
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Влияние личностных качеств агентов на экзогенное формирование лидерства по Штакельбергу в модели коллективных действий

© 2022 Е. М. Скаржинская, В. И. Цуриков

Е. М. Скаржинская,

Костромской государственный университет, Кострома; e-mail: yelena.skarzhinsky@gmail.com

В. И. Цуриков,

Костромская государственная сельскохозяйственная академия, Кострома; e-mail: tsurikov@inbox.ru

Поступила в редакцию 18.05.2022

Аннотация. В рамках математического моделирования анализируются условия, которые позволяют самоуправляемому коллективу преодолеть неэффективное равновесие по Нэшу и достичь Парето-предпочтительного исхода. Предполагается, что члены коллектива (агенты) своими усилиями создают общий доход, который затем распределяется в равных долях. Усилия всех агентов комплементарны, т.е. рост усилий одного агента приводит к увеличению предельного дохода по усилиям любого другого агента. Цель каждого агента состоит в максимизации индивидуального выигрыша. Предлагается модель, построенная для функции совокупного дохода с постоянной эластичностью дохода по усилиям каждого агента и удовлетворяющая условию убывающей отдачи. Все члены коллектива идентичны по влиянию усилий на величину дохода. В рамках механизма временных действий (timing decisions) каждый агент оказывается перед дилеммой: выбрать стратегию активности (осуществляют свои усилия в первом временном периоде) или стратегию выжидания (во втором периоде усилия прикладывают так называемые последователи). Стратегия выжидания позволяет получить более высокий выигрыш при условии, что найдутся агенты, выбравшие стратегию активности. Если в коллективе не окажется ни одного активного агента, коллектив попадает в ловушку неэффективного равновесия Нэша. Показано, что с ростом числа активных агентов увеличивается суммарный выигрыш всех членов коллектива. Наибольший выигрыш последователя превышает наибольший выигрыш активного агента и достается последователю только в случае, когда он остается единственным. Показано, что им может стать только склонный к риску эгоистичный оптимист.

Ключевые слова: коллективные действия, лидер по Штакельбергу, последователи, равновесие по Нэшу, Парето-предпочтительный исход, эффективность по Парето.

Классификация JEL: C02, D23.

Для цитирования: Скаржинская Е. М., Цуриков В. И. (2022). Влияние личностных качеств агентов на экзогенное формирование лидерства по Штакельбергу в модели коллективных действий // Экономика и математические методы. Т. 58. № 4. С. 113–122. DOI: 10.31857/S042473880023021-2

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая статья является продолжением статьи (Скаржинская, Цуриков, 2021б), посвященной личностным характеристикам лидера по Штакельбергу в коллективе, члены которого своими индивидуальными усилиями создают общую стоимость. Лидер по Штакельбергу — член коллектива, который первым осуществляет свои усилия, предварительно определив для себя их оптимальный объем. Для этого он, пользуясь знанием зависимости объемов усилий, прилагаемых его партнерами, от размера его собственных усилий, вводит эту зависимость в свою функцию полезности. Получив зависимость своей полезности только от величины собственных усилий, он находит объем своих индивидуальных усилий σ^L , при котором его полезность достигает максимума. Именно в этом объеме он и осуществляет свои усилия. Усилия лидера наблюдают все последователи и используют это знание при выборе размера собственных усилий.

Модель Штакельберга, первоначально построенная для описания дуополии (Stackelberg, 1934), впоследствии была распространена на произвольное число фирм (Anderson, Engers, 1992; Linster, 1993; Ino, Matsumura, 2012; Julien, 2018). В исследованиях дуополии в работах (Алгазин, Алгазина, 2017, 2020) получено обобщение на случай отсутствия у агентов достоверной информации относительно размеров предельных издержек конкурентов или их выбора, а в работе (Гераськин, 2020) анализируется зависимость выигрышей агентов в равновесии Штакельберга от вида функций издержек.

Возможность достижения равновесия по Штакельбергу в коллективе исследуется в работе (Kim, 2012). В этой работе (в отличие от нашей) предполагается, что коллектив находится под влиянием принципала, который условиями контракта влияет на стимулы агентов. Принципал способен компенсировать агенту его издержки, тем самым побуждая его занять позицию лидера по Штакельбергу.

Для распространения стратегии Штакельберга на многочисленный самоуправляемый коллектив необходимо выполнение следующих условий:

1) зависимость дохода от размера усилий каждого участника, функции полезности всех членов коллектива и их стремление к максимуму индивидуальных выигрышей — образуют общее знание. Будем считать это условие выполненным;

2) усилия лидера наблюдают все члены коллектива. Условие выполняется в силу того, что лидер направляет свои усилия до того, как это сделают остальные члены коллектива.

Лидерство в коллективе формируется на основе добровольного выбора каждым членом коллектива роли лидера или роли последователя в рамках использования механизма временных действий (timing decisions)¹. Первоначально этот механизм был предложен для достижения равновесия по Штакельбергу в условиях рыночной дуополии в работе (Hamilton, Slutsky, 1990).

