

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Приближенный расчет параметров ликвидационной стоимости портфеля с учетом асимметрии ее распределения

© 2023 А.Н. Балабушкин

А.Н. Балабушкин,

Компания БКС, Москва, e-mail: BalabushkinAN@msk.bcs.ru

Поступила в редакцию 24.06.2022

Аннотация. Рассматривается граничная задача для однородного диффузионного процесса в предположении малости случайных возмущений. Показывается, что среднее, вторые и третьи центральные моменты вектора состояния в момент достижения заданной плоскости в фазовом пространстве могут быть приближенно получены как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с дополнительным преобразованием (проецированием на границу). Для квантиля линейной комбинации координат процесса дается разложение второго порядка по степеням малого параметра, характеризующего уровень случайных возмущений. В первом приближении это разложение соответствует гауссовскому распределению, следующий член учитывает асимметрию. Результат распространяется на процесс с несколькими границами, при достижении каждой из которых уравнение процесса изменяется. Такая модель описывает ликвидацию портфеля финансовых инструментов в предположении, что скорость закрытия каждой позиции является случайным процессом. Приводятся два примера. В первом — портфель состоит из линейных инструментов (таких как акции, фьючерсы), цены описываются коррелированными геометрическими броуновскими движениями, скорости закрытия позиций постоянны, но со случайными флуктуациями из-за ежедневных колебаний биржевых оборотов. В этом случае приближенные выражения для среднего, дисперсии, коэффициента асимметрии, VaR и $CVaR$ финансового результата ликвидации портфеля даются в явном виде. Во втором примере рассматривается ликвидация биржевой опционной позиции в предположении, что скорость закрытия изменяется в зависимости от отношения цены базового актива к страйковой цене опциона. Результаты численных расчетов показывают, что учет асимметрии распределения финансового результата существенно повышает точность оценок.

Ключевые слова: диффузионный процесс, граничная задача, геометрическое броуновское движение, ликвидационная стоимость портфеля, опцион, Value-at-Risk, разложение Корниша–Фишера.

Классификация JEL: C02, C32, G20, G32.

Для цитирования: Балабушкин А.Н. (2023). Приближенный расчет параметров ликвидационной стоимости портфеля с учетом асимметрии ее распределения // Экономика и математические методы. Т. 59. № 1. С. 105–118. DOI: 10.31857/S042473880024878-4

1. ВВЕДЕНИЕ

Клиринговые организации с определенной периодичностью проводят контроль обеспеченности портфелей участников клиринга, а те, в свою очередь, проверяют портфели своих клиентов. При использовании меры риска Value-at-Risk (Jorion, 2007) возможные потери оцениваются величиной $VaR(\tau, \alpha) = m_0 - q(\tau, \alpha)$, а условием обеспеченности портфеля является $q(\tau, \alpha) \geq 0$, где m_0 — текущая стоимость портфеля, $q(\tau, \alpha)$ — квантиль заданного порядка $\alpha \in (0, 1)$ распределения стоимости портфеля в момент $\tau > 0$. Временной горизонт τ складывается из:

- 1) продолжительности периода между проверками условия обеспеченности;
- 2) срока, предоставляемого участнику клиринга для самостоятельных операций по устранению дефицита обеспечения, если таковой выявлен (довнесением активов и/или проведением соответствующих сделок);
- 3) интервала, в течение которого клиринговая организация считает возможным ликвидировать портфель в принудительном порядке, т.е. совершить закрывающие сделки и, в случае необходимости, распродать активы портфеля.

До недавнего времени общепринятым был стандартизованный подход, в котором все компоненты τ устанавливались едиными для всех участников клиринга вне зависимости от состава портфеля. Типично срок τ составлял 1 или 2 дня. Данный способ не учитывал особенностей больших позиций, закрытие которых происходит частями и не укладывается в стандартный период. В настоящее время рискам такого рода (рискам концентрации) уделяется значительное внимание в регулировании клиринговой деятельности. Дополнительным фактором, потребовавшим изменения стандартизованного подхода, стало включение в сферу деятельности клиринговых организаций внебиржевых рынков (ОТС), для которых характерны более длительные сроки и специфические процедуры закрытия позиций.

В большинстве случаев учет рисков больших позиций сводится к модификации стандартных алгоритмов оценки риска портфеля для фиксированного временного горизонта. Так, Chicago Mercantile Exchange включила в свою методологию Standard Portfolio Analysis of Risk надбавку за концентрацию (concentration charge), которая возникает в случае превышения размером позиции порога, зависящего от среднесуточного объема торгов соответствующим инструментом¹. В методологии SIMM² (Standard Initial Margin Model), разработанной International Swaps and Derivatives Association для ОТС рынка, при превышении позицией i определенного порога вводится множитель (concentration risk factor) $CR_i = \max\left(1, \sqrt{\tau_i / \tau}\right)$, где τ_i во столько раз превышает стандартный срок τ , во сколько раз размер позиции превышает порог. Далее риск по портфелю рассчитывается с помощью $VaR_i(\tau_i, \alpha) = VaR_i(\tau, \alpha) CR_i$ по обычной формуле для дисперсии суммы коррелированных случайных величин (variance-covariance), но с заменой коэффициента корреляции ρ_{ij} между ценами инструментов i, j на $\lambda_{ij} \rho_{ij}$, где $\lambda_{ij} = \sqrt{\min(\tau_i, \tau_j) / \max(\tau_i, \tau_j)}$.

Наиболее основательно к проблеме больших позиций подошла бразильская биржа B3³, разработав новый подход CORE⁴ (Closeout Risk Evaluation). Процесс ликвидации каждой позиции представляется в виде последовательности $\{u_k\}$, $\sum_k u_k = 1$, элементы которой обозначают доли позиции, закрываемые в дни $k = 1, 2, \dots$ (стратегия ликвидации). Одновременно с оценкой риска определяется наилучшая в некотором смысле стратегия ликвидации портфеля. Данный подход можно назвать минимаксным: каждой стратегии ликвидации сопоставляются потери в наихудшем сценарии поведения риск-факторов (цен, процентных ставок, волатильностей и др.) из заранее определенного множества сценариев, а оптимальная стратегия характеризуется наименьшими такими потерями. При этом возникают особые требования к формированию множества сценариев во избежание чрезмерно больших отклонений риск-факторов.

Оптимальная ликвидация портфеля линейных инструментов с более традиционным вероятностным критерием рассмотрена в (Kim, 2014; Avellaneda et al., 2015), где при определенных условиях показано, что оптимальные стратегии являются кусочно-постоянными и могут быть получены как решение задачи квадратичного программирования.

Алгоритм CORE вычислительно затратен, так как анализируется большое число сценариев (как правило, не менее 10 тыс.) и решаются соответствующие задачи оптимизации. В настоящее время применение торговых роботов требует непрерывного контроля обеспеченности портфелей. Относительно простые модификации стандартизованных алгоритмов, упомянутые ранее, позволяют получать неоптимизированную оценку риска портфеля (т.е. оценку сверху), что приемлемо с практической точки зрения.

В данной работе задача оптимизации не ставится, стратегия ликвидации считается заданной, в частности, это может быть закрытие каждой позиции с постоянной скоростью. Акцент делается на оценке риска портфеля с учетом коэффициента асимметрии распределения финансового результата. Наряду с VaR рассматривается мера риска Expected Shortfall или $CVaR$, равная

$$CVaR(\alpha) = m_0 - Q(\alpha), \quad Q(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{q(\alpha)} z f(z) dz,$$

¹ <https://www.cmegroup.com/clearing/risk-management/span-overview/span-2-methodology.html>

² www.isda.org

³ Некоторые указания на способ, применяемый B3, содержатся в (De Genaro, 2016) и B3 Clearinghouse Risk Management Manual (<https://www.b3.com.br/data/files/1A/D2/8A/FC/0974D710EEBC50D7AC094EA8/B3%20Clearinghouse%20Risk%20Management%20Manual%20-%2020211122.pdf>).

⁴ Описание базовых принципов методологии CORE содержится в работах (Avellaneda, Cont, 2013; Vicente et al., 2015).

где $f(z)$ — плотность функции распределения финансового результата (в предположении ее существования), при этом условием обеспеченности является $Q(\alpha) \geq 0$.

2. ЛИКВИДАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЗИЦИЙ С ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО ПОСТОЯННЫМИ СКОРОСТЯМИ

Примем следующую модель процесса ликвидации: размер закрываемой позиции в день k равен $u_k = u\Delta t + v\eta_k \sqrt{\Delta t}$, где u, v — константы, η_k — независимые нормально распределенные случайные величины со средним 0 и дисперсией 1, $\Delta t = 1/252$ (исходя из 252 торговых дней в году). Первое слагаемое предполагает, что ликвидация позиции данного объема не оказывает существенного влияния на цены. Значение устанавливается экспертно, например, это может быть 10% квантиля порядка $\alpha_{volume} = 0,25$ дневных оборотов торгов за последние 3 месяца. Второе слагаемое описывает случайные флуктуации, вызванные колебаниями оборота торгов день ото дня. Отрицательные значения соответствуют обороту ниже квантиля, а в случае повышенного оборота производится компенсация имеющегося отставания от плана (поэтому для η_k принято симметричное распределение). Строго говоря, в этой модели имеется вероятность получить отрицательную величину u_k , т.е. в некоторые дни вместо закрытия нарастить позицию, однако типично значения параметра v не превышают 0,01–0,02 и эта вероятность пренебрежимо мала.

