалась в (Olanrele et al., 2014). Для ее решения применялись линейная многошаговая экономико-математическая модель и метод динамического программирования в модификации (Wagner, Whitin, 2004). В исследовании (David et al., 2012) описана дифференциальная модель динамической оптимизации планирования производства продукции с выпуклой целевой функцией, использующая производственную функцию Кобба–Дугласа и необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

В (Макаров и др., 2021) предложена дискретная динамическая модель цифрового двойника производственного предприятия (на примере завода по сборке телевизионной техники). В работе описывается подход, основанный на комбинированном применении методов дискретно-событийного и агентного имитационного моделирования. Авторы разработали концептуальную модель цифрового завода с программной реализацией в среде имитационного моделирования AnyLogic. Динамические экономико-математические модели управления различными социально-экономическими процессами представлены, например, в работе (Клейнер, Рыбачук,2017).

На основании приведенного краткого обзора типичных работ, примыкающих к тематике данного исследования, можно сделать следующие выводы.

1. В большинстве исследований оптимизации выпуска продукции производственного предприятия используются статические модели линейного математического программирования и симплекс-метод (с его модификациями) для численного решения задач.

2. В моделях нелинейного математического программирования для численного решения конкретных оптимизационных производственных задач предлагаются модификации методов линеаризации для редукции к задачам линейного математического программирования и градиентные или эвристические методы.

3. Обычно, решение динамических задач управления процессами выпуска продукции при наличии технико-экономических ограничений и переменном спросе основывается на использовании линейных или нелинейных, многошаговых или дифференциальных экономико-математических моделей, в рамках которых для поиска оптимальных или приемлемых решений применяются различные модификации методов динамического программирования, принципа максимума Понтрягина, агент-ориентированного моделирования и др.

В данной работе формируется линейная дискретная управляемая динамическая система, фазовый вектор которой описывает состояние основных параметров процесса производства продукции в конкретный период времени. Вектор управляющего воздействия (управления) характеризует интенсивности имеющихся технологических способов производства продукции, а вектор спроса — значения прогнозируемых объемов спроса на продукцию предприятия. Ограничения на фазовый вектор динамической системы, вектор управления и вектор спроса описывают имеющиеся технико-экономические условия процесса производства. В данной работе они являются геометрическими — в виде ограничивающих выпуклых многогранников-компактов в конечномерных (евклидовых) векторных пространствах. Целевая функция является выпуклой и оценивает рассогласование между допустимым состоянием фазового вектора динамической системы в конкретный период времени и прогнозируемым значением вектора спроса в последующий период времени. Используя результаты (Тюлюкин, Шориков, 1988; Tyulyukin, Shorikov, 1993; Шориков, 1997, 2006), в статье вводится специальный класс допустимых стратегий адаптивного управления производством продукции предприятия. Экономико-математическая модель включает формализацию многошаговой задачи оптимизации адаптивного управления производством продукции для выполнения предприятием договорных обязательств в рамках выбранного класса стратегий.

В работе описывается методика сформулированной задачи, которая основывается на использовании *общего рекуррентного алгебраического метода*, разработанного в (Тюлюкин, Шориков, 1988; Tyulyukin, Shorikov, 1993; Шориков, 1997) для построения областей достижимости (прогнозных множеств) линейных дискретных управляемых динамических систем. Согласно методике решение исходной задачи оптимизации сводится к реализации конечной рекуррентной последовательности одношаговых алгебраических операций над векторами конечномерного векторного пространства, выполнению алгебраических операций, преобразующих описание выпуклых многогранников-компактов, заданных в виде наборов их вершин, в конечные системы алгебраических уравнений и неравенств, и наоборот — операций двойственного описания выпуклых многогранников-компактов, реализации конечного набора решений задач линейного и выпуклого математического программирования, т.е. *выполнению только одношаговых операций, допускающих их алгоритмизацию.*

Данная работа примыкает к исследованиям (Olanrele et al., 2014; Макаров и др., 2021; Клейнер, Рыбачук, 2017; Aksyonov et al., 2015; Astolfi, 2006; Astroem, Wittenmark, 2008; Landau et al., 2011) и основывается на результатах работ (Тюлюкин, Шориков, 1988; Tyulyukin, Shorikov, 1993; Шориков, 1997, 2006; Bazaraa, Shetty, 1979; Черников, 1968).

ФОРМИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Опишем динамическую экономико-математическую модель процесса производства продукции на производственном предприятии, а также формализацию *задачи адаптивного управления выпуском продукции для оптимизации выполнения предприятием договорных обязательств*.

Пусть n — число основных параметров (i) производственного процесса производства продукции на предприятии (хранимых, промежуточных и выпускаемых продуктов, сырья, материалов и др.), $n \in \mathbf{N}$; $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел; j — способ производства продукции, $j \in \overline{1, p} = \{1, \ldots, p\}$; t — период времени, $t \in \overline{0, T-1} = \{0, \ldots, T-1\}$ ($T \in \mathbf{N}$; t — месяц, квартал, год); p — число технологических способов организации производства продукции на предприятии, $p \in \mathbf{N}$; $\mathbf{R}^k$ — k-мерное векторное пространство векторов-столбцов[1], $k \in \mathbf{N}$.

Каждый способ производства j продукции в период t характеризуется вектором $(b_{1j}(t), \ldots, b_{nj}(t))' \in \mathbf{R}^n$:

– если $b_{ij}(t) < 0$, то $b_{ij}(t)$ — объем затрат параметра i при способе j в период t;

– если $b_{ij}(t) > 0$, то $b_{ij}(t)$ — объем выпуска параметра i способом j в период t;

– если $b_{ij}(t) = 0$, то $b_{ij}(t)$ — отсутствие выпуска/затрат параметра i способом j в период t;

$u_j(t)$ — интенсивность использования способа j в период t, $u_j(t) \in \mathbf{R}^1$; $s_i(t)$ — величина спроса на продукцию i, выпускаемую в период t, $s_i(t) \in \mathbf{R}^1$.