Применительно к нашему случаю коллективных действий механизм временных действий состоит в следующем. Члены коллектива устанавливают два последовательных временных интервала (периода) для осуществления усилий. Каждый участник может действовать только в одном интервале и сам выбирает этот интервал и объем своих усилий. В такой последовательной игре члены коллектива, выбравшие второй интервал (последователи), получают информационное преимущество над агентами, проявившими активность в первом интервале. Так как усилия каждого агента предполагаются наблюдаемыми, то последователи используют знание об объемах усилий, уже осуществленных агентами, проявившими активность в первом периоде. Последователи выбирают усилия σ_i^F , при которых их выигрыши достигают максимумов. В случае проявления активности в первом периоде только одним из членов коллектива (лидером), коллектив достигает равновесного по Штакельбергу исхода.

В работе (Скаржинская, Цуриков, 2021б) для величины совокупного дохода коллектива использовалась функция от объемов усилий, прилагаемых агентами, вида:

$$D = \lambda \prod_{i=1}^n \sigma_i^{a_i}, \quad (1)$$

где σ_i — значения усилий агента i ; $\lambda, a_i > 0$ — постоянные, причем $E = \sum_i a_i < 1$; a_i можно трактовать как показатель эластичности дохода по усилиям агента i . В качестве издержек $I_i(\sigma_i)$ агента i использовалась линейная зависимость вида $I_i(\sigma_i) = q_i \sigma_i$, где $q_i > 0, i = 1, \dots, n$. Коэффициент q_i , равный величине предельных издержек агента i , характеризует его субъективную оценку собственных издержек. Выигрыш каждого члена коллектива определяется выражением

$$U_i = \alpha_i D(\sigma_i, \sigma_{-i}) - I_i(\sigma_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где α_i — относительная доля дохода агента i . Функция дохода (1) обеспечивает необходимую для реализации стратегии Штакельберга комплементарность усилий. Как видно из (1), в силу неравенств

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \sigma_i \partial \sigma_k} = \frac{a_i a_k}{\sigma_i \sigma_k} D > 0, \quad i \neq k,$$

повышение уровня усилий со стороны каждого агента положительно влияет на эффективность усилий любого другого агента.

В рамках данной модели были установлены следующие факты.

1. Использование стратегии по Штакельбергу в случае, если активность в первом периоде проявляет только один участник (лидер, вне зависимости кто именно), приводит коллектив к исходу, в котором выигрыш каждого члена коллектива выше, чем в равновесном по Нэшу исходе².

¹ Термин «timing decisions» в русскоязычной литературе переводится фразеологической единицей *временные действия* и обозначает модель принятия решений, в которой каждый участник должен в течение заданного временного периода принять решения и осуществить соответствующие действия, наблюдать которые другие участники могут после окончания данного временного периода.

² Равновесие Нэша достигается при автономном выборе в одновременной игре каждым из участников размера собственных усилий.

2. Величина индивидуального выигрыша каждого члена коллектива и в равновесии Нэша, и в равновесии Штакельберга пропорциональна величине совокупного дохода.

3. Величина дохода в равновесии Штакельберга пропорциональна доходу, создаваемому в равновесном по Нэшу исходе с коэффициентом пропорциональности, превышающем 1 и зависящем только от суммарной эластичности E и индивидуальной эластичности дохода по усилиям лидера.

Для дальнейшего изложения нам потребуются два определения из (Скаржинская, Цуриков, 2021б).

1. Агента, лидерство которого обеспечивает наибольшее значение совокупного дохода и, соответственно, максимальный выигрыш каждого последователя, мы назвали *эффективным в роли лидера агентом*.

2. Так как модель показала, что в ряде случаев члену коллектива выгоднее быть последователем, чем лидером, то для краткости мы стали называть того эффективного в роли лидера агента, которому, наоборот, выгоднее быть лидером, чем последователем, *особенным агентом*. Если роль лидера по Штакельбергу играет *особенный агент*, то наибольшего значения достигают не только выигрыши всех последователей, но и его индивидуальный выигрыш.

Здесь хотелось бы отметить три несколько неожиданных вывода, полученных в модели с условиями (1)–(2).

1. Казалось бы, что одним из эффективных в роли лидера должен быть агент, больше других заинтересованный в максимальном значении совокупного дохода, т.е. тот член коллектива, у которого относительная доля в доходе самая большая. Однако оказалось, что эффективность лидера, т.е. степень его позитивного влияния на величину совокупного дохода, никак не связана с его долей в доходе.

2. Так как усилия лидера при прочих равных условиях выше усилий последователей, то естественно было бы думать, что одним из наиболее эффективных в роли лидера должен быть агент с самым высоким значением показателя эластичности дохода по его собственным усилиям или агент, прилагающий наибольшие усилия. Однако эффективность агента в роли лидера оказалась никак не связана с его оценкой собственных издержек, влияющих на размер осуществляемых им усилий.

3. Зависимость величины совокупного дохода от показателя его эластичности по усилиям агента-лидера носит немонотонный характер. Ее глобальный максимум достигается при значении показателя эластичности, находящегося внутри интервала $(0, E)$. Иначе говоря, существует участок в области изменения показателя эластичности, на котором его рост ведет в равновесии Штакельберга не к повышению, а к снижению совокупного дохода.

Напомним, что мы рассматриваем коллектив, осуществляющий свою деятельность на принципах самоорганизации и самоуправления. Если же коллективом управляет внешний агент или принципал, он может воздействовать на формирование лидерской структуры, отдавая предпочтение структуре с наиболее эффективным лидером (см., например, (Kim, 2012)). Поэтому если лидера может выбирать принципал, качества лидера по Штакельбергу могут оказаться другими.