Пусть портфель состоит из n компонент, цены которых в момент $t = 0$ равны $S_i > 0$, количества равны X_i , $i = 1, \dots, n$. Количества могут быть как положительными, так и отрицательными. Задается время $t_0 \geq 0$, в течение которого никаких действий с портфелем не совершается. Для $t > t_0$ каждая из компонент портфеля изменяется в соответствии с уравнением

$$dX_i^\varepsilon(t) = -u_i dt + \sqrt{\varepsilon} v_i u_i dW_i(t), \quad X_i^\varepsilon(t_0) = X_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где u_i — постоянные величины того же знака, что и начальные количества X_i , $v_i > 0$ — постоянные величины, $W_i(t)$ — винеровские процессы, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ — вспомогательный параметр. Для применения приведенных далее результатов следует положить $\varepsilon = 1$. Уравнение (1) является непрерывным аналогом приведенной выше модели ликвидации.

Изменение цен для $t > 0$ описывается многомерным геометрическим броуновским движением с нулевым сносом

$$dS_i^\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} S_i^\varepsilon(t) \sum_{j=1}^k B_{ij} dW_{n+j}(t), \quad S_i^\varepsilon(0) = S_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где B — матрица размера $n \times k$ с постоянными элементами; $\delta_i = \sqrt{D_{ii}} > 0$, $D = BB^T$; T — знак транспонирования. Все винеровские процессы $W_i(t)$, $i = 1, \dots, n+k$, предполагаются независимыми. Вводя винеровские процессы $W_i(t) = \frac{1}{\delta_i} \sum_{j=1}^k B_{ij} W_{n+j}(t)$, уравнение (2) можно представить в виде

$$dS_i^\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} \delta_i S_i^\varepsilon(t) dW_i'(t). \quad (3)$$

Величины δ_i являются волатильностями цен $S_i^\varepsilon(t)$, $\rho_{ij} = D_{ij} / \delta_i \delta_j$ — корреляциями относительных изменений цен. Эти параметры определяются по истории цен статистическими методами, и в этих же терминах формулируется результат.

Каждое из уравнений (1) описывает процесс ликвидации соответствующей компоненты портфеля до момента $t_0 + \tau_i^\varepsilon$, где

$$\tau_i^\varepsilon = \inf \left(s \geq 0 : X_i^\varepsilon(t_0 + s) = 0 \right) = \inf_{s \geq 0} \left(W_i(t_0 + s) - W_i(t_0) = (s - \tau_i) / \sqrt{\varepsilon} v_i \right),$$

$\tau_i = X_i / u_i$ — период ликвидации позиции i при отсутствии случайных возмущений. Как известно, $P(\tau_i^\varepsilon < \infty) = 1$ (Липцер, Ширяев, 1974). Обозначим $Y_i^\varepsilon(t)$ денежную сумму, которая образуется в процессе ликвидации компоненты i к моменту t в интервале $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_i^\varepsilon$. Будем предполагать, что компоненты портфеля могут быть двух типов:

1) акция — в этом случае $Y_i^\varepsilon(t)$ определяется уравнением

$$dY_i^\varepsilon(t) = -S_i^\varepsilon(t) dX_i^\varepsilon(t), \quad Y_i^\varepsilon(t_0) = 0; \quad (4)$$

2) фьючерс — тогда финансовый результат образуется в результате накопления вариационной маржи

$$dY_i^\varepsilon(t) = X_i^\varepsilon(t) dS_i^\varepsilon(t), \quad Y_i^\varepsilon(t_0) = X_i \left[S_i^\varepsilon(t_0) - S_i \right]. \quad (5)$$

Начальное условие в (5) описывает вариационную маржу до начала процесса ликвидации. С учетом предположения о независимости винеровских процессов $W'_i(t)$, $W_i(t)$

$$X_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon)S_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) - X_iS_i^\varepsilon(t_0) = \int_{t_0}^{t_0 + \tau_i^\varepsilon} X_i^\varepsilon(t)dS_i^\varepsilon(t) + \int_{t_0}^{t_0 + \tau_i^\varepsilon} S_i^\varepsilon(t)dX_i^\varepsilon(t), \quad X_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) = 0,$$

поэтому результат ликвидации для акции $Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon)$ можно представить в виде решения уравнения (5) с начальным условием $Y_i^\varepsilon(t_0) = X_iS_i^\varepsilon(t_0)$, а результат для фьючерса — в виде решения уравнения (4) с начальным условием $Y_i^\varepsilon(t_0) = -X_iS_i^\varepsilon(t_0)$.

Необходимо найти: среднее m^ε , дисперсию V^ε , третий центральный момент M^ε , квантиль $q^\varepsilon(\alpha)$ и ожидаемые потери $Q^\varepsilon(\alpha)$ распределения случайной величины $Y^\varepsilon = \sum_{i=1}^n Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon)$.

Введем обозначения. Пусть:

$$m_0 = \sum_{\text{акции}} X_iS_i, \quad V = \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij}\lambda_{ij}\omega_i\omega_j, \quad \omega_i = X_iS_i\delta_i\sqrt{t_0 + \tau_i}/3,$$

$$\lambda_{ij} = (2\tau_{ij}^{\max})^{-1} \left[6t_0\tau_{ij}^{\max} + \tau_{ij}^{\min}(3\tau_{ij}^{\max} - \tau_{ij}^{\min}) \right] / \sqrt{(3t_0 + \tau_i)(3t_0 + \tau_j)},$$

$$\tau_{ij}^{\max} = \max(\tau_i, \tau_j), \quad \tau_{ij}^{\min} = \min(\tau_i, \tau_j),$$

M — величина, определенная в Приложении, п. 1; $\sigma = \sqrt{V}$, $\chi = M\sigma^{-3}$; $\Phi(r)$, $\phi(r)$, $\beta_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ — функция стандартного нормального распределения, ее плотность и квантиль порядка α ;

$$\tilde{q}^\varepsilon(\alpha) = m_0 + \sqrt{\varepsilon}\sigma\beta_\alpha + \varepsilon\chi\sigma(\beta_\alpha^2 - 1)/6, \quad (6)$$

$$\tilde{Q}^\varepsilon(\alpha) = m_0 - \sqrt{\varepsilon}\sigma\phi(\beta_\alpha)/\alpha - \varepsilon\chi\sigma\beta_\alpha\phi(\beta_\alpha)/6\alpha. \quad (7)$$

Утверждение 1.

I. $m^\varepsilon = m_0$.

II. Если все моменты τ_i различны, то $V^\varepsilon = \varepsilon V + \varepsilon^2\Delta_1^\varepsilon$, $M^\varepsilon = \varepsilon^2 M + \varepsilon^3\Delta_2^\varepsilon$, где Δ_1^ε , Δ_2^ε ограничены для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ при некотором $0 < \varepsilon_1 \leq 1$; при условии $V > 0$ для любого $\alpha < 0,5$ найдется $0 < \varepsilon_1(\alpha) \leq 1$ такое, что

$$q^\varepsilon(\alpha) = \tilde{q}^\varepsilon(\alpha) + \varepsilon^{3/2}\Delta_3^\varepsilon(\alpha), \quad (8)$$

$$Q^\varepsilon(\alpha) = \tilde{Q}^\varepsilon(\alpha) + \varepsilon^{3/2}\Delta_4^\varepsilon(\alpha), \quad (9)$$

где $\Delta_3^\varepsilon(\alpha)$, $\Delta_4^\varepsilon(\alpha)$ ограничены для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1(\alpha)$.

Выражения (6), (7) без последних слагаемых соответствуют нормальному распределению. В этом приближении случайная величина Y^ε характеризуется средним m_0 и дисперсией εV . Ликвидационные стоимости отдельных компонент $Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon)$ имеют средние $m_i^\varepsilon = X_iS_i$ для акций и $m_i^\varepsilon = 0$ для фьючерсов, дисперсии приблизительно равны $\varepsilon\omega_i^2$, а корреляции — $\rho_{ij}\lambda_{ij}$. Коэффициенты λ_{ij} обладают свойствами: $\lambda_{ij} = 1$ для любых $t_0 \geq 0$, $\tau_j = \tau_i$; если увеличивать τ_j , начиная со значения τ_i , то λ_{ij} убывает. При $t_0 = 0$

$$\lambda_{ij} = \left(\frac{3}{2} - \frac{\tau_{ij}^{\min}}{2\tau_{ij}^{\max}} \right) \sqrt{\frac{\tau_{ij}^{\min}}{\tau_{ij}^{\max}}} \geq \sqrt{\frac{\tau_{ij}^{\min}}{\tau_{ij}^{\max}}},$$

где справа указан упомянутый в разд. 1 аналогичный коэффициент методологии SIMM.

Последние слагаемые в (6), (7) являются поправками к гауссовской аппроксимации, обусловленными наличием у рассматриваемого распределения асимметрии $\chi^\varepsilon = M^\varepsilon(V^\varepsilon)^{-3/2} \approx \sqrt{\varepsilon}\chi$. В (Boudt, Peterson, Croux, 2008) посредством комбинирования отрезков разложений Эджворта для распределений и Корниша—Фишера для квантилей получены уточнения гауссовских аппроксимаций VaR и $CVaR$, содержащие коэффициенты асимметрии и эксцесса. Здесь критерием обрыва разложений является не количество учитываемых моментов распределения, а малость поправки по ε .

Величины v_i не входят в приближенные выражения, т.е. случайная неравномерность процесса ликвидации вносит эффект более высокого порядка малости по ε .

Вклад коэффициента асимметрии в результат становится существенным только для больших сроков закрытия позиций и высоких ценовых волатильностей. Более всего это соответствует депрессивному состоянию рынка с пониженными оборотами в условиях кризиса.