Пусть $x_i(t+1)$ — количество продукции i, образовавшейся на складе предприятия к концу периода $(t+1)$ (запасы в период $(t+1)$), которое формируется из запасов в количестве $x_i(t)$ предыдущего периода времени t и образовавшихся излишков в этот период времени по формуле

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j=1}^{p} b_{ij}(t) u_j(t) - s_i(t), \tag{1}$$

или в векторной форме

$$x(t+1) = x(t) + B(t)u(t) - s(t), \; t \in \overline{0, T-1}, \tag{2}$$

где $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))'$ — вектор количества запасов продукции в период времени t, или фазовый вектор системы, $x(t) \in \mathbf{R}^n$; $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_p(t))'$ — вектор интенсивности использования технологий производства продукции на предприятии в период t, или вектор управляющего воздействия (управления) системы, $u(t) \in \mathbf{R}^p$; $s(t) = (s_1(t), \ldots, s_n(t))'$ — вектор количества спроса на продукцию предприятия в период t, $s(t) \in \mathbf{R}^n$; $B(t) = \left\| b_{ij}(t) \right\|_{\substack{i \in \overline{1,n} \\ j \in \overline{1,p}}}$ — технологическая матрица производства продукции на предприятии размерности $(n \times p)$.

[1] Для экономии места будем записывать их в строку.

Если в начале периода t $(t \in \overline{0,T-1})$ на складе имелись запасы продукции (хранимых, промежуточных и выпускаемых продуктов, сырья, материалов и др.) в количестве $x(t)$, то к концу этого периода для продажи и производства будет пригодна только часть, равная $A(t)x(t)$, где $A(t) = \|a_{ii}(t)\|_{i\in\overline{1,n}}$ — диагональная матрица размерности $(n \times n)$, характеризующая старение продукции за этот период. Тогда векторно-матричное рекуррентное уравнение (2) будет иметь вид

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) - s(t),\ x(0) = x_0,\ t \in \overline{0,T-1}, \tag{3}$$

где x_0 — заданное начальное значение фазового вектора, $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Предполагается, что в рассматриваемом процессе управления производством продукции предприятия для каждого периода t $(t \in \overline{0,T})$ значения фазового вектора $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))' \in \mathbf{R}^n$ должны удовлетворять заданному геометрическому ограничению:

$$x(t) \in \mathbf{X}^*(t) \subset \mathbf{R}^n, \tag{4}$$

где множество $\mathbf{X}^*(t) \neq \varnothing$ — выпуклый многогранник-компакт в пространстве $\mathbf{R}^n$, определяющий технико-экономические ограничения на основные параметры продукции предприятия. Он может описываться, например, в виде

$$\mathbf{X}^*(t) = \left\{x(t):\ x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))' \in \mathbf{R}^n, \forall i \in \overline{1,n}: 0 \le x_i(t) \le x_i^*(t)\right\},$$

где $\forall i \in \overline{1,n}: x_i^*(t) \in \mathbf{R}^1,\quad x_i^*(t) \ge 0.$

Предположим, что в рассматриваемом процессе управления для каждого периода времени t $(t \in \overline{0,T-1})$ значения вектора управления $u(t) \in \mathbf{R}^p$, которым распоряжается субъект управления (менеджер) P, должны удовлетворять заданному геометрическому ограничению

$$u(t) \in \mathbf{U}^*(t) \subset \mathbf{R}^p, \tag{5}$$

где множество $\mathbf{U}^*(t) \neq \varnothing$ — выпуклый многогранник-компакт в пространстве $\mathbf{R}^p$, определяющий технико-экономические ограничения на ресурсы управления производством продукции, т.е. ресурс управления, и описывается формулой

$$\mathbf{U}^*(t) = \left\{u(t):\ u(t) = (u_1(t), \ldots, u_p(t))' \in \mathbf{R}^p \quad \forall j \in \overline{1,p}: u_{j*}(t) \le u_j(t) \le u_j^*(t)\right\},$$

где $\forall j \in \overline{1,p}: u_{j*}(t) \in \mathbf{R}^1,\ u_j^*(t) \in \mathbf{R}^1,\ u_{j*}(t) \ge 0.$

Для каждого периода t $(t \in \overline{0,T})$ вектор спроса $s(t) \in \mathbf{R}^n$ должен удовлетворять ограничению

$$s(t) \in \mathbf{S}^*(t) \subset \mathbf{R}^n, \tag{6}$$

где $\mathbf{S}^*(t) \neq \varnothing$ — выпуклый многогранник-компакт в пространстве $\mathbf{R}^n$, который определяет множество допустимых значений вектора спроса, например вида:

$$\mathbf{S}^*(t) = \left\{s(t):\ s(t) = (s_1(t), \ldots, s_n(t))' \in \mathbf{R}^n \quad \forall i \in \overline{1,n}: s_{i*}(t) \le s_i(t) \le s_i^*(t)\right\},$$

где $\forall i \in \overline{1,n}: s_{i*}(t) \in \mathbf{R}^1,\quad s_i^*(t) \in \mathbf{R}^1,\quad s_{i*}(t) \ge 0.$

Опишем информационные возможности менеджера P в процессе оптимизации адаптивного управления выполнением договорных обязательств производственным предприятием на основе дискретной управляемой динамической системы (3)–(6).

Пусть на рассматриваемом промежутке времени $\overline{0,T}$ для любого $t \in \overline{0,T-1}$ $(T \in \mathbf{N})$, и промежутка времени $\overline{t,T} \subseteq \overline{0,T}$ в период t в процессе управления менеджером P измеряются и запоминаются следующие параметры: $x(t) = x_t$ — фазовый вектор системы (3) в период t $(x(0) = x_0)$; $s(t) = s_t$ — вектор количества спроса на продукцию предприятия в период t $(s(0) = s_0)$; $s_*(t+1)$ — вектор прогнозируемого количества спроса на продукцию предприятия в период времени $(t+1)$, где $s_*(t+1) \in \mathbf{S}^*(t+1)$. Предположим, что известны векторно-матричное рекуррентное уравнение (3), описывающее динамику модели объекта управления, и ограничения (4)–(6).

