
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Сведение динамической модели рынка разработки программного обеспечения к блочной задаче выпуклого программирования

© 2023 И.А. Лесик, А.Г. Перевозчиков

И.А. Лесик,

НПО «РусБИТех», Москва; e-mail: lesik56@mail.ru

А.Г. Перевозчиков,

НПО «РусБИТех», Москва; e-mail: pere501@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.11.2022

Аннотация. В статье предлагается метод сведения дискретной динамической модели рынка разработки программного обеспечения к блочной задаче выпуклого программирования. Задачу можно решить методом последовательных приближений, основанным на численном методе решения, если отказаться от целочисленности элементов матрицы назначения. Равновесные цены можно рассчитать напрямую, и поэтому не требуется вариационной постановки внутренней задачи определения равновесных цен, основанной на теореме Дебре. Функции изменения фазовых координат можно взять выпуклыми, например норма разности в квадрате, и не учитывать постоянных затрат при каждом переключении управления, которое исключается из уравнений динамики системы. Полученная блочная задача выпуклого программирования допускает декомпозицию с помощью замораживания переменных связи с соседними блоками на уровне предыдущей итерации. Это позволяет обосновать метод последовательных приближений для решения полученной задачи, основанный на методе Б.Т. Поляка. Приводится модельный пример его использования в динамическом расширении транспортной задачи по стоимости.

Ключевые слова: транспортная задача по стоимости, динамическое расширение задачи, исключение управлений, декомпозиция задачи, принцип сжимающих отображений, метод последовательных приближений.

Классификация JEL: O12, C51.

Для цитирования: Лесик И.А., Перевозчиков А.Г. (2023). Сведение динамической модели рынка разработки программного обеспечения к блочной задаче выпуклого программирования // Экономика и математические методы. Т. 59. № 1. С. 119–130. DOI: 10.31857/S042473880024879-5

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается задача определения оптимальных планов назначения исполнителей по работам в динамическом расширении транспортной задачи (ТЗ) по стоимости, поставленная в работе (Лесик, Перевозчиков, 2021). Управление формально осуществляется приращением планов, которые исключаются из уравнений динамики. Поэтому на каждом шаге показатель оптимальности, кроме транспортных расходов и фиксированных доплат, включает норму приращения планов и минимизация этого показателя позволяет уменьшить расходы и стабилизировать распределение ресурсов по работам. Полученная блочная задача выпуклого программирования допускает декомпозицию через замораживание переменных связи с соседними блоками на уровне предыдущей итерации. Это дает возможность обосновать метод последовательных приближений для решения полученной задачи, основанный на методе Б.Т. Поляка.

В существующих платформах PBS¹, LSF² (Platform LSF 7 Update 6, 2009), NQE³, I-SOFT (Ding et al., 2012), EASY⁴, LoadLeveler⁵ для решения транспортной задачи и ее частного случая задачи о назначениях

¹ PBS Works. Официальный сайт компании Altair Engineering, Inc. (<http://www.pbsworks.com/>).

² Platform LSF 7 Update 6. An Overview of New Features for Platform LSF Administrators. Официальный сайт компании Platform Computing Corporation (http://www.platform.com/workload-management/whatsnew_lst7u6.pdf).

³ См. сноску 1.

⁴ What is Condor? Официальный сайт продукта Condor (<http://www.cs.wisc.edu/condor/description.html>).

⁵ IBM Tivoli Workload Scheduler LoadLeveler. Официальный сайт компании «Интерфейс» (<http://www.interface.ru/home.asp?artId=6283>).

рассматривается в основном статический вариант задачи с горизонтом планирования один период. Неэффективность такого подхода особенно сильно проявляется в глобальных вычислительных системах, так как в системах такого типа ресурсы и заявки являются неоднородными (Сергиенко, Симоненко В., Симоненко А., 2016). Все это делает актуальной задачу динамического распределения исполнителей по заданиям, поставленную и изученную в настоящей работе.