Таблица 1

X_i	48	-65	-84	-30
S_i	33	30	10	50
$u_i/252$	4	-5	-6	-2
δ_i	0,3	0,35	0,4	0,45

Таблица 2

Метод	m^ε	$\sigma^\varepsilon = \sqrt{V^\varepsilon}$	χ^ε	$VaR^\varepsilon(\alpha)$		$CVaR^\varepsilon(\alpha)$	
Монте-Карло	-1205,7	201,44	-0,2069	600,54		678,28	
Аппроксимация	$2,4 \times 10^{-4}$	$3,8 \times 10^{-3}$	1,1%	8,9%	0,5%	10,8%	1,1%

Таблица 3

Метод	m^ε	σ^ε	χ^ε	$VaR^\varepsilon(\alpha)$		$CVaR^\varepsilon(\alpha)$	
Монте-Карло	-1116,0	196,00	-0,2097	584,40		660,64	
Аппроксимация	$3,8 \times 10^{-5}$	$5,1 \times 10^{-3}$	0,2%	9,0%	0,7%	11,9%	1,3%

Пример 1. Пусть портфель состоит из четырех позиций (табл. 1).

Первые три являются позициями в акциях, четвертая — во фьючерсе. В третьей строке указаны размеры позиций, которые можно закрыть за 1 день. Корреляционная матрица имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0,56 & 0,81 & 0,69 \\ 0,56 & 1 & 0,86 & 0,80 \\ 0,81 & 0,86 & 1 & 0,94 \\ 0,69 & 0,80 & 0,94 & 1 \end{vmatrix}$$

Период t_0 принят равным $1/252$ (т.е. 1 дню), $v_i \equiv 0,02$ для всех инструментов.

В табл. 2 приведены результаты, полученные методом Монте-Карло для 10^6 испытаний с шагом $\Delta t = 0,1/252$, и относительные погрешности аппроксимаций. Величины $VaR^\varepsilon(\alpha)$ и $CVaR^\varepsilon(\alpha)$ рассчитаны для $\alpha = 0,003$. Точность оценок $\widehat{VaR}^\varepsilon(\alpha) = m_0 - \tilde{q}^\varepsilon(\alpha)$ и $\widehat{CVaR}^\varepsilon(\alpha) = m_0 - \tilde{Q}^\varepsilon(\alpha)$ указана в двух вариантах: в гауссовском приближении (значение слева) и по полным формулам (6), (7) с учетом асимметрии (значение справа).

В данном примере учет асимметрии приводит к снижению относительной погрешности оценок $\widehat{VaR}^\varepsilon(\alpha)$, $\widehat{CVaR}^\varepsilon(\alpha)$ приблизительно в 10 раз.

Условие различия моментов τ_i используется при доказательстве более общего утверждения 3, приведенного в следующем разделе, а утверждение 1 выводится как следствие. По-видимому, в частном случае задачи данного раздела это условие не является необходимым, однако доказательство получено только для первого соотношения утверждения 1, п. I.

Утверждение 2. $V^\varepsilon = \varepsilon V + \varepsilon^2 \Delta_1^\varepsilon$, где Δ_1^ε ограничена для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ при некотором $0 < \varepsilon_1 \leq 1$.

С практической точки зрения данный вопрос представляется второстепенным, поскольку расчеты различных модельных примеров не выявляют каких-либо особенностей при совпадении некоторых или всех моментов τ_i .

Пример 2. Заменим в примере 1 первую строку таблицы.

X_i	48	-60	-90	-30
-------	----	-----	-----	-----

Тогда $\tau_1 = \tau_2 = 12/252$ и $\tau_3 = \tau_4 = 15/252$. Результаты расчетов по формулам утверждения 1 показывают, что погрешности остаются приблизительно на прежних уровнях (табл. 3).

3. ПРОЦЕССЫ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ НА ГРАНИЦАХ

Сформулируем задачу разд. 2 следующим образом. Имеется процесс $(X_i^\varepsilon(t), S_i^\varepsilon(t), Y_i^\varepsilon(t))_{i=1,n}$, описываемый уравнениями (1), (3), (4), (5). В случайные моменты достижения процессом границ в фазовом пространстве $X_i^\varepsilon(t) = 0$ уравнения для соответствующих координат процесса изменяются на $dX_i^\varepsilon(t) = 0$, $dS_i^\varepsilon(t) = 0$, $dY_i^\varepsilon(t) = 0$, что приводит к остановке этих координат. Требуется найти

распределение линейной комбинации координат вектора состояния процесса в момент достижения процессом последней из границ.

В качестве обобщения предположим, что n -мерный случайный процесс $\zeta^\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$, описывается однородным стохастическим уравнением

$$d\zeta^\varepsilon(t) = f_1(\zeta^\varepsilon(t))ds + \sqrt{\varepsilon}\delta_1(\zeta^\varepsilon(t))dW(t), \quad \zeta^\varepsilon(0) = x, \quad (10)$$

где x — известное начальное состояние, $W(t)$ — l -мерный винеровский процесс с независимыми компонентами, элементы вектора $f_1(\zeta)$ и матрицы $\delta_1(\zeta)$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие А. $f_{1i}(\zeta), \delta_{1ij}(\zeta) \in C^\infty(R^n)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, l$.

Условие Б. При некотором $K > 0$ для любых $\zeta, \eta \in R^n$

$$\sum_{i=1}^n f_{1i}^2(\zeta) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \delta_{1ij}^2(\zeta) \leq K \left(1 + \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \right),$$

$$\sum_{i=1}^n \left(f_{1i}(\zeta) - f_{1i}(\eta) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \left(\delta_{1ij}(\zeta) - \delta_{1ij}(\eta) \right)^2 \leq K \sum_{i=1}^n (\zeta_i - \eta_i)^2.$$

Условие Б обеспечивает существование и единственность решения уравнения (10), траектории процесса $\zeta^\varepsilon(t)$ непрерывны (Липцер, Ширяев, 1974).

Невозмущенный процесс $\zeta(t)$ задается уравнением $\dot{\zeta}(t) = f_1(\zeta(t))$, $\zeta(0) = x$.

Определим случайный процесс с переключениями $\xi^\varepsilon(t)$ следующим образом. Пусть векторы $\pi_\theta \in R^n$ и константы r_θ задают плоскости $\Pi_\theta = \{\zeta \in R^n : \pi_\theta^T \zeta = r_\theta\}$, $\theta = 1, \dots, \Theta$. До случайного момента $\tau_1^\varepsilon = \inf(t \geq 0 : \zeta^\varepsilon(t) \in \bigcup_{\theta=1}^\Theta \Pi_\theta)$ ($\inf \emptyset = T$) включительно процесс $\xi^\varepsilon(t)$ совпадает с $\zeta^\varepsilon(t)$. После этого состояние $\xi^\varepsilon(\tau_1^\varepsilon)$ становится начальным для уравнения вида (10), но с другими парами функций $(f_*(\xi), \delta_*(\xi))$, которые зависят от того, какая именно граница была достигнута (или несколько границ одновременно). Достигнутые границы исключаются из определения последующих моментов остановки. После каждого момента остановки функции $(f_*(\xi), \delta_*(\xi))$ изменяются в зависимости от того, какие границы и в какой последовательности достигались ранее.

Предполагается, что все пары $(f_*(\xi), \delta_*(\xi))$ удовлетворяют условиям, аналогичным А и Б. Если некоторая траектория процесса $\xi^\varepsilon(t)$ до наступления момента T достигает всех Θ плоскостей, то обозначим через τ_Θ^ε — момент достижения последней границы (номер этой границы не обязательно Θ), иначе положим $\tau_\Theta^\varepsilon = T$; $Y^\varepsilon = H \xi^\varepsilon(\tau_\Theta^\varepsilon)$, где H — заданная строка размерности n . Задача, как и в разд. 2, заключается в нахождении среднего m^ε , дисперсии V^ε , третьего центрального момента M^ε , квантиля $q^\varepsilon(\alpha)$ и ожидаемых потерь $Q^\varepsilon(\alpha)$ распределения случайной величины Y^ε . Положим $\tau_0 = \tau_0^\varepsilon = 0$, $\tau_{\Theta+1} = \tau_{\Theta+1}^\varepsilon = T$ и добавим еще одно условие.

Условие В. Предположим, что невозмущенный процесс $\xi(t)$, определяемый последовательностью уравнений

$$\dot{\xi}(t) = f_\theta(\xi(t)), \quad t \in [\tau_{\theta-1}, \tau_\theta], \quad \theta = 1, \dots, \Theta + 1, \quad (11)$$

достигает границ $\Pi_1, \dots, \Pi_\Theta$ в указанной последовательности в моменты $0 < \tau_1 < \dots < \tau_\Theta < T$, причем каждое достижение происходит нетангенциально: $b_\theta = \pi_\theta^* \dot{\xi}_\theta \neq 0$, где $\dot{\xi}_\theta = f_\theta(\xi(\tau_\theta))$, $\theta = 1, \dots, \Theta$.

Пусть функции $\delta_\theta(\xi)$ образуют пары с функциями $f_\theta(\xi)$, т.е. отрезки случайного процесса $\xi^\varepsilon(t)$ при условии последовательного достижения плоскостей $\Pi_1, \dots, \Pi_\Theta$ в моменты $0 < \tau_1^\varepsilon < \tau_2^\varepsilon < \dots < \tau_\Theta^\varepsilon < T$ описываются уравнениями:

$$d\xi^\varepsilon(t) = f_\theta(\xi^\varepsilon(t))ds + \sqrt{\varepsilon}\delta_\theta(\xi^\varepsilon(t))dW(t), \quad t \in [\tau_{\theta-1}^\varepsilon, \tau_\theta^\varepsilon], \quad \theta = 1, \dots, \Theta + 1. \quad (12)$$

Как следует из Приложения, п. 2, лемма 1 (Fleming, 1974, лемма 2.1), при малых ε траектории $\xi^\varepsilon(t)$ в окрестности невозмущенной траектории $\xi(t)$ дают основной вклад в распределение случайной величины Y^ε , поэтому для формулировки приближенного результата из всех пар $(f_*(\xi), \delta_*(\xi))$ достаточно задать $(f_\theta(\xi), \delta_\theta(\xi))$, $\theta = 1, \dots, \Theta$.