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Назовем набор $w(t) = \{t, x(t), s(t)\} \in \{0, \ldots, T\} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $w(0) = w_0 = \{0, x_0, s_0\}$, **$t$-позицией** дискретной управляемой динамической системы (3)–(6). Для каждого периода $t \in \overline{0,T}$ определим множество

$$\mathbf{W}(t) = \{t\} \times \mathbf{X}^*(t) \times \mathbf{S}^*(t),\ \mathbf{W}(0) = \mathbf{W}_0 = \left\{w(0) = w_0 : w_0 = \{0, x_0, s_0\} \in \{0\} \times \mathbf{X}^*(0) \times \mathbf{S}^*(0)\right\},$$

всех допустимых t-позиций системы.

Тогда $\forall t\ (t\in\overline{0,T-1})$ и допустимых вариантов реализации пар $(w(t),u(t))\in\mathbf{W}(t)\times\mathbf{U}^*(t)$, где $w(t)=\{t,x(t),s(t)\}\in\mathbf{W}(t)$, — t-позиция дискретной управляемой динамической системы (3)–(6), $w(0)=\{0,x(0),s(0)\}=\{0,x_0,s_0\}=w_0\in\mathbf{W}_0$; $u(t)$ — допустимое в этот период времени управление; $s_*(t+1)\in\mathbf{S}^*(t+1)$ — известный менеджеру P прогнозируемый вектор спроса, для определения качества рассматриваемого процесса оптимизации выполнения договорных обязательств производственным предприятием введем целевую функцию $\Phi_{\overline{t,t+1}}:\mathbf{W}(t)\times\mathbf{U}^*(t)\times\mathbf{S}^*(t+1)\to\mathbf{R}^1$, значения которой определяются по формуле

$$\begin{aligned}\Phi_{\overline{t,t+1}}(w(t),u(t),s_*(t+1))&=\mathbf{F}_{t+1}(\phi_{\overline{t,t+1}}(t+1;x(t),u(t),s(t)),s_*(t+1))=\\&=\mathbf{F}_{t+1}(x(t+1),s_*(t+1))=\|x(t+1)-s_*(t+1)\|_n,\end{aligned}\tag{7}$$

где $x(t+1)=\phi_{\overline{t,t+1}}(t+1;x(t),u(t),s(t))$ — фазовый вектор системы (3) в период времени $(t+1)$, $x(t+1)\in\mathbf{X}^*(t)$, соответствующий набору $(x(t),u(t),s(t))$; $\phi_{\overline{t,t+1}}:\mathbf{R}^n\times\mathbf{U}^*(t)\times\mathbf{S}^*(t)\to\mathbf{R}^n$— оператор правой части векторно-матричного рекуррентного уравнения (3), действующий на промежутке времени $\overline{t,t+1}$, который каждому набору $(x(t),u(t),s(t))\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{U}^*(t)\times\mathbf{S}^*(t)$ ставит в соответствие фазовый вектор $x(t+1)\in\mathbf{R}^n$, удовлетворяющий этому уравнению; $\mathbf{F}_{t+1}:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$ — выпуклый функционал, имеющий непрерывные частные производные по переменной x; $\|\cdot\|_k$ — Евклидова норма в векторном пространстве $\mathbf{R}^k$, $k\in\mathbf{N}$.

Целевая функция $\Phi_{\overline{t,t+1}}$ (формула (7)) оценивает расхождение фазового вектора системы $x(t+1)$ и прогнозируемого вектора спроса $s_*(t+1)$ на продукцию, которую необходимо произвести согласно договорными обязательствами, т.е. $\Phi_{\overline{t,t+1}}$ *оценивает качество выполнения договорных обязательств производственным предприятием* в конце промежутка времени $\overline{t,t+1}$. Фазовый вектор $x(t+1)$ определяет запасы предприятия в период $(t+1)$. В силу формул (1) и (2) в него входят объемы выпуска продукции в период t. Согласно уравнению (3) фазовый вектор $x(t+1)$ соответствует фактической реализации набора $(x(t),u(t),s(t))$, включающего выбор управляющего воздействия $u(t)$ менеджером P и фактическую реализацию спроса в объеме $s(t)$ в этот период времени. Прогнозируемый вектор спроса $s_*(t+1)$ предоставляется менеджеру P по ходу реализации процесса управления в период t. Следовательно, в процессе управления менеджер P выбирает свое управляющее воздействие $u(t)$, учитывающее фактические реализации запасов $x(t)$ и спроса $s(t)$, и имеет возможность регулировать объемы выпуска продукции предприятия в период t, ориентируясь на прогнозируемый объем спроса $s_*(t+1)$.

Отметим, что результат процесса управления с целевой функцией (7) зависит от качества прогнозирования значения вектора спроса $s_*(t+1)$. Тогда целью менеджера P на промежутке $\overline{t,t+1}$ является минимизация значения целевой функции $\Phi_{\overline{t,t+1}}$.

Допустимой стратегией адаптивного управления $\mathbf{U}_a$ менеджера Р для модели (3)–(7) на промежутке $\overline{0,T}$ будем называть отображение $\mathbf{U}_a$: $\mathbf{W}(t)\times\mathbf{S}^*(t+1)\to\mathbf{U}^*(t)$, — которое каждому периоду $t\ (t\in\overline{0,T-1})$ и паре возможной реализации $(w(t),s_*(t+1))\in\mathbf{W}(t)\times\mathbf{S}^*(t+1)$ ставит в соответствие множество $\mathbf{U}_a(w(t),s_*(t+1))\subseteq\mathbf{U}^*(t)$ допустимых управлений $u(t)\in\mathbf{U}^*(t)$ менеджера P, где $w(t)=\{t,x(t),s(t)\}\in\mathbf{W}(t)\ (w(0)=w_0\in\mathbf{W}_0)$ — t-позиция дискретной управляемой динамической системы (3)–(6); $x(t)\in\mathbf{X}^*(t)$ — фазовый вектор системы и $s(t)\in\mathbf{S}^*(t)$ — вектор спроса, допустимые в данный период t; $s_*(t+1)\in\mathbf{S}^*(t+1)$ — заданный прогнозируемый вектор спроса, отвечающий периоду $(t+1)$.