Стратегия по Штакельбергу также рассматривается в работах, посвященных теории управления (см., например, (Губко, Новиков, 2005; Новиков, 2008; Новиков, Чхартишвили, 2013; Горелов, 2019)). Однако в этих работах качества лидера не играют роли. Анализ, как правило, осуществляется в рамках моделей иерархической системы, состоящей из двух игроков: центра и агента. Центр в качестве активного игрока запрещает игроку осуществлять некоторые действия, и это ограничение принимается агентом безоговорочно. Задача максимизации выигрыша центра решается в общем виде, и равновесие Штакельберга анализируется в качестве одного из возможных вариантов. При этом выигрыш агента явно зависит только от его собственного выбора.

Главное отличие предлагаемой здесь модели от моделей типа «центр — агент» состоит в том, что мы рассматриваем деятельность сколь угодно многочисленного коллектива, направленную на создание общей стоимости. Внешнее управление отсутствует. Выигрыш каждого агента зависит от его выбора и от действий остальных агентов.

ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И МОДЕЛЬ

Если в коллективе имеется особенный агент, то другого эффективного в роли лидера агента быть не может. Поэтому каждому члену такого коллектива, в том числе и особенному агенту, выгодно, чтобы именно особенный агент стал лидером по Штакельбергу.

Наличие в коллективе особенного агента может повысить уровень доверия к его намерению осуществить свои усилия в размере σ^L , и поэтому в принципе делает использование механизма временных действий не обязательным. Агенты могут быть уверены, что особенный игрок осуществит усилия в объеме σ^L , если он сообщит о своих намерениях до начала этапа приложения усилий. Так как ни особенному агенту и ни одному из его последователей не выгодно отклоняться от объема своих усилий, при которых достигается максимальное значение его выигрыша, то рациональное поведение всех участников приведет к равновесию Штакельберга при одновременном осуществлении усилий всеми членами коллектива в едином интервале времени.

Напомним, что согласно результатам (Скаржинская, Цуриков, 2021б) в коллективе всегда имеется по крайней мере один эффективный в роли лидера по Штакельбергу агент. Если он, не являясь особенным, принимает на себя роль лидера, то индивидуальные выигрыши всех остальных членов коллектива, кроме его собственного, достигают наибольшего значения. Такой лидер выгоден всем его последователям, но ему самому выгоднее роль последователя, а не лидера. Для разрешения возникающей в связи с отсутствием особенного агента проблемы лидерства существует несколько возможностей.

Одна из них (см. (Скаржинская, Цуриков, 2017а; 2017б)) состоит в изначальном изменении правила распределения ожидаемого дохода в пользу будущего лидера. Другая возможность (Скаржинская, Цуриков, 2019) также предусматривает компенсацию величины недополученного лидером выигрыша и состоит в перераспределении уже полученного дохода в рамках побочных платежей. Использование этих компенсационных механизмов влечет за собой определенные транзакционные издержки, которые снижают положительный эффект от координации коллективных действий. Здесь же мы хотим обратить внимание на не связанную с транзакционными издержками возможность разрешить проблемы координации, которую предоставляет учет психологических факторов.

В статье (Скаржинская, Цуриков, 2021б), посвященной стратегии Штакельберга, мы опирались на механизм временных действий с объявленным действием при жестком условии, согласно которому в первом периоде активность, причем обязательно, проявлял только один агент. Соответственно, все остальные члены коллектива осуществляли усилия во втором периоде, используя при выборе размера усилий информацию об объеме усилий, которые приложил лидер в первом периоде. Для того чтобы эти остальные агенты не проявили активности в первом периоде, требовалось объявление своих намерений со стороны лидера. Эти условия были необходимы для гарантированного достижения членами коллектива равновесия по Штакельбергу.

В настоящей статье мы ослабляем эти предположения. Используя механизм временных действий, мы не будем ограничиваться условием активности в первом периоде только одного агента. Пусть в этот период могут проявить активность агенты в любом количестве, причем они могут объявлять или не объявлять о своих намерениях. По-прежнему предполагаем, что каждый член коллектива знает и функцию совокупного выигрыша, и все функции выигрышей своих партнеров. Это знание является общим, т.е. всем агентам известно, что этой информацией владеет каждый из них.

Для того чтобы сосредоточиться исключительно на психологических факторах, нам удобно максимально абстрагироваться от остальных факторов, способных влиять на размер усилий и величину совокупного дохода. Поэтому в дальнейшем будем считать, что коллектив состоит из агентов с одинаковыми показателями эластичности, имеющих равные доли в доходе и одинаково оценивающих издержки своих усилий: $a_i = a < 1/n$, $\alpha_i = 1/n$, $q_i = 1$, где $i = 1, \dots, n$. Соответственно, функция совокупного дохода принимает вид:

$$D = \lambda \prod_{i=1}^n \sigma_i^a. \quad (3)$$

По-прежнему считаем, что каждый член коллектива стремится к максимуму своего индивидуального выигрыша:

$$U_i = (\lambda/n) \prod_{j=1}^n \sigma_j^a - \sigma_i \rightarrow \max_{\sigma_i > 0}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Из работы (Скаржинская, Цуриков, 2021б) следует, что в равновесии Нэша выражения для совокупного дохода, усилий членов коллектива и их выигрышей принимают вид:

$$D^N = \left(\lambda (a/n)^{an} \right)^{1/(1-an)}, \quad \sigma_i^N = \sigma^N = aD^N/n, \quad U_i^N = D^N(1-a)/n, \quad i = 1, \dots, n; \quad (5)$$