Условие Г. Предположим, что распределение случайной величины Y^ε , определяемой уравнением (12) для $\theta = \Theta$ при начальном условии $\xi^\varepsilon(\tau_{\Theta-1}^\varepsilon) = \xi(\tau_{\Theta-1})$, имеет плотность.

Введем следующие обозначения:

$$A_\theta(\xi) = \left\| A_{\theta j}^i(\xi) \right\|_{i,j=1}^n, \quad A_{\theta j}^i(\xi) = \frac{\partial f_{\theta i}(\xi)}{\partial \xi_j}, \quad (i — номер строки),$$

$$a_\theta(\xi) = \left\| a_{\theta ij}(\xi) \right\|_{i,j=1}^n = \delta_\theta(\xi) \delta_\theta^*(\xi), \quad c_{\theta k}^{\bar{j}}(\xi) = \partial a_{\theta ij}(\xi) / \partial \xi_k, \quad F_{\theta ij}^k(\xi) = \partial^2 f_{\theta k}(\xi) / \partial \xi_i \partial \xi_j.$$

Сначала рассмотрим процесс без переключений $\zeta^\varepsilon(t)$. Определим функции $\gamma(t) = \|\gamma_i(t)\|_{i=1}^n$, $\Gamma(t) = \|\Gamma_{ij}(t)\|_{i,j=1}^n$, $M(t) = \|M_{ijk}(t)\|_{i,j,k=1}^n$ как решения обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $[0, T]$, где пока полагаем $\theta = 1$:

$$\dot{\gamma}_i(t) = \sum_{p=1}^n A_{\theta p}^i(\zeta(t)) \gamma_p(t) + 0,5 \sum_{p,q=1}^n F_{\theta pq}^i(\zeta(t)) \Gamma_{pq}(t), \gamma(0) = 0, \quad (13)$$

$$\dot{\Gamma}_{ij}(t) = \sum_{p=1}^n \left\{ A_{\theta p}^i(\zeta(t)) \Gamma_{pj}(t) + A_{\theta p}^j(\zeta(t)) \Gamma_{pi}(t) \right\} + a_{\theta ij}(\zeta(t)), \Gamma(0) = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{ijk}(t) = & \sum_{p=1}^n \left\{ A_{\theta p}^i(\zeta(t)) M_{pj k}(t) + A_{\theta p}^j(\zeta(t)) M_{ip k}(t) + A_{\theta p}^k(\zeta(t)) M_{ij p}(t) \right\} + \\ & + \sum_{p,q=1}^n \left\{ F_{\theta pq}^i(\zeta(t)) \Gamma_{pj}(t) \Gamma_{qk}(t) + F_{\theta pq}^j(\zeta(t)) \Gamma_{pi}(t) \Gamma_{qk}(t) + F_{\theta pq}^k(\zeta(t)) \Gamma_{pi}(t) \Gamma_{qj}(t) \right\} + \\ & + \sum_{p=1}^n \left\{ c_{\theta p}^{ij}(\zeta(t)) \Gamma_{pk}(t) + c_{\theta p}^{ik}(\zeta(t)) \Gamma_{pj}(t) + c_{\theta p}^{jk}(\zeta(t)) \Gamma_{pi}(t) \right\}, \quad M(0) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку $\Gamma_{ij}(t), M_{ijk}(t)$ не меняются при перестановке индексов, имеется $0,5n(n+1)$ уравнений (14) и $n(n+1)(n+2)/6$ уравнений (15). Как показано в Приложении, п. 2, для любого $t \in [0, T]$ среднее, ковариационная матрица и третьи центральные моменты случайного вектора $\zeta^\varepsilon(t)$ могут быть представлены соответственно как

$$\zeta(t) + \varepsilon \gamma(t) + \varepsilon^2 \Delta_5^\varepsilon(t), \varepsilon \Gamma(t) + \varepsilon^2 \Delta_6^\varepsilon(t), \varepsilon^2 M(t) + \varepsilon^3 \Delta_7^\varepsilon(t), \quad (16)$$

где для каждого t найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что функции $\Delta_5^\varepsilon(t), \Delta_6^\varepsilon(t), \Delta_7^\varepsilon(t)$ ограничены для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$.

Переходя к процессу $\zeta^\varepsilon(t)$, сохраним данное определение функций $\gamma(t), \Gamma(t), M(t)$ на полуотрезке $t \in [0, \tau_1)$, переопределив для момента τ_1 . Смысл этого преобразования в том, чтобы от распределения сечения процесса $\zeta^\varepsilon(t)$ в фиксированный момент времени $t = \tau_1$ перейти к распределению на границе Π_1 (проецирование на границу). Пусть по-прежнему $\theta = 1$, $I_{n \times n}$ — единичная матрица, $\Gamma(\tau_\theta^-)$ — предел $\Gamma(t)$ слева в точке τ_θ , $A_\theta = A(\xi(\tau_\theta))$, $\tilde{\xi} = A_\theta \xi$, $\dot{\Gamma}_\theta = A_\theta \Gamma(\tau_\theta^-) + \Gamma(\tau_\theta^-) A_\theta^T + a_\theta(\xi(\tau_\theta))$, $L_\theta = I_{n \times n} - \tilde{\xi}_\theta \pi_\theta^T / b_\theta$, $\mu = L \tilde{\xi} / b^2$, $Z_\theta = L_\theta \dot{\Gamma}_\theta L_\theta^T$, $z_\theta = L_\theta \Gamma(\tau_\theta^-) \pi_\theta$.

Преобразование имеет вид:

$$\gamma(\tau_\theta) = -\frac{1}{b_\theta} L_\theta A_\theta \Gamma(\tau_\theta^-) \pi_\theta + 0,5 \pi_\theta^T \Gamma(\tau_\theta^-) \pi_\theta \mu_\theta + L_\theta \gamma(\tau_\theta^-), \quad (17)$$

$$\Gamma(\tau_\theta) = L_\theta \Gamma(\tau_\theta^-) L_\theta^T, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} M_{ijk}(\tau_\theta) = & \mu_\theta^i z_{\theta j} z_{\theta k} + \mu_\theta^j z_{\theta i} z_{\theta k} + \mu_\theta^k z_{\theta i} z_{\theta j} - \left(z_{\theta i} Z_{\theta jk} + z_{\theta j} Z_{\theta ik} + z_{\theta k} Z_{\theta ij} \right) / b_\theta + \\ & + \sum_{p,q,r=1}^n L_{\theta p}^i L_{\theta q}^j L_{\theta r}^k M_{pqr}(\tau_\theta^-), \quad i, j, k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее $\gamma(\tau_1), \Gamma(\tau_1), M(\tau_1)$ становятся начальными для уравнений (13)–(15) на полуотрезке $[\tau_1, \tau_2)$ с заменой $\theta = 1$ на $\theta = 2$ и невозмущенного процесса $\zeta(t)$ на $\xi(t)$. Затем по формулам (17)–(19) делается преобразование для $\theta = 2$:

$$\{\gamma(\tau_\theta^-), \Gamma(\tau_\theta^-), M(\tau_\theta^-)\} \rightarrow \{\gamma(\tau_\theta), \Gamma(\tau_\theta), M(\tau_\theta)\}. \quad (20)$$

Эта процедура повторяется для последующих отрезков $[\tau_{\theta-1}, \tau_\theta]$ до получения финальных значений $\gamma(\tau_\theta), \Gamma(\tau_\theta), M(\tau_\theta)$.

Определим $\tilde{q}^\varepsilon(\alpha), \tilde{Q}^\varepsilon(\alpha)$ выражениями:

$$\tilde{q}^\varepsilon(\alpha) = m + \sqrt{\varepsilon} \sigma \beta_\alpha + \varepsilon \left[\Delta m + \chi \sigma (\beta_\alpha^2 - 1) / 6 \right], \quad (21)$$

$$\tilde{Q}^\varepsilon(\alpha) = m - \sqrt{\varepsilon} \sigma \phi(\beta_\alpha) / \alpha + \varepsilon \left[\Delta m - \chi \sigma \beta_\alpha \phi(\beta_\alpha) / 6 \alpha \right], \quad (22)$$

где $m = H \xi(\tau_\theta)$, $\Delta m = H \gamma(\tau_\theta)$, $V = H \Gamma(\tau_\theta) H^T$, $M = \sum_{i,j,k=1}^n H_i H_j H_k M_{ijk}(\tau_\theta)$, $\sigma = \sqrt{V}$, $\chi = M \sigma^{-3}$.

Утверждение 3.

1. При условиях А–В для некоторого $0 < \varepsilon_1 \leq 1$: $m^\varepsilon = m + \varepsilon \Delta m + \varepsilon^2 \Delta_8^\varepsilon$, $V^\varepsilon = \varepsilon V + \varepsilon^2 \Delta_9^\varepsilon$, $M^\varepsilon = \varepsilon^2 M + \varepsilon^3 \Delta_{10}^\varepsilon$, где $\Delta_8^\varepsilon, \Delta_9^\varepsilon, \Delta_{10}^\varepsilon$ ограничены для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$;

2. При дополнительных условиях Г и $V > 0$ для любого $\alpha < 0,5$ найдется $0 < \varepsilon_1(\alpha) \leq 1$ такое, что

$$q^\varepsilon(\alpha) = \tilde{q}^\varepsilon(\alpha) + \varepsilon^{3/2} \Delta_{11}^\varepsilon(\alpha), \quad (23)$$

$$Q^{\varepsilon}(\alpha) = \tilde{Q}^{\varepsilon}(\alpha) + \varepsilon^{3/2} \Delta_{12}^{\varepsilon}(\alpha), \quad (24)$$

где $\Delta_{11}^{\varepsilon}(\alpha)$, $\Delta_{12}^{\varepsilon}(\alpha)$ ограничены для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1(\alpha)$.