Обозначим через $\mathbf{U}_a^*$ множество всех допустимых стратегий адаптивного управления менеджера P для выполнения договорных обязательств предприятия на промежутке $\overline{0,T}$. Тогда можно сформулировать нелинейную многошаговую задачу оптимизации адаптивного управления выполнением договорных обязательств предприятия в рамках модели (3)–(7).

Задача. Для рассматриваемого промежутка времени $\overline{0,T}$ и дискретной управляемой динамической экономико-математической модели (3)–(7) требуется найти стратегию менеджера P для оптимального адаптивного управления выполнением договорных обязательств предприятия $\mathbf{U}_a^{(e)}=\mathbf{U}_a^{(e)}(w(t),s_*(t+1))\in\mathbf{U}_a^*$, $t\in\overline{0,T-1}$, где $w(t)=\{t,x(t),s(t)\}\in\mathbf{W}(t)$ — t-позиция дискретной управляемой динамической системы (3)–(6) $(w(0)=\{0,x(0),s(0)\}=\{0,x_0,s_0\}=w_0\in\mathbf{W}_0)$; $x(t)\in\mathbf{X}^*(t)$ — фазовый вектор системы и $s(t)\in\mathbf{S}^*(t)$ — вектор спроса, допустимые в данный период t; $s_*(t+1)\in\mathbf{S}^*(t+1)$ — заданный прогнозируемый вектор спроса в период $(t+1)$), который определяется следующим образом:

1) $\forall\left\{w(t)=\{t,x(t),s(t)\}\in\mathbf{W}(t)\wedge\mathbf{U}_a^{(e)}(w(t),\ s_*(t+1))\neq\varnothing\right\},t\in\overline{0,T-1}$, полагается $\mathbf{U}_a^{(e)}=\mathbf{U}_a^{(e)}(w(t),s_*(t+1))$, где множество $\mathbf{U}_a^{(e)}(w(t),s_*(t+1))$ определяется из решения оптимизационной задачи вида

$$\begin{gathered}\mathbf{U}_a^{(e)}(w(t),s_*(t+1))=\left\{u^{(e)}(t):u^{(e)}(t)\in\mathbf{U}^*(t),\quad\Phi^{(e)}_{\overline{t,t+1}}=\Phi_{\overline{t,t+1}}(w(t),u^{(e)}(t),s_*(t+1))=\right.\\=\min_{u(t)\in\mathbf{U}^*(t)}\Phi_{\overline{t,t+1}}(w(t),u(t),s_*(t+1))=\min_{u(t)\in\mathbf{U}^*(t)}\mathbf{F}_{t+1}(\phi_{\overline{t,t+1}}(t+1;x(t),u(t),s(t)),s_*(t+1))=\\=\mathbf{F}_{t+1}(\phi_{\overline{t,t+1}}(t+1;x(t),u^{(e)}(t),s(t)),s_*(t+1))=\mathbf{F}_{t+1}(x^{(e)}(t+1),s_*(t+1))=\\\left.=\left\|x^{(e)}(t+1)-s_*(t+1)\right\|_n=\mathbf{F}^{(e)}_{t+1}\right\}\neq\varnothing,\end{gathered}\tag{8}$$

где $x^{(e)}(t+1)=\phi_{\overline{t,t+1}}(t+1;x(t),u^{(e)}(t),s(t))$ — фазовый вектор системы в период $(t+1)$, соответствующий набору $(x(t),u^{(e)}(t),s(t))$, $x^{(e)}(t+1)\in\mathbf{X}^*(t)$;

2) $\forall\left\{w(t)=\{t,x(t),s(t)\}\in\mathbf{W}(t)\wedge\mathbf{U}_a^{(e)}(w(t),s_*(t+1))=\varnothing\right\}\vee w(t)=\{t,x(t),s(t)\}\notin\mathbf{W}(t)$, $t\in\overline{0,T-1}$, согласно (5), полагаем

$$\mathbf{U}_a^{(e)}=\mathbf{U}_a^{(e)}(w(t),s_*(t+1))=\mathbf{U}^*(t),\tag{9}$$

которая реализуется с помощью последовательности только одношаговых операций, допускающих их алгоритмизацию.

Набор $\left\{\Phi^{(e)}_{\overline{t,t+1}}\right\}_{t\in\overline{0,T-1}}$ образует множество оптимальных значений целевой функции, соответствующее оптимальной стратегии $\mathbf{U}_a^{(e)}\in\mathbf{U}_a^*$.

Пусть фазовая траектория $\underline{x_a^{(e)}}(\cdot)=\{x_a^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T}}$ динамической системы (3)–(6) порождена стратегией $\mathbf{U}_a^{(e)}\in\mathbf{U}_a^*$ на промежутке $\overline{0,T}$, которой соответствует реализация набора $(u_a^{(e)}(\cdot),s_a(\cdot))=$ $=(\{u_a^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}},\{s_a(t)\}_{t\in\overline{0,T}})$, т.е. $\forall t\in\overline{0,T-1}$: $x_a^{(e)}(t+1)=\phi_{\overline{t,t+1}}(t+1;x_a^{(e)}(t),u_a^{(e)}(t),s_a(t))$, $x_a^{(e)}(0)=x_0$, $s_a(0)=s_0$. Тогда траекторию $x_a^{(e)}(\cdot)=\{x_a^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T}}$ будем называть *оптимальной фазовой траекторией*, при реализации стратегии оптимального адаптивного управления $\mathbf{U}_a^{(e)}\in\mathbf{U}_a^*$.