Практическая значимость работы позволяет внедрить предложенную схему декомпозиции динамической модели в распределение ресурсов и заданий на рынке разработки программного обеспечения (РПО) для создания соответствующих цифровых транзакционных платформ (ЦТП) (Устюжанина, Дементьев, Евсюков, 2021). Несмотря на постоянное увеличение объема сделок, на рынке РПО отсутствуют глобальные платформы по типу указанных выше универсальных платформ распределения заданий PBS, LSF, NQE, I-SOFT, EASY, LoadLeveler, которые могли бы быть использованы в динамическом алгоритме загрузки заданий хотя бы для получения начального плана, который в динамической модели является элементом управления. Это увеличивает число посредников в цепочке, ведущей от заказчика к исполнителю, что уменьшает получаемую исполнителем оплату произведенных работ до 10 раз по сравнению со стоимостью, которую готовы были платить заказчики (цену предложения). Таким образом, создание цифровой платформы на рынке РПО могло бы привести к более справедливому распределению доходов и увеличению величины общественного благосостояния. Максимизация же последнего равносильна, как известно, определению глобального равновесия на рынке РПО в соответствии с теоремой Дебре (Debreu, 1954).

В общетеоретическом плане концепция равновесия (Макаров, Рубинов, 1973) на распределенном рынке однородного товара относится к мезоэкономике (Мезоэкономика развития, 2011) и лежит в основе модели синтеза транспортной системы многоузлового конкурентного рынка с переменным спросом и предложением, рассмотренной в работах (Васин, Григорьева, Лесик, 2017, 2018; Васин, Григорьева, Цыганов, 2017). К особенностям метода можно отнести то обстоятельство, что равновесные цены вычисляются напрямую, и поэтому не требуется вариационной постановки внутренней задачи. Функции изменения фазовых координат можно взять выпуклыми, например норма разности в квадрате, и не учитывать постоянных затрат при каждом переключении управления. Такая постановка изучается в настоящей работе. Имея динамическое расширение задачи о назначении (ЗН) на узкие места (УМ), можно определить дополнительную прибыль транспортной системы (цифровой платформы) за счет использования фьючерсов.

Основным результатом работы является декомпозиция динамического расширения транспортной задачи по стоимости при отказе от целочисленности элементов матрицы назначения и построение методов последовательных приближений ее решения на основе алгоритма Поляка.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ПО СТОИМОСТИ

Пусть, как в обычной транспортной задаче, через $i = 1, \dots, m$ обозначены пункты производства (работчики программного обеспечения (ПО)) некоторого однородного товара (человеко-дней при стандартном 8-часовом дне чистого рабочего времени, определяемого по таймеру), через $j = 1, \dots, n$ — пункты его потребления (заказчики ПО). Даны величины: $a_i \geq 0$ — объем производства в пункте производства i ; $b_j \geq 0$ — объем потребления в пункте потребления j , отнесенные к одному дню (горизонту планирования).

Ищутся величины x_{ij} объемов перевозок из пункта i в пункт j , удовлетворяющие обычным транспортным ограничениям

$$x_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где предполагается, что

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (2)$$

и минимизирующие функцию

$$I(x) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} x_{ij}. \quad (3)$$

Здесь A_{ij} — эффективность соответствующего назначения.

Таким образом, задача (1)–(3) является частным случаем обычной ТЗ, которую можно решить точно при помощи соответствующего пакета, реализующего венгерский метод (Корбут,

Финкильштейн, 1969, с. 307) расстановки пометок, подробно описанный в (Ашманов, 1981), имеющим сложность $O(N^3)$ (Сергиенко и др., 2016), где $N = n + m$ — общее число вершин соответствующего двудольного графа.

Конкретно для рынка РПО будем предполагать выполненными следующие предположения:

1) за единицу берется один программист, работающий полный день (8 часов);

2) горизонт планирования — 1 день;

3) прибыли заказчиков и исполнителей по контакту (i, j) равны разности цен $P_j - Q_i$ одного рабочего дня спроса P_j и предложения Q_i (последняя с учетом прибыли платформы, например 30%), умноженной на число кодировщиков x_{ij} , где $P_j \geq P \geq Q_i$, P — равновесная цена. Всего

$$(P_j - Q_i)x_{ij}. \quad (4)$$

Замечание. С учетом балансовых ограничений прибыли участников рынка разработки ПО не будут зависеть от распределения x_{ij} .