а в равновесии Штакельберга —

$$\begin{aligned} D^S &= D^N \left(1 / (1 - a(n-1)) \right)^{a/(1-an)}, \quad \sigma^L = aD^S / [n(1 - a(n-1))], \\ U^L &= D^S \left(1 - a / (1 - a(n-1)) \right) / n, \end{aligned} \quad (6)$$

где D^S — величина совокупного дохода; σ^L и U^L — объем усилий лидера и величина его выигрыша. Для усилий σ^F и выигрышей U^F последователей справедливы выражения:

$$\sigma^F = aD^S / n, \quad U^F = D^S (1 - a) / n. \quad (7)$$

ПРОТИВНИКИ РИСКА И ПЕССИМИСТЫ

Согласно условиям (3)–(4), коллектив однороден, и все его члены идентичны, а значит, особенного агента в коллективе нет. Зато эффективным в роли лидера является каждый член. Сравнение выражений (6) и (7) показывает, что объем усилий лидера выше, чем последователя. Поэтому при равных долях в доходе выигрыш лидера ниже выигрыша последователя на величину разности приложенных ими усилий. Отсюда следует, что каждому члену коллектива выгодней быть последователем, чем лидером.

Однако каждый член коллектива понимает: для того чтобы быть последователем, коллективу нужен лидер. В случае отсутствия лидера, т.е. в том случае, в котором ни один из членов коллектива не проявит активности в первом периоде, коллектив попадет в неэффективное равновесие Нэша, и тем самым будет утрачена возможность получения каждым членом коллектива более высокого выигрыша. Таким образом, каждый агент в начале первого периода оказывается перед дилеммой: проявлять активность в первом периоде или не проявлять, т.е. становиться лидером по Штакельбергу или нет.

Здесь мы исходим из предположения, что никто не располагает надежным знанием о выборе, сделанном другими членами. Известно только, что дилемма выбора стоит перед каждым, и каждый об этом знает. Поэтому каждый агент осуществляет свой выбор, опираясь на собственные представления о партнерах и их представлениях о нем самом. Фактически агент осуществляет выбор в условиях неопределенности, так как его представления могут не совпадать с реальностью. С точки зрения теории игр, мы рассматриваем рефлексивную игру (Новиков, Чхартишвили, 2013). Однако ни рефлексивного, ни информационного управления в нашей модели нет. Другими словами, члены коллектива не используют явных информационных сигналов ни для управления действиями агентов, ни для влияния на их те или иные представления.

Очевидно, что выбор агента, стоящего перед дилеммой, зависит от его личностных качеств. Мы не ставим перед собой задачу выявления всех тех качеств и психологических особенностей агентов, которые побуждают их проявить активность в первом периоде. Просто отметим, что к их числу можно отнести следующие три характерных свойства личности.

1. *Неприятие риска.* Агент, не приемлющий риск, испытывает опасение, что никто из членов коллектива не проявит активность в первом периоде, в результате чего коллектив попадет в равновесное по Нэшу состояние. В условиях неопределенности такой агент будет стремиться к максимуму гарантированного выигрыша. Предполагая, что все остальные агенты выбрали стратегию выжидания, он осуществит свои усилия в первом периоде в размере усилий лидера по Штакельбергу.

2. *Пессимизм.* Пессимист может низко оценивать вероятность осуществления усилий кем-то из членов коллектива в первом периоде. Если его оценка математического ожидания собственного выигрыша для случая выжидания окажется ниже выигрыша лидера по Штакельбергу, он предпочтет проявить активность в первом периоде, т.е. возьмет на себя, по его мнению, роль лидера по Штакельбергу.

3. *Альтруизм.* Альтруист также может осуществить свой выбор в пользу активности в первом периоде. Это предположение вполне реалистично и согласуется с результатами ряда исследований. Например, в работе (Préget, Nguyen-Van, Willinger, 2016) было проведено экспериментальное изучение поведенческих типов агентов, производящих общественное благо в последовательной игре. Авторы пришли к выводу о том, что вклад добровольных лидеров, осуществляющих его первыми с последующим оповещением остальных участников о его размере (вне зависимости от их поведенческих типов), всегда выше вкладов последователей. В статье (Arbak, Villeval, 2013) также отмечается наличие

альтруистических мотивов, которые были обнаружены в результате экспериментальных исследований у части добровольных лидеров. В пользу существования альтруизма, в том числе истинного, свидетельствуют результаты экспериментов в виде игр «Ультиматум» и «Диктатор». Вопросы о причинах альтруизма и классификации его видов рассмотрены в обзоре (Зак, 2021).

Отметим, что могут существовать и иные причины, побуждающие агента предпочесть критерий максимина и, соответственно, проявить активность в первом периоде. Для нас важно, что подобные индивиды могут быть в любом коллективе. Так как такие члены коллектива первыми осуществляют свои усилия, положительно влияющие на усилия остальных агентов, то для краткости и по аналогии с терминологией, используемой в теории управления, будем их называть активными. Остальных агентов будем называть последователями. Можно сказать, что в нашей модели активный агент — это член коллектива, который в своем выборе при разрешении стоящей перед ними дилеммы, руководствуется убеждением: «Никто, кроме меня, не возьмет на себя роль лидера по Штакельбергу».