Пример 3. Пусть портфель состоит из короткой позиции по опциону колл, количество $X(0) = -90$, страйк $E = 100$, срок до экспирации $T_{exp} = 12 / 252$. Базовым активом опциона является фьючерсный контракт, цена опциона определяется формулой Блэка $C(F, \Omega, t)$, в которой процентную ставку положим равной нулю. Цена базового фьючерса $F(t)$ и подразумеваемая волатильность $\Omega(t)$ описываются геометрическими броуновскими движениями:

$$dF(t) = \delta F(t) dW_1(t), \quad F(0) = 100, \quad d\Omega(t) = v\Omega(t) dW_2(t), \quad \Omega(0) = 0,4, \delta = 0,4, v = 2,0.$$

Винеровские процессы $W_1(t)$, $W_2(t)$ являются независимыми. Ликвидация позиции начинается в момент $t_0 = 0$ и происходит в соответствии с

$$dX(t) = -u(F(t))dt, \quad u(F) = u_0 \left[0,7 \exp\{-q(F/E - 1)^2\} + 0,3 \right], \quad q = 100 \ln(2), \quad u_0 / 252 = 30.$$

Минимальная скорость закрытия $0,3u_0$ гарантирует ликвидацию позиции за 10 дней, т.е. в пределах срока действия опциона. Если бы цена базового актива сохранялась на уровне страйка, закрытие заняло бы 3 дня. Коэффициент q выбран так, что при смещении F от начального значения на 10% экспонента снижается до 0,5. Данная формула для скорости закрытия выбрана произвольно, но качественно соответствует наблюдаемому на торгах снижению ликвидности серии опционов при удалении цены базового актива от страйка.

Рассмотрим опцион в двух вариантах: а) традиционный (up front); б) маржируемый (futures-style). В первом случае финансовый результат дается уравнением вида (4), во втором — вида (5), с заменой цены акции на цену опциона. Как и в разд. 2, применение формулы Ито к процессу $X(t)C(t)$ показывает, что распределение финансового результата в вариантах а) и б) отличается только сдвигом на начальную стоимость опционов $m_0 = X(0)C(0) = -313,30$.

Предположим, что закрытие опционной позиции осуществляется владельцем портфеля, который в процессе ликвидации непрерывно поддерживает дельта-нейтральную позицию для уменьшения неопределенности финансового результата (базовый фьючерс считаем значительно более ликвидным, чем опцион). Поскольку в вариантах а) и б) фьючерсная позиция изменяется одинаково, вывод о сдвиге распределений на величину m_0 сохраняется.

В уравнении (10) вектор состояния имеет размерность 5: $(X(t), F(t), \Omega(t), Y(t), t)^T$. Функция $f_1(\zeta)$ и матрица $\delta_1(\zeta)$ в вариантах а) и б) имеют вид (опуская индекс 1):

— традиционный вариант — $f = (-u(F), 0, 0, C(F, \Omega, t), 1)^T$; δ — нулевая матрица размера 5×2 , за исключением $\delta(2,1) = \delta F$, $\delta(3,2) = v\Omega$, $\delta(4,1) = -X\Delta\delta F$;

— маржируемый вариант — $f = (-u(F), 0, 0, X(\theta + 0,5\Gamma\delta^2 F^2 + 0,5Volga v^2 \Omega^2), 1)^T$; δ — нулевая матрица размера 5×2 , за исключением $\delta(2,1) = \delta F$, $\delta(3,2) = v\Omega$, $\delta(4,2) = X Vega v\Omega$.

В данном примере $\theta, \Delta, \Gamma, Vega, Volga$ — частные производные стоимости опциона («греки»).

Частные производные в уравнениях (13)–(15) определялись численным методом. Параметры финансового результата получены методом Монте-Карло по 10^6 испытаний с шагом $\Delta t = 0,01 / 252$. Для сопоставимости результатов в первой колонке для Монте-Карло (вариант а) указана величина $m^{\varepsilon} - m_0$, а для аппроксимации (вариант а) — величина $m + \Delta m - m_0$ (табл. 4).

В данном примере аппроксимация при варианте б) оказывается несколько более точной. В обоих вариантах гауссовские приближения $VaR^{\varepsilon}(\alpha)$, $CVaR^{\varepsilon}(\alpha)$ получают заниженными (значения слева), учет асимметрии значительно улучшает оценки.

Закрытие крупной биржевой позиции может быть осуществлено одномоментно, если на рынке присутствуют участники, готовые по запросу дать котировки на большие объемы (в частности, список таких участников предоставляет Московская биржа). Приведенные выше соотношения

Таблица 4

Метод		m^{ε}	σ^{ε}	χ^{ε}	$VaR^{\varepsilon}(\alpha)$		$CVaR^{\varepsilon}(\alpha)$	
Монте-Карло	Вариант а	-0,47	33,73	-0,52	113,40		130,42	
	Вариант б	-0,52	33,71	-0,52	113,48		130,41	
Аппроксимация	Вариант а	-1,38	35,26	-0,40	98,25	113,74	108,90	128,71
	Вариант б	-0,66	34,34	-0,50	95,03	113,73	105,40	129,32

позволяют выразить котировку в вероятностных терминах. Текущая цена опциона составляет $C(0) = 3,48$. Предположим, что имеется возможность закрыть позицию по цене $C = 3,65$, потери по всему портфелю составят 15,20. Такое значение $VaR^e(\alpha)$ получается при $\alpha = 0,307$ (метод Монте-Карло дает 0,305), т.е. при растянутом во времени закрытии на биржевом рынке можно ожидать худшего результата, чем при одномоментном, с вероятностью около 30%.

Вместо формулы Блэка можно использовать какую-либо модель стохастической волатильности, например SABR. Для опционов вне денег аппроксимации становятся все менее удовлетворительными по мере отклонения $F(0)$ от страйка, поскольку зависимость цены опциона от F в окрестности $F(0)$ все заметнее отличается от параболы, а приближения используют частные производные до второго порядка. В этом случае можно в некоторой окрестности $F(0)$ заменить цену опциона на верхнюю параболическую границу (для короткой позиции) или на нижнюю границу (для длинной позиции) и получить оценки сверху для $VaR^e(\alpha)$, $CVaR^e(\alpha)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Пусть компоненты портфеля пронумерованы в порядке неубывания τ_i , т.е. $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_n$. Для совпадающих τ_i порядок следования значения не имеет. Обозначим

$$M = t_0^2 \sum_{i,j,k=1}^n X_i X_j X_k S_i S_j S_k \delta_i \delta_j \delta_k (\delta_i \rho_{ij} \rho_{ik} + \delta_j \rho_{ji} \rho_{jk} + \delta_k \rho_{ki} \rho_{kj}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \sum_{k=j}^n (t_0 M'_{ijk} + M''_{ijk}),$$

где M'_{ijk} , M''_{ijk} равны:

- если $i = j = k$, то $M'_{iii} = 2\tau_i S_i^3 X_i^3 \delta_i^4$, $M''_{iii} = \frac{2}{5} \tau_i^2 S_i^3 X_i^3 \delta_i^4$;
- если $i = j < k$, то $M'_{iik} = \tau_i S_i^2 S_k \delta_i^2 \delta_k \rho_{ik} [2X_i^2 X_k \delta_i + (3\tau_k - \tau_i) X_i^2 u_k (\delta_i + \delta_k \rho_{ik})]$,
 $M''_{iik} = \frac{1}{20} S_i^2 S_k X_i^2 u_k \delta_i^2 \delta_k \rho_{ik} \tau_i^2 [(25\tau_k - 9\tau_i) \delta_i + (15\tau_k - 7\tau_i) \delta_k \rho_{ik}]$;
- если $i < j = k$, то $M'_{ikk} = S_i S_j^2 S_k \delta_i \delta_k^2 \rho_{ik} [2X_i^2 X_k \delta_k \tau_k + (3\tau_k - \tau_i) \tau_i u_k X_k X_i (\delta_k + \delta_i \rho_{ik})]$,
 $M''_{ikk} = 0,5 S_i S_j^2 X_i u_k^2 \delta_i^2 \delta_k^2 \rho_{ik} \tau_i [(20\tau_k^3 - 5\tau_k \tau_i^2 + \tau_i^3) \delta_k + \tau_i (20\tau_k^2 - 15\tau_i \tau_k + 3\tau_i^2) \delta_i \rho_{ik}]$;
- если $i < j < k$, то
 $M'_{ijk} = S_i S_j S_k \delta_i \delta_j \delta_k [(3\tau_j - \tau_i) \tau_i X_k X_i u_j \rho_{ij} (\delta_i \rho_{ik} + \delta_j \rho_{jk}) + (3\tau_k - \tau_j) \tau_j X_i X_j u_k \rho_{jk} (\delta_j \rho_{ij} + \delta_k \rho_{ki})]$,
 $M''_{ijk} = 0,05 \tau_i^2 S_i u_i S_j u_j S_k u_k \delta_i \delta_j \delta_k (p \delta_i \rho_{ij} \rho_{ik} + q \delta_j \rho_{ji} \rho_{jk} + r \delta_k \rho_{ki} \rho_{kj})$,
 $p = 40\tau_i \tau_j \tau_k - 15\tau_k \tau_i^2 - 15\tau_j \tau_i^2 + 6\tau_i^3$, $q = 30\tau_j^3 \tau_k - 10\tau_j^3 - 5\tau_i^2 \tau_k + \tau_i^3$, $r = 30\tau_j^2 \tau_k - 10\tau_j^3 - 5\tau_i^2 \tau_j + \tau_i^3$.