В самом деле,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (P_j - Q_i)x_{ij} = \sum_{j=1}^n P_j \sum_{i=1}^m x_{ij} - \sum_{i=1}^m Q_i \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n P_j b_j - \sum_{i=1}^m Q_i a_i \geq 0. \quad (5)$$

Поэтому для оптимизации распределения применяется критерий (3), где в качестве полезности назначений A_{ij} можно взять рейтинг соответствующего соединения (например, долю всех предыдущих соединений в их общем количестве за определенный период по ретроспективной информации). Это указывает на то, что желательно использовать ранее зарекомендовавшие себя пары «исполнитель — заказчик».

2. ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ ТЗ ПО СТОИМОСТИ

Динамическое расширение ТЗ по стоимости можно получить по схеме, предложенной в работе (Васин, Григорьева, Лесик, 2018). При этом равновесные цены можно вычислить напрямую и поэтому не требуется вариационной постановки внутренней задачи. И функции изменения фазовых координат можно взять выпуклыми, например норма разности в квадрате, и не учитывать постоянных затрат при каждом переключении управления.

Запишем постановку динамической задачи, следуя работе (Лесик, Перевозчиков, 2021). Оказывается, что у основной системы нет начальных условий (по крайней мере вначале, а затем за начальное условие можно брать текущее значение плана). Далее для определенности будем считать, что начальное значение плана не определено. Поэтому введем еще (-1) -шаг и соответствующую компоненту управления с нулевыми начальными условиями:

$$x_{ij}(t+1) = x_{ij}(t) + u_{ij}(t), \quad t = -1, 0, \dots, T-1, \quad x_{ij}(-1) = 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Через $a_i(t), b_j(t)$ обозначим запасы и потребности в ресурсах в соответствии с первоначальными заявками. Можно считать, что управляющие воздействия ограничены условиями $-M_{ij}(t) \leq u_{ij}(t) \leq M_{ij}(t+1) \quad \forall i, j$, где $M_{ij}(t) = \min(a_i(t), b_j(t))$.

Множество допустимых управлений $[u(t), t = -1, 0, \dots, T-1]$, $u(t) = (u_{ij}(t), i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$, удовлетворяющих этому условию, обозначим через

$$W = \prod_{t=-1}^{T-1} W(t), W(t) = \prod_{i,j} W_{ij}(t), W_{ij}(t) = [-M_{ij}(t), M_{ij}(t+1)].$$

Показатель эффективности определим в виде интегрального функционала

$$J(x, u) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ -\sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=n(t)}^n A_{ij} x_{ij}(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij}^2(t) \right\}, \quad (7)$$

где $K > 0$ — достаточно большая штрафная константа за изменение элемента плана, связанная с необходимостью перераспределения некоторых исполнителей по работам.

Предполагается, что цены в заявках постоянны и упорядочены по неубыванию:

$$Q_1 \leq Q_2 \leq \dots \leq Q_m, \quad P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_n, \quad (8)$$

$$Q_i \leq P(t) \leq P_j, \quad i = 1, \dots, m(t); \quad j = n(t), \dots, n, \quad (9)$$

где $P(t), m(t), n(t)$ — равновесная цена и максимальные и минимальные значения индексов i, j , удовлетворяющих неравенствам (9) в момент времени $t = -1, 0, \dots, T-1$. Тогда балансовые ограничения имеют вид фазовых ограничений:

$$a_i(t) = \sum_{j=n(t)}^n x_{ij}(t), \quad i = 1, \dots, m(t), \quad b_j(t) = \sum_{i=1}^{m(t)} x_{ij}(t), \quad j = n(t), \dots, n, \quad x_{ij}(t) \geq 0, \quad t = -1, 0, \dots, T-1. \quad (10)$$

В силу линейности уравнений динамики (6) и выпуклости функции (7) по совокупности переменных в силу результатов (Васильев, 1981) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Функционал (7) представляет собой выпуклую функцию управления.