КОМУ — ЖУРАВЛЬ В НЕБЕ, КОМУ — СИНИЦА В РУКЕ

Если в коллективе оказался только один активный агент, осуществивший свои усилия в первом периоде в объеме σ^L , то коллектив достигает равновесного исхода по Штакельбергу. Этот случай подробно рассмотрен в (Скаржинская, Цуриков, 2021б).

Обратимся к случаю произвольного числа активных агентов. Обозначим их число через m , где $1 \leq m \leq n-1$. Для удобства будем считать, что активными являются первые m членов коллектива. Предположим, что каждый активный агент полагает, что только он проявляет активность в первом периоде. Соответственно, каждый из них осуществляет усилия в размере σ^L , и величина совокупного дохода D зависит от числа активных агентов m : $D = D(m)$. Так как все участники коллективных действий считаются одинаковыми, все числовые характеристики исходов зависят только от числа агентов, проявивших активность в первом периоде, то не будем различать исходы с одинаковыми значениями числа m .

Выражение для величины совокупного дохода $D(m)$ при $m < n$ принимает вид:

$$D(m) = \lambda (\sigma^L)^{am} \prod_{k=m+1}^n \sigma_k^a. \quad (8)$$

Остальные члены коллектива (последователи) осуществляют выбор объема своих усилий, прилагаемых ими во втором периоде, используя полученные знания о размерах усилий, приложенных активными агентами. Тогда условия максимума первого порядка для выигрыша последователя:

$$aD(m) = n\sigma_k, \quad k = m+1, \dots, n. \quad (9)$$

Подставив в (8) выражение для σ_k из (9), получим алгебраическое уравнение относительно $D(m)$ с решением

$$D(m) = \left(\lambda (\sigma^L)^{am} (a/n)^{a(n-m)} \right)^{1/(1-a(n-m))}. \quad (10)$$

Преобразуем его, используя (6):

$$D(m) = D^N (\sigma^L / \sigma^N)^{am/(1-a(n-m))}. \quad (11)$$

Величина усилий σ^F , прилагаемых последователями, и размер их выигрыша U^F также зависят от числа активных агентов, поэтому обозначим их через $\sigma^F(m)$ и $U^F(m)$. Из (9) и (11) с учетом (5) имеем:

$$\sigma^F(m) = aD(m) / n = \sigma^N (\sigma^L / \sigma^N)^{am/(1-a(n-m))}, \quad U^F(m) = (1-a)D(m) / n. \quad (12)$$

Если для усилий активного агента применить выражение $\sigma^L = \sigma^L a D^N / n \sigma^N$, его выигрыш $U^L(m)$ можно представить в виде

$$U^L(m) = (D^N / n) \left((\sigma^L / \sigma^N)^{am/(1-a(n-m))} - a \sigma^L / \sigma^N \right). \quad (13)$$

Согласно (11)–(13) выражения для дохода, объема усилий и выигрышей агентов можно рассматривать как функции натурального аргумента m . Во всех случаях соответствующие зависимости выражаются через множитель

$$(\sigma^L / \sigma^N)^{am/(1-a(n-m))} = \left((1-a(n-1)) \right)^{-(1-a(n-1))am / [(1-an)(1-a(n-m))]} \quad (14)$$

Так как в (14) слева основание степени больше единицы, а показатель степени принимает только положительные значения и увеличивается с ростом m , то функция (14) является возрастающей по m . Соответственно, при росте m , т.е. с увеличением числа активных агентов, монотонно возрастают объемы усилий, прилагаемых последователями (12), величина совокупного дохода (11) и индивидуальные выигрыши (12)–(13) (активных агентов и последователей). Таким образом, наличие

в коллективе активных агентов (среди них есть и противники риска, и пессимисты) самым благотворным образом влияет на эффективность коллективных действий.

В силу того что объем усилий σ^L одинаков у любого активного агента, а усилия последователей возрастают с ростом числа активных агентов, сравним объемы усилий, осуществляемых активными агентами и их последователями. Используя (12) и (14), получим

$$\sigma^L / \sigma^F(m) = (1 - a(n-1))^{-(1-a(n-1))/(1-a(n-m))} > 1, \quad m = 1, \dots, n-1. \quad (15)$$

Так как основание степени в этом неравенстве меньше 1, а показатель степени принимает только отрицательные значения, то при любом натуральном $m < n$ последователи прилагают меньше усилий, чем активные агенты: $\sigma^F(m) < \sigma^L$. Равенство относительных долей в совокупном доходе всех членов коллектива приводит к тому, что *при любом числе активных агентов выигрыш последователя выше выигрыша активного агента*.