Согласно результатам, изложенным в работе (Шориков, 1997), решение данной оптимизационной задачи существует.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Отметим, что сформулированная оптимизационная задача не может быть решена перебором допустимых вариантов управляющего воздействия, так как в каждый период $t\in\overline{0,T-1}$ множество $\mathbf{U}^*(t)$ допустимых значений управления $u(t)$ в ограничении (5) является бесконечным.

Для любого многогранника-компакта X (с конечным числом вершин) в пространстве $\mathbf{R}^k$ $(k\in\mathbf{N})$ через V-rep$\{X\}$ обозначим множество его вершин, а через H-rep$\{X\}$ — множество решений соответствующей системы линейных алгебраических уравнений и неравенств $\Xi\{X\}$, которое совпадает с X.

Множества V-rep$\{X\}$ и H-rep$\{X\}$ описывают множество X с помощью двойственных операций V-rep и H-rep.

Методику решения рассматриваемой многошаговой оптимизационной задачи можно представить в виде реализации последовательности одношаговых действий.

1. Полагаем $t:=0$.

2. Для периода t формируем исходные данные, описывающие экономико-математическую модель (3)–(7), а именно:

2.1) конечное множество V-rep$\{\mathbf{X}^*(t)\}$ всех вершин, однозначно описывающих многогранник-компакт $\mathbf{X}^*(t)$ в период t;

2.2) конечная система линейных алгебраических уравнений и неравенств $\Xi\{\mathbf{X}^*(t)\}$, множество решений которой H-rep$\{\mathbf{X}^*(t)\}=\mathbf{X}^*(t)$ однозначно описывает многогранник-компакт $\mathbf{X}^*(t)$ в период t;

2.3) конечное множество V-rep$\{\mathbf{X}^*(t+1)\}$ всех вершин, однозначно описывающих многогранник-компакт $\mathbf{X}^*(t+1)$ в период $(t+1)$;

2.4) конечная система линейных алгебраических уравнений и неравенств $\Xi\left\{\mathbf{X}^*(t+1)\right\}$, множество решений которой H-rep$\left\{\mathbf{X}^*(t+1)\right\} = \mathbf{X}^*(t+1)$ однозначно описывает многогранник-компакт $\mathbf{X}^*(t+1)$ в период $(t+1)$;

2.5) конечное множество V-rep$\left\{\mathbf{U}^*(t)\right\}$ всех вершин, описывающих многогранник-компакт $\mathbf{U}^*(t)$ в период t;

2.6) конечное множество V-rep$\left\{\mathbf{S}^*(t+1)\right\}$ всех вершин, однозначно описывающих многогранник-компакт $\mathbf{S}^*(t+1)$ в период $(t+1)$;

2.7) конечная система линейных алгебраических уравнений и неравенств $\Xi\left\{\mathbf{S}^*(t+1)\right\}$, множество решений которой H-rep$\left\{\mathbf{S}^*(t+1)\right\} = \mathbf{S}^*(t+1)$ однозначно описывает многогранник-компакт $\mathbf{S}^*(t+1)$ в период $(t+1)$;

2.8) измеряем реализацию фазового вектора системы $x(t) = x_t$. Если $x_t \in \mathbf{X}^*(t)$ (т.е. этот вектор является решением системы $\Xi\left\{\mathbf{X}^*(t)\right\}$), переходим на п.п. 2.9, в противном случае полагаем $\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)}(w(t), s_*(t+1)) :=$ V-rep$\left\{\mathbf{U}^*(t)\right\}$ и осуществляем переход на п. 10;

2.9) измеряем реализацию фазового вектора спроса $s(t) = s_t$. Если $s_t \notin \mathbf{S}^*(t)$ (т.е. этот вектор не является решением системы $\Xi\left\{\mathbf{S}^*(t)\right\}$), полагаем $s(t) = s_t \in \mathbf{S}^*(t)$, где вектор s_t — решение системы $\Xi\left\{\mathbf{S}^*(t)\right\}$;

2.10) формируем прогнозируемый вектор спроса $s_*(t+1) \in \mathbf{S}^*(t+1)$, т.е. решение системы $\Xi\left\{\mathbf{S}^*(t+1)\right\}$;

2.11) формируем t-позицию системы $w(t) = \{t, x(t), s(t)\} = \{t, x_t, s_t\} = w_\tau \in \mathbf{W}(t)$ $(w(0) = \{0, x(0), s(0)\} = \{0, x_0, s_0\} = w_0 \in \mathbf{W}_0)$, причем выполняется условие $\left\{w_t \in \mathbf{W}(t)\right\} \bigwedge \left\{x_t \in \mathbf{X}^*(t)\right\}$.

3. Для полученной t-позиции системы $w_t = \{t, x_t, s_t\} = w_t \in \mathbf{W}(t)$ $(w_0 = \{0, x_0, s_0\} \in \mathbf{W}_0)$ на основании рекуррентной системы (3) и имея множество V-rep$\left\{\mathbf{U}^*(t)\right\}$, формируем область достижимости (прогнозное множество) $\mathbf{G}(t, w_t, t+1)$ системы (3) на шаг вперед (Тюлюкин, Шориков, 1988; Tyulyukin, Shorikov, 1993; Шориков, 1997), т.е. для $(t+1)$, в виде V-rep$\left\{\mathbf{G}(t, w_t, t+1)\right\}$ — конечного множества всех вершин выпуклого многогранника-компакта $\mathbf{G}(t, w_t, t+1)$ пространства $\mathbf{R}^n$. Отметим, что $\mathbf{G}(t, w_t, t+1)$ содержит множество всех возможных фазовых векторов $x(t+1) = \phi_{\overline{t,t+1}}(t+1; x_t, u(t), s_t)$ при реализациях допустимых управлений $u(t) \in \mathbf{U}^*(t)$ менеджера P. Для этого применяем общий рекуррентный алгебраический метод (Шориков, 1997) построения областей достижимости (прогнозных множеств) линейных дискретных управляемых динамических систем. В результате получаем конечную последовательность решений одношаговых задач линейного математического программирования и алгебраических операций над векторами в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^p$.