2. В случае $\Theta = 1$ имеем обычную граничную задачу при малых возмущениях. Введем следующие обозначения: $m(x) = H\zeta_x(\tau_x)$, где τ_x является моментом достижения невозмущенной траекторией поверхности Π_1 при начальном условии $\zeta_x(0) = x$,

$$\Delta m(x) = 0,5 \int_0^{\tau_x} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 m(\zeta)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta) \bigg|_{\zeta=\zeta_x(t)} dt, \quad V(x) = \int_0^{\tau_x} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta) \bigg|_{\zeta=\zeta_x(t)} dt,$$

$$M(x) = 3 \int_0^{\tau_x} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial V(\zeta)}{\partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta) \bigg|_{\zeta=\zeta_x(t)} dt.$$

Эти функции могут быть представлены как решение задачи Коши (13)–(15) с преобразованием (17)–(19). Соответствующие выкладки содержатся в (Балабушкин, 1991), где доказан п. 1 из утверждения 3. Ниже приведено доказательство п. 2.

Введем трубку радиуса $\rho > 0$ вокруг невозмущенной траектории $\zeta_x(t): U^\rho(x) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \{\zeta \in R^n : |\zeta - \zeta_x(t)| < \rho\}$, где $|\cdot|$ — евклидова норма в R^n .

Лемма 1 (Fleming, 1974, lemma 2.1). Для любых $\rho > 0$ и компактного множества $K \subset R^n$ найдутся $\lambda > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что

$$P[\exists t \in [0, T]: \zeta_x(t) \notin U^\rho(x)] \leq 2n \exp[-\rho \lambda / \sqrt{\varepsilon}]$$

для всех $x \in K$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$.

При $\Theta=1$ $\tau_1^\varepsilon = \inf(t \geq 0: \zeta^\varepsilon(t) \in \Pi_1)$ ($\inf \emptyset = T$). Обозначим U_1^ρ часть трубки U^ρ , которая содержит точку x и лежит по одну сторону от плоскости Π_1 . Пусть $\tilde{\tau}_1^\varepsilon = \inf(t \geq 0: \zeta^\varepsilon(t) \notin U_1^\rho)$, тогда по определению $\tilde{\tau}_1^\varepsilon \leq \tau_1^\varepsilon$. По условию В можно выбрать достаточно малое $\rho > 0$ так, что $\tilde{\tau}_1^\varepsilon < T$. Разобьем границу ∂U_1^ρ на $\partial U_{11}^\rho = \partial U_1^\rho \cap \Pi_1$ и $\partial U_{12}^\rho = \partial U_1^\rho \setminus \partial U_{11}^\rho$. Из леммы 1 следует, что $p^\varepsilon = P(\tilde{\tau}_1^\varepsilon < \tau_1^\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ быстрее любой степени ε .

Рассмотрим в качестве аппроксимации характеристической функции $\psi_\lambda^\varepsilon(x) = E \exp(i\lambda Y_x^\varepsilon)$ (E — символ математического ожидания) выражение

$$\tilde{\psi}_\lambda^\varepsilon(x) = (1 + (i\lambda)^3 \varepsilon^2 M(x) / 6) \exp(i\lambda(m(x) + \varepsilon \Delta m(x)) - 0,5 \varepsilon \lambda^2 V(x)).$$

Применяя к $\tilde{\psi}_\lambda^\varepsilon(\zeta_x^\varepsilon(t))$ формулу Ито, получаем

$$\psi_\lambda^\varepsilon(x) = \tilde{\psi}_\lambda^\varepsilon(x) + \Delta\psi_2 + \Delta\psi_3, \quad (П1)$$

где

$$\Delta\psi_2 = E \left[\exp(i\lambda Y^\varepsilon) - \tilde{\psi}_\lambda^\varepsilon(\zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon)) \right], \quad \Delta\psi_3 = E \int_0^{\tilde{\tau}_1^\varepsilon} L_1^\varepsilon \tilde{\psi}_\lambda^\varepsilon(\zeta^\varepsilon(t)) dt,$$

$$L_1^\varepsilon \psi(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi(\zeta)}{\partial \zeta_i} f_{1i}(\zeta) + 0,5 \varepsilon \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \psi(\zeta)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta).$$

Обозначим $F^\varepsilon(r)$ функцию распределения случайной величины $\varepsilon^{-0,5} [Y^\varepsilon - m - \varepsilon \Delta m]$, $F^{\varepsilon,9}(r)$ — функцию распределения суммы этой случайной величины и гауссовской случайной величины η с нулевым средним и дисперсией $9^2 > 0$, не зависящей от Y^ε . По условию Г функция $F^\varepsilon(r)$ абсолютно непрерывна. Для любых $a < b$

$$F^{\varepsilon,9}(b) - F^{\varepsilon,9}(a) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda} \psi_{\lambda/\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon \exp\left(-\frac{i\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}(m + \varepsilon \Delta m) - 0,5 \lambda^2 9^2\right) d\lambda. \quad (П2)$$

Наличие вспомогательного множителя $\exp(-0,5 \lambda^2 9^2)$ позволяет в дальнейшем применять теорему Фубини о замене порядка интегрирования в повторных интегралах. Подставляя (П1) в (П2), рассмотрим отдельно каждое слагаемое:

1) подстановка $\tilde{\psi}_{\lambda/\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon$, замена $(e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}) / i\lambda = \int_a^b e^{-i\lambda r} dr$ и изменение порядка интегрирования приводят к выражению $F_1^{\varepsilon,9}(b) - F_1^{\varepsilon,9}(a)$, где

$$F_1^{\varepsilon,9}(r) = \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{V+9^2}}\right) - \sqrt{\varepsilon} \frac{M}{6[V+9^2]^{3/2}} \left(\frac{r^2}{V+9^2} - 1\right) \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{V+9^2}}\right); \quad (П3)$$

2) выражение под знаком математического ожидания в $\Delta\psi_2$ равно нулю на множестве $\{\tilde{\tau}_1^\varepsilon = \tau_1^\varepsilon\}$, поэтому

$$\Delta\psi_2 = E \left[\exp(i\lambda Y^\varepsilon) I(\tilde{\tau}_1^\varepsilon < \tau_1^\varepsilon) \right] - E \left[\tilde{\psi}_\lambda^\varepsilon(\zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon)) I(\tilde{\tau}_1^\varepsilon < \tau_1^\varepsilon) \right], \quad (П4)$$

где $I(\cdot)$ — индикатор множества. Подставляя в (П2) первое слагаемое из (П4) и меняя местами интегрирование по λ и математическое ожидание, получаем

$$E \left[I(\tilde{\tau}_1^\varepsilon < \tau_1^\varepsilon) I(a \leq \varepsilon^{-1/2} [Y^\varepsilon - m - \varepsilon \Delta m] + \eta \leq b) \right],$$

что не превышает p^ε . Подстановка второго слагаемого приводит по аналогии с (П3) к выражению $F_2^{\varepsilon,9}(b) - F_2^{\varepsilon,9}(a)$, где

$$F_2^{\varepsilon,9}(r) = E \left\{ I(\tilde{\tau}_1^\varepsilon < \tau_1^\varepsilon) \left[\Phi\left(\frac{\tilde{r}}{\sqrt{V_\eta}}\right) - \sqrt{\varepsilon} \frac{M(\zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon))}{6(V_\eta)^{3/2}} \left(\frac{\tilde{r}^2}{V_\eta} - 1\right) \Phi\left(\frac{\tilde{r}}{\sqrt{V_\eta}}\right) \right] \right\}, \quad (П5)$$

и для краткости обозначено $V_\eta = V(\zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon)) + 9^2$,

$$\tilde{r} = \tilde{r}^\varepsilon(r, \zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon)) = r - m(\zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon)) + m - \varepsilon \Delta m(\zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon)) + \varepsilon \Delta m. \quad (П6)$$

Вдоль траектории невозмущенного движения $m(\zeta(t)) \equiv m$, $t \in [0, \tau_1]$, и по условиям А, Б $m(\zeta)$ имеет ограниченные частные производные в U_1^ρ , поэтому в $\bar{U}_1^\rho$ (замыкании U_1^ρ) $|m(\zeta) - m| \leq C_1$, где C_1 сколь угодно мало при выборе соответствующего ρ . Функция $\Delta m(\zeta)$ непрерывна и ограничена в $\bar{U}_1^\rho$. Пусть $r_0 > 0$, тогда выбором достаточно малых $\rho > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ можно обеспечить отделенность $\tilde{r}^\varepsilon(r, \zeta)$ от нуля: $|\tilde{r}^\varepsilon(r, \zeta)| \geq C_3(r_0) > 0$ для всех $|r| \geq r_0$, $\zeta \in \bar{U}_1^\rho$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$. Поскольку при этом функция $M(\zeta)$ ограничена в $\bar{U}_1^\rho$, выражение в квадратных скобках в (П5) ограничено по модулю некоторой константой

$C_4(r_0) > 0$, не зависящей от $\vartheta > 0$. Суммарно подстановка $\Delta\psi_2$ в (П2) дает вклад, не превышающий $(2C_4 + 1)p^\varepsilon$;

3) из определения функций $m(x), \Delta m(x), V(x), M(x)$ следует, что в области U_1^p имеют место уравнения:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_i} f_{1i}(\zeta) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_i} f_{1i}(\zeta) + 0,5 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 m(\zeta)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\zeta)}{\partial \zeta_i} f_{1i}(\zeta) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial M(\zeta)}{\partial \zeta_i} f_{1i}(\zeta) + 3 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial V(\zeta)}{\partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta) = 0.$$

С использованием этих соотношений проверяется, что $I_1^{\varepsilon} \tilde{\Psi}_\lambda^{\varepsilon}(\zeta)$ равно сумме конечного числа слагаемых вида $\varepsilon^p (i\lambda)^q h(\zeta) \exp(i\lambda m(\zeta) + i\lambda \varepsilon \Delta m(\zeta) - 0,5 \varepsilon \lambda^2 V(\zeta))$, где $h(\zeta)$ — ограниченные в $\bar{U}_1^p$ функции, $q \geq 1, p - 0, 5q \geq 1$. Подставляя в (П2), получаем сумму конечного числа слагаемых

$$(\varepsilon^{p-q/2} / 2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}) (i\lambda)^{-1} (i\lambda)^q G^{\varepsilon}(\lambda) d\lambda,$$