Поскольку выигрыши всех членов коллектива тем выше, чем больше в коллективе активных агентов, то наибольшее значение выигрыш активного агента достигает в том случае, в котором все члены коллектива — активны (все агенты проявили свои усилия в размере σ^L в первом периоде). Выражения для наибольшего совокупного дохода и наибольшего индивидуального выигрыша активных агентов принимают вид:

$$D(n) = \lambda (\sigma^L)^{an} = D^N (\sigma^L / \sigma^N)^{an}, \quad U^L(n) = D^N \left((\sigma^L / \sigma^N)^{an} - a \sigma^L / \sigma^N \right) / n. \quad (16)$$

Что касается выигрыша последователя, то его величина тем выше, чем больше активных агентов и меньше последователей. Соответственно, наибольшее значение выигрыш последователя достигает при $m = n-1$ и единственном последователе. Интересно, что выигрыш единственного последователя превышает наибольший выигрыш активного агента:

$$U^F(n-1) > U^L(n). \quad (17)$$

Для доказательства (17) сравним два альтернативных исхода, в одном из которых активность в первом интервале времени проявили все члены коллектива, а в другом — на одного меньше. Единственный последователь во второй альтернативе, т.е. при $m = n-1$, выбрал размером своих усилий $\sigma^F(n-1)$, исходя из условий максимума собственного индивидуального выбора с учетом усилий остальных членов коллектива. А идентичный с ним агент в первой альтернативе при тех же усилиях со стороны остальных членов коллектива осуществил собственные усилия в большем объеме: $\sigma^L > \sigma^F(n-1)$. В результате такого изменения объема усилий агент не получает максимального выигрыша.

Обратимся к вопросу о размерах суммарного выигрыша в этих двух исходах. Выбирая размер своих усилий, последователь ограничивает их объем условием равенства предельного индивидуального дохода величине предельных издержек. При таком выборе, в силу того что величина предельного совокупного дохода в n раз (соответственно доле агента в доходе) превышает величину предельного индивидуального дохода, дополнительные усилия приводят к росту суммарного выигрыша. Поскольку во второй альтернативе один из агентов (единственный последователь) осуществил усилия в меньшем размере, чем остальные агенты, приложившие равные усилия в обеих альтернативах, то суммарный выигрыш в первой альтернативе выше, чем во второй.

Таким образом, единственный последователь получает наибольший выигрыш благодаря активным агентам, усилия которых выше, а выигрыш, соответственно, ниже, чем у него. Если обратиться к рассмотрению гипотетической ситуации последовательного роста числа активных агентов, то на каждом шаге роста m при прочих равных условиях коллектив переходит к исходу с более высоким суммарным выигрышем. Последний шаг — возрастание числа активных агентов от $n-1$ до n , также влечет за собой рост суммарного выигрыша и при этом приводит к снижению выигрыша единственного бывшего последователя. Эта перспектива снижения выигрыша является еще одним аргументом в пользу выбора агентом стратегии выжидания.

Эти два исхода, в одном из которых все члены коллектива, а в другом — все, кроме одного, проявляют активность в первом интервале времени, являются эффективными по Парето и не сравнимыми между собой. Кроме этих двух исходов, эффективными по Парето могут быть и другие. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы исход с $m = j$ был эффективным по Парето, является выполнение неравенства:

$$U^F(j) > U^L(n), \quad 0 \leq j \leq n-1. \quad (18)$$

Соответственно, исход с $m = j$ доминирует по Парето над исходом с $m = i$ при выполнении неравенства

$$U^F(i) \leq U^L(j), \quad 0 \leq i < j. \quad (19)$$

Если неравенство (19) выполняется для некоторого значения $i > 1$, то исход с $m = j$ оказывается доминирующим над любым исходом с числом активных агентов $m \leq i$.

Неравенства $U^N = U^F(0) < U^L(1)$ и $U^F(n-1) > U^L(n)$, наряду со свойством монотонного с ростом m увеличения выигрышей активных агентов и последователей, позволяют предположить, что существует такое натуральное число $k \leq n-1$, для которого выполняются условия: $U^F(k-1) \leq U^L(k)$ и $U^F(k) \geq U^L(k+1)$. Так как любой исход с числом активных агентов $m \geq k$ является доминирующим по Парето над исходом с $m < k$, то агенту выгоднее осуществить усилия в первом периоде, чем во втором, если число активных агентов, проявивших активность в первом периоде, не превышает $k-1$. Если $k > 1$, то агент, выбирающий роль лидера из соображений осторожности (т.е. из пессимистических ожиданий или стремления избежать риска), получает дополнительную мотивацию проявлять активность в первом периоде. Как следствие, при $k > 1$ снижается вероятность того, что лидерство не сформируется, и реализуется неэффективное равновесие Нэша.

Если задаться вопросом о личностных характеристиках единственного последователя, т.е. последователя в игре с $m = n-1$, можно указать свойства, которые ему не присущи. Во-первых, он не может быть альтруистом, так как его альтруизма недостаточно для того, чтобы пожертвовать своей возможностью получить выигрыш последователя, превышающий выигрыш лидера по Штакельбергу, ради устранения угрозы попадания коллектива в равновесие Нэша. Во-вторых, он оптимистичен в своей оценке вероятности существования в коллективе по крайней мере одного агента, предпочитающего максимум гарантированного выигрыша. В-третьих, он не боится риска, можно сказать, что он относится к тем индивидам, для которых журавль в небе предпочтительней синицы в руке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отличие от равновесия Нэша, которое в рассматриваемой модели может быть только одно, число равновесных по Штакельбергу исходов совпадает с числом членов коллектива. Причем при лидерстве любого из них выигрыш каждого агента в равновесии Штакельберга выше, чем в равновесии Нэша. Главная причина такого увеличения размера выигрышей заключается в комплементарности усилий всех членов коллектива. В нашем случае она выражается в положительном влиянии роста усилий каждого агента на эффективность усилий любого другого агента. Именно комплементарность усилий и получение достоверной информации о размере усилий, уже приложенных активным агентом, побуждает каждого агента-последователя в целях получения максимального выигрыша также осуществить свои усилия в размере, превышающем тот, при котором достигается равновесный по Нэшу исход.