4. Из множества V-rep$\{\mathbf{G}(t, w_t, t+1)\}$ формируем конечную систему линейных алгебраических уравнений и неравенств $\Xi\{\mathbf{G}(t, w_t, t+1)\}$, множество решений которой H-rep$\{\mathbf{G}(t, w_t, t+1)\} = \mathbf{G}(t, w_t, t+1)$ однозначно описывает многогранник-компакт $\mathbf{G}(t, w_t, t+1)$.

5. Из $\Xi\left\{\mathbf{G}(t, w_t, t+1)\right\}$ и $\Xi\{\mathbf{X}^*(t+1)\}$ формируем систему $\Xi\{\mathbf{G}(t, w_t, t+1)\} \bigcup \Xi\{\mathbf{X}^*(t+1)\}$.

6. Множество решений системы $\Xi\{\mathbf{G}(t, w_t, t+1)\} \bigcup \Xi\{\mathbf{X}^*(t+1)\}$ вычисляется по формуле H-rep$\{\mathbf{G}(t, w_t, t+1) \bigcap \mathbf{X}^*(t+1)\} = \mathbf{X}(t, w_t, t+1)$, т.е. в виде решений конечной системы линейных алгебраических уравнений и неравенств, описывающей множество $\mathbf{G}(t, w_t, t+1) \bigcap \mathbf{X}^*(t+1) \neq \varnothing$ всех допустимых фазовых векторов $x(t+1)$ системы рекуррентных уравнений (3), удовлетворяющих заданному ограничению (4). Если $\mathbf{G}(t, w_t, t+1) \bigcap \mathbf{X}^*(t+1) = \varnothing$, полагаем $\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)} = \tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)}(w(t), s_*(t+1)) :=$ V-rep$\left\{\mathbf{U}^*(t)\right\}$ и переходим на п. 10.

7. Для полученного прогнозируемого в период времени $(t+1)$ значения вектора спроса $s_*(t+1) \in \mathbf{S}^*(t+1)$ из решения задачи выпуклого математического программирования, определяемой, согласно (7), выпуклой целевой функцией $\Phi_{\overline{t,t+1}}$ и конечной системой линейных алгебраических уравнений и неравенств с множеством решений $\mathbf{X}(t, w_t, t+1)$, формируем множество

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)}(w_t, s_*(t+1)) = \Big\{\tilde{u}_a^{(e)}(t) : \tilde{u}_a^{(e)}(t) \in \mathbf{U}^*(t),\ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\overline{t,t+1}}^{(e)} = \Phi_{\overline{t,t+1}}(w_t, \tilde{u}^{(e)}(t), s_*(t+1)) = \\
&= \min_{u(t)\in\mathbf{U}^*(t)} \Phi_{\overline{t,t+1}}(w_t, u(t), s_*(t+1)) = \tilde{\mathbf{F}}_{t+1}^{(e)} = \mathbf{F}_{t+1}(\phi_{\overline{t,t+1}}(t+1; x_t, \tilde{u}_a^{(e)}(t), s_t), s_*(t+1)) = \\
&= \mathbf{F}_{t+1}(\tilde{x}_a^{(e)}(t+1), s_*(t+1)) = \min_{x(t+1)\in\mathbf{X}(t,w(t),t+1)} \mathbf{F}_{t+1}(x(t+1), s_*(t+1)) = \\
&= \left\|\tilde{x}_a^{(e)}(t+1) - s_*(t+1)\right\|_n = \min_{x(t+1)\in\mathbf{X}(t,w_t,t+1)} \left\|x(t+1) - s_*(t+1)\right\|_n \Big\} \neq \varnothing
\end{aligned} \tag{10}$$

и число $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(e)}_{\overline{t,t+1}} = \tilde{\mathbf{F}}^{(e)}_{\overline{t,t+1}}$, где $\tilde{x}_a^{(e)}(t+1) = \phi_{\overline{t,t+1}}(t+1; x_t, \tilde{u}_a^{(e)}(t), s_t)$ — фазовый вектор системы в период t+1, соответствующий набору $(x_t, \tilde{u}_a^{(e)}(t), s_t)$, $\tilde{x}_a^{(e)}(t+1) \in \mathbf{X}^*(t)$. Множество $\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)}(w_t, s_*(t+1))$ и число $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(e)}_{\overline{t,t+1}} = \tilde{\mathbf{F}}^{(e)}_{\overline{t,t+1}}$ находятся из решения задачи выпуклого математического программирования, например с помощью градиентного метода Зойтендейка (см. (Bazaraa, Shetty, 1979)), т.е. в результате конечной последовательности алгебраических операций над векторами в $\mathbf{R}^n$.

8. Формируем конечное множество V-rep$\{\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)}(w(t), s_*(t+1))\}$ всех вершин, однозначно описывающих непустой многогранник-компакт $\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)}(w(t), s_*(t+1))$, являющийся решением оптимизационной задачи (10).

9. Для рассматриваемой t-позиции системы $w_t = \{t, x_t, s_t\} \in \mathbf{W}(t)$ полагаем $\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)}(w(t), s_*(t+1)) :=$ $:=$ V-rep$\{\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)}(w_t, s_*(t+1))\}$.

10. Назначаем $t := t+1$. Если $t < T$, переходим на п. 2; если $t = T$, переходим на п. 11.