где

$$G^{\varepsilon}(\lambda) = E \int_0^{\tilde{\tau}_1^{\varepsilon}} h(\zeta^{\varepsilon}(t)) \exp(i\lambda (m(\zeta^{\varepsilon}(t)) - m + \varepsilon \Delta m(\zeta^{\varepsilon}(t)) - \varepsilon \Delta m) / \sqrt{\varepsilon} - 0,5 \varepsilon \lambda^2 V_{\eta}(\zeta^{\varepsilon}(t))) dt.$$

Каждое из этих слагаемых равно $F_3^{\varepsilon, \vartheta}(b) - F_3^{\varepsilon, \vartheta}(a)$, где

$$F_3^{\varepsilon, \vartheta}(r) = \varepsilon^{p-q/2} E \int_0^{\tilde{\tau}_1^{\varepsilon}} \frac{h(\zeta^{\varepsilon}(t))}{(V_{\eta})^{q/2}} g\left(\frac{\tilde{r}}{\sqrt{V_{\eta}}}\right) \varphi\left(\frac{\tilde{r}}{\sqrt{V_{\eta}}}\right) dt,$$

$g(\cdot)$ — полином, $\tilde{r} = \tilde{r}^{\varepsilon}(r, \zeta^{\varepsilon}(t))$ определяется выражением (П6) при замене $\tilde{\tau}_1^{\varepsilon}$ на t . Аналогично (П5) $|F_3^{\varepsilon, \vartheta}(r)| \leq \varepsilon C_5$ для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ при некоторой константе $C_5(r_0) > 0$.

Суммируя результаты подстановки (П2) в (П3): для любого $r_0 > 0$ найдутся $\rho > 0, \varepsilon_1 > 0$ такие, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, a < b, |a|, |b| \geq r_0$ и произвольного $\vartheta > 0$:

$$|F^{\varepsilon, \vartheta}(b) - F^{\varepsilon, \vartheta}(a) - (F_1^{\varepsilon, \vartheta}(b) - F_1^{\varepsilon, \vartheta}(a))| \leq (2C_4 + 1)p^\varepsilon + \varepsilon C_5.$$

Полагая $a \rightarrow -\infty, \vartheta \rightarrow 0$ и учитывая непрерывность $F^{\varepsilon}(r)$, получаем для $|r| \geq r_0$:

$$|F^{\varepsilon}(r) - F_1^{\varepsilon}(r)| \leq \varepsilon C_6. \quad (\text{П7})$$

Пусть $\alpha < 0,5, \beta_{\alpha} < 0, r_0 = -0,5\beta_{\alpha}$. Можно найти достаточно малое ε_1 такое, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, r \leq r_0$ выполнено (П7) и при этом уравнения $F_1^{\varepsilon}(r) \pm \varepsilon C_6 = \alpha$ имеют единственные решения, не превышающие r_0 . В этом случае квантиль порядка α распределения $F^{\varepsilon}(r)$ лежит между этими решениями. Отсюда следует, что для случайной величины $\varepsilon^{-1/2}[Y^{\varepsilon} - m - \varepsilon \Delta m]$ квантиль порядка α представляется в виде

$$\sigma\beta_{\alpha} + \sqrt{\varepsilon}\chi\sigma(\beta_{\alpha}^2 - 1)/6 + \varepsilon\Delta_{11}^{\varepsilon}(\alpha), \quad (\text{П8})$$

что эквивалентно (23).

Для доказательства (24) в случае $\Theta = 1$ по аналогии с (П2) рассмотрим при произвольном q выражение

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^q r \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda r} \Psi_{\lambda/\sqrt{\varepsilon}}^{\varepsilon} \exp(-i\lambda (m + \varepsilon \Delta m) / \sqrt{\varepsilon} - 0,5 \varepsilon \lambda^2 \vartheta^2) d\lambda \right] dr, \quad (\text{П9})$$

где функция в квадратных скобках является плотностью распределения $F^{\varepsilon, \vartheta}(r)$. Подстановка в (П9) первого слагаемого из (П2) приводит к

$$-\frac{\sqrt{V + \vartheta^2}}{\alpha\sqrt{2\pi}} \left(1 + \sqrt{\varepsilon} \frac{Mq^3}{6(V + \vartheta^2)^{5/2}} \right) \exp\left(-\frac{q^2}{2(V + \vartheta^2)}\right).$$

Полагая $\vartheta = 0$ и подставляя в качестве q выражение (П8), получаем первые члены разложения по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ ожидаемых потерь случайной величины $\varepsilon^{-1/2}[Y^{\varepsilon} - m - \varepsilon \Delta m]$ в виде $-(1 + \sqrt{\varepsilon}\beta_{\alpha}\chi/6)\sigma\varphi(\beta_{\alpha})/\alpha$. Аналогично доказательству (23), подстановка двух других слагаемых из (П3) в (П9) дает выражения порядка $\varepsilon\Delta_{12}^{\varepsilon}(\alpha)$.

В случае $\Theta = 2$ предварительно заметим, что для процесса без переключений $\zeta^\varepsilon(t)$ имеет место свойство: если остановить данный процесс в фиксированный момент $s \in (0, T)$ и взять решения уравнений (13)–(15) как начальные для тех же уравнений на отрезке $[s, t]$, то получим аппроксимацию параметров распределения процесса для момента t . Необходимо доказать, что это свойство сохраняется при дополнительном преобразовании (20). Повторное применение леммы 1 с $K = \partial U_{11}^p$ показывает, что достаточно рассмотреть траектории процесса $\xi(t)$ в окрестности невозмущенной траектории, когда вначале достигается Π_1 и затем Π_2 . Для доказательства части а) определяем условное распределение $Y^\varepsilon = H\xi^\varepsilon(\tau_2^\varepsilon)$ при условии известного состояния $\xi^\varepsilon(\tau_1^\varepsilon) \in \partial U_{11}^p$ на основании уже установленных аппроксимаций для случая одной границы, затем осуществляем усреднение по распределению $\xi^\varepsilon(\tau_1^\varepsilon)$, первые три момента которого также приближенно известны из случая одной границы. При этом учитываем однородность процесса $\xi^\varepsilon(t)$. Для доказательства (23), (24) дополнительно используется условие Г. Доказательство для $\Theta > 2$ проводится по индукции.

Доказательство утверждения 1.

А. Решение уравнения (4) имеет вид

$$Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) = S_i \int_{t_0}^{t_0 + \tau_i^\varepsilon} \exp\left(-0,5\varepsilon\delta_i^2 t + \sqrt{\varepsilon}\delta_i W_i'(t)\right) \left(u_i dt - \sqrt{\varepsilon}v_i u_i dW_i(t)\right). \quad (\text{П10})$$

Поскольку $ES_i^\varepsilon(t) = S_i$ для любого t , то

$$m_i = EY_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) = E\left[E\left(Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) \mid \mathcal{F}_\infty^W\right)\right] = S_i E \int_{t_0}^{t_0 + \tau_i^\varepsilon} \left(u_i dt - \sqrt{\varepsilon}v_i u_i dW_i(t)\right) = S_i X_i.$$

Для фьючерса в (П10) имеется дополнительное слагаемое $-X_i S_i^\varepsilon(t_0)$, поэтому в этом случае $m_i = 0$.

Б. Эта часть является следствием более общего утверждения 3. Уравнение (13) в данном случае вырождено: $\gamma(t) \equiv 0$, а решения уравнений (14), (15) являются однородными многочленами относительно $S_i u_i$ степени 2 и 3 соответственно. Преобразование (20) сохраняет эти свойства, поэтому достаточно найти решение уравнений (14), (15) для трехкомпонентного портфеля и экстраполировать его на общий случай.

Доказательство утверждения 2 дано схематично.

Обозначим $\tau_{\min}^\varepsilon = \min(\tau_i^\varepsilon, \tau_j^\varepsilon)$.

Лемма 2. Пусть $\tau_i = \tau_j = \tau$, тогда

$$E\left(\tau_{\min}^\varepsilon\right)^k = \tau^k - k\tau^{k-0,5} \sqrt{0,5\varepsilon(v_i^2 + v_j^2)} / \pi + \varepsilon\Delta_k^\varepsilon, \quad k=1, \dots, 4, \quad (\text{П11})$$

где Δ_k^ε ограничены для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ при некотором $0 < \varepsilon_1 \leq 1$.

Доказательство. Известно (Липцер, Ширяев, 1974), что плотность распределения момента первого достижения винеровским процессом прямой $a - bt$, где $a, t > 0$, равна

$$p(t) = at^{-3/2} \Phi((bt - a) / \sqrt{t}) \quad (\text{П12})$$

и выполнены соотношения:

$$\int_0^t p(s) ds = \Phi((bt - a)t^{-1/2}) + e^{2ab} \Phi(-(bt + a)t^{-1/2}), \quad (\text{П13})$$

$$\int_0^t s^{k+1} p(s) ds = \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial b}\right) \int_0^t s^k p(s) ds, \quad k \geq 0. \quad (\text{П14})$$

Обозначим $p_i(t)$ плотность распределения τ_i^ε , тогда в (П12) $a = \tau / \sqrt{\varepsilon}v_i$, $b = 1 / \sqrt{\varepsilon}v_i$ и аналогично для $p_j(t)$. В выражении

$$E\left[\tau_{\min}^\varepsilon\right]^k = \int_0^\infty \left[\int_0^t s^k p_j(s) ds \right] p_i(t) dt + \int_0^\infty \left[\int_0^t s^k p_i(s) ds \right] p_j(t) dt, \quad k=1, \dots, 4,$$

внутренние интегралы записываются в явном виде с помощью (П13), (П14). Далее отдельно рассматривается каждое слагаемое. Для $\exp(2\tau / \varepsilon v_i^2) \Phi(-(t + \tau) / (\sqrt{\varepsilon}t v_i))$ применим известное неравенство

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \Phi(x) \leq \Phi(-x) \leq \frac{1}{x} \Phi(x), \quad x > 0.$$

С использованием этих соотношений (П11) может быть проверено непосредственно для каждого $k = 1, \dots, 4$.