Соответственно, каждый член коллектива заинтересован в существовании активного агента, который готов взять на себя роль лидера. В (Скаржинская, Цуриков, 2021б) было показано, что в общем случае не все члены коллектива одинаково эффективны в роли лидера по Штакельбергу. Если в коллективе имеется особенный агент, т.е. агент, лидерство которого обеспечивает всем членам коллектива (в том числе и ему самому) наибольший выигрыш в равновесии Штакельберга, то проблемы лидерства не возникает. Если же такого агента в коллективе нет, оказывается, что любому члену коллектива выгодней быть последователем, чем лидером, что и создает проблему эндогенного формирования лидерства по Штакельбергу.

Предложенное здесь решение этой проблемы основано на предположении, что среди членов коллектива имеются агенты, предпочитающие выигрыш лидера (в силу своих психологических качеств) риску оказаться в неэффективном равновесии Нэша, несмотря на то что он ниже выигрыша последователя. Эти агенты могут быть противниками риска или быть склонными к альтруизму или пессимистическим ожиданиям. Каждый такой агент выбирает стратегию максимина, проявляет активность в первом периоде игры временных действий (*timing decisions*) и осуществляет усилия в объеме лидера по Штакельбергу, так как, предполагая худший для себя вариант, исходит из соображения, что никто, кроме него, активность не проявит.

Если в коллективе нет особенного агента и найдется только один агент, предпочитающий стратегию максимина, то коллектив достигнет равновесия Штакельберга. Если таких агентов окажется несколько,

то при отсутствии координации действий между ними³ каждый из них, реализуя свое стремление к максимуму гарантированного выигрыша, выберет объем усилий в размере усилий лидера по Штакельбергу. В рамках предложенной здесь модели оказывается, что и активным агентам, и последователям выгодно, чтобы активных агентов было как можно больше. Так как каждому агенту выгодней быть последователем, чем активным агентом, то число агентов, предпочитающих стратегию максимина, будет больше в том случае, когда сохраняется неопределенность относительно их числа. Поэтому любой активный агент заинтересован в том, чтобы информация, что он выбрал стратегию максимина, не получила распространения до конца первого периода.

Так как размер усилий, произведенных каждым агентом в роли лидера по Штакельбергу, превышает размер его усилий в роли последователя, выигрыш активного агента растет по мере увеличения числа таких агентов и достигает максимума в случае, когда активными являются все члены коллектива. Но данный исход не является равновесным по подыграм, так как любому активному агенту выгоднее роль последователя, если все его партнеры выбрали роль лидера. Выигрыш единственного последователя принимает наибольшее значение из возможных выигрышей всех членов коллектива.

Для определения исходов игры, эффективных по Парето, принципиальное значение имеет такое число активных агентов, при котором каждому из них не выгодно отказываться от роли лидера. Оказывается, что если это число выше единицы, то расширяется множество эффективных по Парето исходов и усиливается мотивация агентов проявлять активность в первом периоде, и, как следствие, — становится менее вероятным попадание коллектива в неэффективное равновесие Нэша.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. (2017). Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // *Автоматика и телемеханика*. № 7. С. 91–105. [Algazin G.I., Algazina D.G. (2017). Collective behavior in the Stackelberg model under incomplete information. *Automation and Remote Control*, 9, 1619–1630 (in Russian).]
- Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. (2020). Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // *Автоматика и телемеханика*. № 7. С. 113–128. [Algazin G.I., Algazina D.G. (2020). Reflection processes and equilibrium in an oligopoly model with a leader. *Automation and Remote Control*, 7, 1258–1270 (in Russian).]
- Гераськин М.И. (2020). Приближенное вычисление равновесий в нелинейной модели олигополии Штакельберга на основе линеаризации // *Автоматика и телемеханика*. № 9. С. 120–143. [Geraskin M.I. (2020). Approximate calculation of equilibria in the nonlinear Stackelberg oligopoly model: A linearization based approach. *Automation and Remote Control*, 9, 1659–1678 (in Russian).]
- Горелов М.А. (2019). Модель управления ограничениями деятельности // *Проблемы управления*. № 4. С. 43–49. [Gorelov M.A. (2019). A model of managing business constraints. *Management Problems*, 4, 43–49 (in Russian).]
- Губко М.В., Новиков Д.А. (2005). Теория игр в управлении организационными системами. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 138 с. [Gubko M.V., Novikov D.A. (2005). *Game theory in the management of organizational systems*. Moscow: V.A. Trapeznikov Institute of Management Problems, RAS (in Russian).]
- Зак Ф.Л. (2021). О некоторых моделях альтруистического поведения // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 1 (49). С. 12–52. [Zak F.L. (2021). On some models of altruistic behavior. *Journal of the New Economic Association*, 1 (49), 12–52 (in Russian).]
- Новиков Д.А. (2008). Математические модели формирования и функционирования команд. М.: Физматлит. 184 с. [Novikov D.A. (2008). *Mathematical models of the formation and functioning of teams*. Moscow: Fizmatlit (in Russian).]
- Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. (2013). Рефлексия и управление: математические модели. М.: Физматлит. 412 с. [Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. (2013). *Reflection and control: Mathematical models*. Moscow: Fizmatlit (in Russian).]
- Скаржинская Е.М., Цуриков В.И. (2017а). Модель коллективных действий. Часть 1. Равновесие, справедливость, эффективность // *Экономика и математические методы*. № 2. С. 118–133. [Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I. (2017a). Model of collective action. Part 1: Equilibrium, justice, efficiency. *Economics and Mathematical Methods*, 53, 2, 118–133 (in Russian).]
- Скаржинская Е.М., Цуриков В.И. (2017б). Модель коллективных действий. Часть 2. Лидирующая коалиция // *Экономика и математические методы*. № 4. С. 89–104. [Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I. (2017b). Model of collective action. Part 2: The leading coalition. *Economics and Mathematical Methods*, 53, 4, 89–104 (in Russian).]
- Скаржинская Е.М., Цуриков В.И. (2019). Моделирование коллективных действий: значимость кооперативных соглашений // *Российский журнал менеджмента*. № 3. С. 337–366. [Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I. (2019).