11. Для всех периодов времени $t \in \overline{0, T-1}$ формирование стратегии $\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)} = \tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)}(w(t),\ s_*(t+1)) \in \mathbf{U}_a^*$, $t \in \overline{0, T-1}$, менеджера P (где $w(t) = \{t, x(t), s(t)\} \in \mathbf{W}(t)$, $w(0) = \{0, x(0), s(0)\} = \{0, x_0, s_0\} = w_0 \in \mathbf{W}_0$) t-позиция дискретной управляемой динамической системы (3)–(6), осуществляется следующим образом:

11.1) $\forall \left\{ w(t) = \{t, x(t), s(t)\} \in \mathbf{W}(t) \wedge \mathbf{U}_a^{(e)}(w(t), s_*(t+1)) \neq \varnothing \right\}$, $t \in \overline{0, T-1}$ полагаем

$$\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)} := \text{V-rep}\left\{ \tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)}(w(t), s_*(t+1)) \right\}, \tag{11}$$

где множество $\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)}(w(t), s_*(t+1))$ определяется из решения оптимизационной задачи (10);

11.2) $\forall \left\{ w(t) = \{t, x(t), s(t)\} \in \mathbf{W}(t) \wedge \mathbf{U}_a^{(e)}(w(t), s_*(t+1)) = \varnothing \right\} \vee\ w(t) = \{t, x(t), s(t)\} \notin \mathbf{W}(t)$, $t \in \overline{0, T-1}$, согласно (5) имеем

$$\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)} = \tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)}(w(t), s_*(t+1)) := \text{V-rep}\left\{ \mathbf{U}^*(t) \right\} \tag{12}$$

с помощью конечной последовательности алгебраических операций над векторами в $\mathbf{R}^p$.

12. Пусть фазовая траектория $\tilde{x}_a^{(e)}(\cdot) = \{\tilde{x}_a^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0,T}}$ динамической системы (3)–(6) порождена стратегией $\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)} \in \mathbf{U}_a^*$ на промежутке времени $\overline{0, T}$. Ей соответствует реализация набора $(\tilde{u}_a^{(e)}(\cdot), s_a(\cdot)) = (\{\tilde{u}_a^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}}, \{s_a(t)\}_{t \in \overline{0,T}})$, т.е. $\forall t \in \overline{0, T-1}$: $\tilde{x}_a^{(e)}(t+1) = \phi_{\overline{t,t+1}}(t+1; \tilde{x}_a^{(e)}(t), \tilde{u}_a^{(e)}(t), s_a(t))$, $\tilde{x}_a^{(e)}(0) = x_0$, $s_a(0) = s_0$.

Согласно (Шориков, 1997) справедливы равенства:

$$\forall w(t) = \{t, x(t), s(t)\} \in \overline{0, T-1} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \mathbf{U}_a^{(e)}(w(t), s_*(t+1)) = \tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)}(w(t), s_*(t+1));\ \mathbf{U}_a^{(e)} = \tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)};$$
$$\boldsymbol{\Phi}^{(e)}_{\overline{t,t+1}} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(e)}_{\overline{t,t+1}} = \tilde{\mathbf{F}}^{(e)}_{\overline{t,t+1}} = \mathbf{F}^{(e)}_{\overline{t,t+1}},$$

т.е. сформированные стратегия адаптивного управления $\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)} = \mathbf{U}_a^{(e)}$ и набор $\left\{ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(e)}_{\overline{t,t+1}} \right\}_{t \in \overline{0T}} = \left\{ \boldsymbol{\Phi}^{(e)}_{\overline{t,t+1}} \right\}_{t \in \overline{0T}} = \left\{ \mathbf{F}^{(e)}_{\overline{t,t+1}} \right\}_{t \in \overline{0T}} = \left\{ \tilde{\mathbf{F}}^{(e)}_{\overline{t,t+1}} \right\}_{t \in \overline{0T}}$ образуют решение задачи оптимизации адаптивного управления выполнением договорных обязательств производственным предприятием.

Из методики решения оптимизационной задачи следует, что формирование стратегии оптимального адаптивного управления $\tilde{\mathbf{U}}_a^{(e)} = \mathbf{U}_a^{(e)}$ менеджера P осуществляется с помощью конечной рекуррентной последовательности алгебраических операций над векторами в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^p$, конечных последовательностей алгебраических операций преобразования многогранников-компактов, заданных в виде конечных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, в конечный набор их вершин, и наоборот (т.е. использования двойственных операций описания многогранников-компактов), а также решений задач линейного и выпуклого математического программирования. Это означает, что предложенная методика решения рассматриваемой оптимизационной задачи может служить основой для разработки соответствующих численных алгоритмов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения сформулированной многошаговой задачи оптимизации адаптивного управления выполнением договорных обязательств производственным предприятием в данной статье предлагается методика ее решения, основывающаяся на *общем рекуррентном алгебраическом методе* (Тюлюкин, Шориков, 1988; Tyulyukin, Shorikov, 1993; Шориков,1997) построения областей достижимости (прогнозных множеств) линейных дискретных управляемых динамических систем. Решение исследуемой оптимизационной задачи осуществляется с помощью конечной рекуррентной последовательности выполнения алгебраических операций над векторами в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^p$, выполнения алгебраических операций, преобразующих описание выпуклых многогранников-компактов, заданных в виде конечных систем алгебраических уравнений и неравенств, в конечные наборы их вершин, и наоборот (т.е. выполнения операций двойственного описания выпуклых многогранников-компактов), реализации конечного набора решений задач линейного и выпуклого математического программирования, т.е. *путем реализации только одношаговых операций, допускающих их алгоритмизацию*.

Полученные в статье результаты могут быть использованы для разработки интеллектуальных компьютерных информационных систем поддержки принятия управленческих решений на производственных предприятиях, экономико-математические модели которых представлены, например, в исследованиях (Макаров и др., 2021; Клейнер, Рыбачук, 2017; Aksyonovetal., 2015; Astolfi, 2006; Astroem, Wittenmark, 2008; Landauetal., 2011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

Клейнер Г.Б., Рыбачук М.А. (2017). Системная сбалансированность экономики. Москва: Научная библиотека. [**Kleiner G.B., Rybachuk M.A.** (2017). *Systemic balance of the economy*. Moscow: Nauchnaja biblioteka (in Russian).]

Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Бекларян Г.Л., Акопов А.С. (2021). Цифровой завод: методы дискретно-событийного моделирования и оптимизации производственных характеристик // *Бизнес-информатика*. Т. 15. № 2. С. 7–20. DOI: 10.17323/2587-814X.2021.2.7.20 [**Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Beklaryan G.L., Akopov A.S.** (2021). Digital plant: Methods of discrete-event modeling and optimization of production characteristics. *Business Informatics*, 15, 2, 7–20. DOI: 10.17323/2587-814X.2021.2.7.20 (in Russian).]

Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф. (1988). Об одном алгоритме построения области достижимости линейной управляемой системы. В сб.: «Негладкие задачи оптимизации и управление». Свердловск: УрО АН СССР. С. 55–61. [**Tyulyukin V.A., Shorikov A.F.** (1988). On algorithm for constructing the reachability sets of linear control system. In: *Non-smooth optimization problems and control*. Sverdlovsk: UB AS USSR, 55–61 (in Russian).]

Черников С.Н. (1968). Линейные неравенства. М.: Наука. [**Chernikov S.N.** (1968). *Linear Inequalities*. Moscow: Nauka (in Russian).]

Шориков А.Ф. (1997). Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та. [**Shorikov A.F.** (1997). *Minimax estimation and control in discrete-time dynamical systems*. Ekaterinburg: Publishing House Ural State University (in Russian).]

Шориков А.Ф. (2006). Методология моделирования многоуровневых систем: иерархия и динамика // Прикладная информатика. Т. 1. № 1. С. 136–141. [**Shorikov A.F.** (2006). Methodology for modeling multilevel systems: Hierarchy and dynamics. *Applied Informatics*, 1, 1, 136–141 (in Russian).]

Aksyonov K., Bykov E., Aksyonova O., Goncharova N., Nevolina A. (2015). Analysis of simulation modeling systems illustrated with the problem of model design for the subject of technological logistics (WIP). *Society for Modeling & Simulation International* (SCS). Summer Simulation Multi-Conference (SummerSim'15). Chicago, USA. 26–29 July, 2015. Simulation Series, 47, 10, 345–348.

Astolfi A. (2006). *Nonlinear and adaptive control: Tools and algorithms for the user*. London: Imperial College Press.

Astroem K.J., Wittenmark B. (2008). *Adaptive control*. 2nd ed. N.Y.: Dover Publ., Inc.

Bazaraa M.S., Shetty C.M. (1979). *Nonlinear programming: Theory and algorithms*. 2nd ed. N.Y.: Wiley.

Cheng W., Xiao-Bing L. (2013). Integrated production planning and control: A multi-objective optimization model. *Journal of Industrial Engineering and Management*, 6, 4, 815–830.

David S.A., Oliveira C., Derick D., Quintino D.D. (2012). Dynamic model for planning and business optimization. *Modern Economy*, 3, 4, 384–391. DOI: 10.4236/me.2012.34049

Landau I.D., Lozano R., M'Saad M., Karimi A. (2011). Adaptive control: Algorithms, analysis and applications. London: Springer.

Margineanu C., Lixndroiu D. (2021). Optimization of industrial management processes. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng*, 1009, 012039, 1–9.

Olanrele O.O., Olaiya K.A., Aderonmu M.A., Adegbayo O.O., Sanusi B.Y. (2014). Development of a dynamic programming model for optimizing production planning. *International Journal of Management Technology*, 2, 3, 12–17.

Szopa R., Marczyk B. (2011). Optimization of production problems using mathematical programming. *Polish Journal of Management Studies*, 4, 231–238.

Tyulyukin V.A., Shorikov A.F. (1993). Algorithm for solving terminal control problems for a linear discrete system. *Automation and Remote Control*, 4, 115–127.

Zhang Q., Chen Yu., Lin W., Chen Ya. (2021). *Optimizing medical enterprise's operations management considering corporate social responsibility under industry 5.0.* Article ID9298166, 1–13. DOI: 10.1155/2021/9298166

Wagner H.M., Whitin T.M. (2004). Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, 50, 12, 1770–1774.

Technique for optimizing the adaptive control of the output of an enterprise based on a dynamical economic and mathematical model

A.F. Shorikov,
Institute of Economics, the Ural Branch of the RAS, Ekaterinburg, Russia; e-mail: afshorikov@mail.ru

Received 13.03.2022

The work was carried out with financial support by the Russian Science Foundation (Project No. 22-28-01868 "Development of an agent-based model of the network industrial complex in the context of digital transformation").

Abstract. The article is devoted to the application of dynamic economic and mathematical models for managing the production of an enterprise based on the use of the feedback principle. Formation of a discrete controllable dynamical system is given, which describes the process of production output by a manufacturing enterprise in the presence of a predictable demand function for products. The phase vector of a dynamical system describes the main parameters of production, and the control action vector (control vector) describes the intensity of the use of technological methods of production that are available to the subject of control. It is assumed that in each period the subject of control knows the vector function that describes the volume of demand for the company's products in subsequent periods, and the given geometric restrictions on the implementation of the phase vector, control vector and demand vector are also known. As the target function of the problem, the value of the discrepancy between the volumes of output by the enterprise relative to the given predicted value of the demand function in the subsequent control period is considered. Using the generated dynamical system, the paper proposes an economic-mathematical model of the studied problem of optimizing the adaptive control of the enterprise's output, which includes a class of admissible strategies for adaptive control and the formulation of the problem. The paper proposes a method for solving the formulated problem of optimizing the adaptive control of the output of an enterprise, which is implemented as a finite sequence of one-step algebraic operations on vectors of a finite-dimensional vector space, a finite set of solutions to problems of linear and convex mathematical programming. The results obtained can be used in the development of intelligent decision support systems for the actual tasks of managing the production of products at industrial enterprises.

Keywords: economic and mathematical modeling, dynamical systems, control optimization, control strategies, adaptive control, manufacturing enterprise, enterprise output.

JEL Classification: C02, C44, C61, D24.

For reference: **Shorikov A.F.** (2022). Technique for optimizing the adaptive control of the output of an enterprise based on a dynamical economic and mathematical model. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 4, 102–112. DOI: 10.31857/S042473880019197-5