Поскольку при различающихся τ_i утверждение 2 является частью утверждения 1, достаточно проверить, что при $\tau_i = \tau_j = \tau$ ковариация случайных величин $Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon), Y_j^\varepsilon(t_0 + \tau_j^\varepsilon)$ имеет вид

$$\text{cov}(Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon), Y_j^\varepsilon(t_0 + \tau_j^\varepsilon)) = \varepsilon \rho_{ij} X_i X_j S_i S_j \delta_i \delta_j (t_0 + \tau/3) + \varepsilon^2 \Delta^\varepsilon.$$

В данном случае удобно представить $Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon)$ как решение уравнения (5):

$$Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) = X_i S_i^\varepsilon(t_0) - X_i S_i + \sqrt{\varepsilon} \delta_i S_i u_i \int_{t_0}^{t_0 + \tau_i^\varepsilon} g_i(t, W_i(t), W_i'(t)) dW_i'(t),$$

где $g_i = (\tau_i - (t - t_0) + \sqrt{\varepsilon} v_i [W_i(t) - W_i(t_0)]) \exp(-0,5\varepsilon \delta_i^2 t + \sqrt{\varepsilon} \delta_i W_i(t))$. Отсюда

$$\begin{aligned} E[Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) Y_j^\varepsilon(t_0 + \tau_j^\varepsilon)] &= X_i X_j E[(S_i^\varepsilon(t_0) - S_i)(S_j^\varepsilon(t_0) - S_j)] + \\ &+ \varepsilon \delta_i \delta_j S_i S_j \rho_{ij} E \int_{t_0}^{t_0 + \tau_{\min}^\varepsilon} g_i(t, W_i(t), W_i'(t)) g_j(t, W_j(t), W_j'(t)) dt. \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно $X_i X_j S_i S_j (e^{\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j t_0} - 1)$. Второе после представления в виде $E[E(\cdot | \mathcal{F}_\infty^W)]$

упрощается до $\varepsilon \delta_i \delta_j S_i S_j u_i u_j \rho_{ij} E \int_{t_0}^{t_0 + \tau_{\min}^\varepsilon} f e^{\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j t} dt$, где

$$\begin{aligned} f &= (\tau - (t - t_0))^2 + \sqrt{\varepsilon} v_i [W_i(t) - W_i(t_0)] (\tau - (t - t_0)) + \\ &+ \sqrt{\varepsilon} v_j [W_j(t) - W_j(t_0)] (\tau - (t - t_0)) + \varepsilon v_i v_j [W_i(t) - W_i(t_0)] [W_j(t) - W_j(t_0)]. \end{aligned} \quad (\text{П15})$$

Представляя

$$(\tau - (t - t_0))^2 e^{\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j t} = (\tau - (t - t_0))^2 + (\tau - (t - t_0))^2 (e^{\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j t} - 1),$$

для вклада первого слагаемого получаем

$$E \int_{t_0}^{t_0 + \tau_{\min}^\varepsilon} (\tau - (t - t_0))^2 dt = \tau^2 E \tau_{\min}^\varepsilon - \tau E (\tau_{\min}^\varepsilon)^2 + E (\tau_{\min}^\varepsilon)^3 / 3 = \tau^3 / 3 + \varepsilon \Delta^\varepsilon,$$

где последнее равенство следует из леммы 2.

Рассмотрим далее второе и третье слагаемые (П15). Требуется определить скорость убывания по ε выражения $E \int_0^{\tau_{\min}^\varepsilon} \exp(\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j s) W_i(s) (\tau - s) ds$. Вычитая $E \int_0^\tau e^{\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j s} W_i(s) (\tau - s) ds = 0$, получаем

$$E \int_{\tau}^{\tau_{\min}^\varepsilon} I(\tau_{\min}^\varepsilon \geq \tau) \exp(\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j s) W_i(s) (\tau - s) ds + E \int_0^{\tau} I(\tau_{\min}^\varepsilon < \tau) \exp(\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j s) W_i(s) (\tau - s) ds.$$

Первое слагаемое по абсолютной величине не превышает

$$E (\tau_{\min}^\varepsilon - \tau)^2 I(\tau_{\min}^\varepsilon \geq \tau) e^{\varepsilon \delta_i \delta_j \tau_i^\varepsilon} \max_{s \leq \tau_i^\varepsilon} W_i(s) \leq \sqrt{E (\tau_{\min}^\varepsilon - \tau)^4} \sqrt{E \left[e^{4\varepsilon \delta_i \delta_j \tau_i^\varepsilon} \left(\max_{s \leq \tau_i^\varepsilon} W_i(s) \right)^2 \right]}.$$

Аналогично для второго слагаемого:

$$E (\tau_{\min}^\varepsilon - \tau)^2 I(\tau_{\min}^\varepsilon < \tau) e^{\varepsilon \delta_i \delta_j \tau} \max_{s \leq \tau} W_i(s) \leq e^{\varepsilon \delta_i \delta_j \tau} \sqrt{E (\tau_{\min}^\varepsilon - \tau)^4} \sqrt{E \left(\max_{s \leq \tau} W_i(s) \right)^2}.$$

Из леммы 2 следует, что $E (\tau_{\min}^\varepsilon - \tau)^4 = \varepsilon \Delta^\varepsilon$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Балабушкин А.Н.** (1991). Прогнозирование состояния динамического объекта в момент достижения границы при малых возмущениях // *Автоматика и телемеханика*. № 11. С. 64–70. [**Balabushkin A.N.** (1991). The state prediction of dynamic object in the moment of boundary achieving under small disturbances. *Automatika i Telemekhanika*, 52, 11, 1533–1538 (in Russian).]
- Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** (1974). Статистика случайных процессов. М.: Наука. [**Liptser R. Sh., Shiryaev A.N.** (1974). *Statistics of random processes*. Moscow: Nauka (in Russian); **Liptser R. Sh., Shiryaev A.N.** (2001). *Statistics of random processes*. Berlin: Springer-Verlag.]
- Avellaneda M., Dong Y., Valkai B.** (2015). *Optimal portfolio liquidation and macro hedging*. Bloomberg quant seminar. Available at: <https://math.nyu.edu/~avellane/>

- Avellaneda M., Cont R.** (2013). *Close-out risk evaluation (CORE): A new risk management approach for central counterparties*. Working Paper. Available at: <http://ssrn.com/abstract=2247493>
- Boudt K., Peterson B., Croux C.** (2008). Estimation and decomposition of downside risk for portfolios with non-normal returns. *J. Risk*, 11, 79–103.
- De Genaro A.** (2016). Systematic multi-period stress scenarios with an application to CCP risk management. *Journal of Banking & Finance, Elsevier*, 67 (C), 119–134.
- Fleming W.H.** (1974). Stochastically perturbed dynamical systems. *Rocky Mountain J. Math*, 4, 3, 407–433.
- Kim H.** (2014). *Optimal execution under liquidity constraints*. PhD Thesis. Courant Institute of Mathematical Sciences. New York University. Available at: https://www.math.nyu.edu/~avellane/HSK_Thesis.pdf
- Jorion P.** (2007). *Value at risk: The new benchmark for managing financial risk*. N.Y.: McGraw Hill.
- Vicente L.A.B.G., Cerezetti F.V., Faria S.R. de, Iwashita T., Pereira O.R.** (2015). Managing risk in multi-asset class, multimarket central counterparties: The CORE approach. *J. Banking & Finance*, 51, 119–130.

Approximation to portfolio liquidation value with calculation of its skewness

© 2023 A.N. Balabushkin

A.N. Balabushkin,

BrokerCreditService, Moscow, Russia; e-mail: BalabushkinAN@msk.bcs.ru

Received 24.06.2022

Abstract. A boundary problem for a homogeneous multidimensional diffusion process is considered under the assumption of small perturbations. Approximations to the mean, second and third central moments of the process at the moment of the first crossing a given plane in phase space are presented as a solution of ordinary differential equations with an additional transformation (“projection onto the boundary”). The quantile of a linear combination of coordinates is estimated by the second order expansion in powers of a small parameter determining the magnitude of perturbations. In the first approximation, this expansion corresponds to the Gaussian distribution, the next term contains skewness. The result is extended to a process with multiple boundaries, upon reaching each of them the equation of the process changes. Such a model describes the liquidation of a portfolio of financial instruments in which the closing rate of each of the positions is a random process. The result is illustrated by two examples. In the first example a portfolio consists of linear instruments (such as stocks, futures), prices are correlated Geometric Brownian Motions with zero drift. The closing rates are constant, but with random noise due to daily fluctuations in trading volume. In this particular case approximations for the mean, variance, skewness, *VaR* and *CVaR* of the financial result of portfolio liquidation are given explicitly. In the second example, the liquidation of an exchange-traded option position is considered under the assumption that the closing rate depends on the ratio of the underlying price to the strike of the option. Numerical calculations demonstrate that taking into account skewness significantly increases the accuracy of estimates.

Keywords: diffusion process, boundary problem, geometrical Brownian motion, portfolio liquidation value, value-at-risk, Cornish–Fisher expansion.

JEL Classification: C02, C32, G20, G32.

For reference: **Balabushkin A.N.** (2023). Approximation to portfolio liquidation value with calculation of its skewness. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 105–118. DOI: 10.31857/S042473880024878-4