³ Различные случаи координации действий между отдельными членами коллектива рассмотрены нами в работах (Скаржинская, Цуриков, 2017а, 2017б, 2021а).

- Modelling of collective actions: The significance of cooperative agreements. *Russian Management Journal*, 17, 3, 337–366 (in Russian).]
- Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.** (2021a). Эндогенное формирование в команде лидерства по Штакельбергу. Эффект образования коалиции // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 1 (49). С. 53–79. [Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I. (2021a). Endogenous Stackelberg leadership within a team. The coalition effect. *Journal of the New Economic Association*, 1 (49), 53–79 (in Russian).]
- Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.** (2021b). Лидер по Штакельбергу в модели коллективных действий // *Экономика и математические методы*. № 4. С. 117–128. [Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I. (2021b). Stackelberg leader in a collective action model. *Economics and Mathematical Methods*, 57, 4, 117–128 (in Russian).]
- Anderson S., Engers M.** (1992). Stackelberg versus Cournot oligopoly equilibrium. *International Journal of Industrial Organization*, 1, 127–135.
- Arbak E., Villeval V.** (2013). Voluntary leadership: Motivation and influence. *Social Choice and Welfare*, 3, 635–662.
- Hamilton J., Slutsky S.** (1990). Endogenous timing in duopoly games: Stackelberg or Cournot equilibria. *Games and Economic Behavior*, 2, 29–46.
- Ino H., Matsumura T.** (2012). How many firms should be leaders? Beneficial concentrations revisited. *International Economic Review*, 4, 1323–1340.
- Julien L.** (2018). Stackelberg games. *Handbook of Game Theory and Industrial Organization*, 1, 10, 261–311.
- Kim J.** (2012). Endogenous leadership in incentive contracts. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 1, 256–266.
- Linster B.** (1993). Stackelberg rent-seeking. *Public Choice*, 2, 307–321.
- Préget R., Nguyen-Van P., Willinger M.** (2016). Who are the voluntary leaders? Experimental evidence from a sequential contribution game. *Theory and Decision*, 4, 581–599.
- Stackelberg H.** (1934). *Marktform und Gleichgewicht*. Wien, Berlin: J. Springer.

The influence of the agents' personal qualities on the exogenous formation of Stackelberg leadership in a collective action model

© 2022 E.M. Skarzhinskaya, V.I. Tsurikov

E.M. Skarzhinskaya,

Kostroma State University, Kostroma, Russia; e-mail: yelena.skarzhinsky@gmail.com

V.I. Tsurikov,

Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russia; e-mail: tsurikov@inbox.ru

Received 18.05.2022

Abstract. Within a mathematical modelling framework, we analyse conditions that prevent a self-governed collective from breaking out of an inefficient Nash equilibrium and attaining Pareto-preferable outcomes. It is assumed that by each member's individual efforts aggregate income is created being equally distributed among members of a collective. Effort invested by each agent is complementary, i.e. increased effort by any individual agent increases marginal income produced by any other agent. Each agent's goal is to maximize their own individual gain. We propose a model built for the collective income function with constant income elasticity per each agent's effort that abides to the condition of decreasing returns. All members of the collective wield identical influence on the size of the income. Within a timing decisions mechanism, each member of the collective faces the dilemma: whether to deploy an active strategy i.e., put in their effort during the first time period, or opt for a follower's strategic timing and invest their effort during the second time period. The follower's strategy yields greater gains, but only when some other agents choose the active strategy. In the event that not a single active agent appears, the entire collective falls into the trap of inefficient Nash equilibrium. We show that as the number of active agents grows, cumulate gains increase for all members of the collective. Maximum gains obtainable by a follower exceed the highest gain of an active agent, and are received only if the follower is the last agent remaining. It follows, therefore, that this maximum winner must be a risk-taking, egotistic optimist.

Keywords: collective action, Stackelberg leader, followers, Nash equilibrium, Pareto-preferable outcome, Pareto efficiency.

JEL Classification: C02, D23.

For reference: **Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I.** (2022). The influence of the agents' personal qualities on the exogenous formation of Stackelberg leadership in a collective action model. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 4, 113–122. DOI: 10.31857/S042473880023021-2