Далее для простоты будем рассматривать задачу с неуравновешенным балансом, когда

$$a_i(t) \geq \sum_{j=n(t)}^n x_{ij}(t), \quad i = 1, \dots, m(t), \quad b_j(t) \geq \sum_{i=1}^{m(t)} x_{ij}(t), \quad j = n(t), \dots, n, \quad x_{ij}(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (11)$$

В этом случае условие (2) может не выполняться. Обозначим множества точек $x(t)$, удовлетворяющих (11), через $B(t)$.

Иногда вместо (7) используется недифференцируемый выпуклый показатель

$$J(x, u) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ - \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=1}^{n(t)} A_{ij} x_{ij}(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij}^+(t) \right\}, \quad (12)$$

где верхняя срезка разности равна

$$u_{ij}^+(t) = \max(u_{ij}(t), 0), \quad (13)$$

$$u_{ij}(t) = x_{ij}(t+1) - x_{ij}(t) = \Delta x_{ij}(t). \quad (14)$$

То есть дополнительные расходы по выводу исполнителя на заказчика связаны только с увеличением объема x_{ij} назначения, а не с его уменьшением.

3. ДЕКОМПОЗИЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЗ ПО СТОИМОСТИ

Заменим в показателе (7) компоненты управления при помощи их выражения (14) через приращение фазовых координат

$$L(x) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ - \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=n(t)}^n A_{ij} x_{ij}(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^2(t) \right\}. \quad (15)$$

Этот показатель необходимо минимизировать при ограничениях

$$x \in B \triangleq \prod_{t=-1}^{T-1} B(t). \quad (16)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для компонент $x(t)$:

$$\begin{aligned} L_t(x) &= K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij}(t) - x_{ij}(t-1))^2 - \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=n(t)}^n A_{ij} x_{ij}(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij}(t) - x_{ij}(t+1))^2 = \\ &= K \|x(t) - x(t-1)\|^2 - \langle A(t), x(t) \rangle + K \|x(t) - x(t+1)\|^2 \rightarrow \min \end{aligned} \quad (17)$$

при фиксированных $x(t-1), x(t+1)$ и ограничениях

$$x(t) \in B(t). \quad (18)$$

Здесь $A(t)$ — соответствующая подматрица матрицы A . Для удобства изложения схемы декомпозиции $A(t), x(t)$ рассматриваются как вектор-строки, где в качестве компонент стоят строки.

Предполагается по умолчанию, что слагаемые в (17), содержащие $x(-1), x(T)$, отсутствуют. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Для любого решения x задачи минимизации (15) при ограничениях (16) его компоненты являются решением вспомогательной задачи (17)–(18).

Градиент показателя (17) по $x(t)$ при фиксированных $x(t-1), x(t+1)$ имеет вид

$$\nabla_{x(t)} L_t(x(t)) = 2K(x(t) - x(t-1)) - A(t) + 2K(x(t) - x(t+1)). \quad (19)$$

Получив градиенты (19), для решения вспомогательной задачи можно воспользоваться методом проекции градиента с постоянным шагом (Поляк, 1983, с. 185):

$$x^{k+1}(t) = P_{B(t)}(x^k(t) - a \nabla_{x(t)} L_t(x^k(t))), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (20)$$

где k — номер шага; $a > 0$ — постоянный шаг метода; $P_{B(t)}(\cdot)$ — оператор проектирования на компоненту $B(t)$ множества допустимых управляющих воздействий $W(t)$. Очевидно, что внутренности множеств $B(t)$ не пусты. Тогда согласно результатам (Поляк, 1983, с. 185) справедлива следующая теорема сходимости.

Теорема 2. Пусть $L > 0$, где $L > 0$ — константа Липшица градиента (19) на множестве B . Тогда последовательность $[x^k(t)]$ в методе (20) сходится к множеству решений задачи минимизации (17) при ограничениях (18).

Рассмотрим диагональный процесс:

$$x^{k+1}(t) = P_{B(t)}(x^k(t) + a \nabla_{x(t)} L_t(x^k)) \quad \forall t, \quad k = 0, 1, \dots \quad (21)$$

Введем норму $\|x\| = \max \|x(t)\|$. Тогда константа $L > 0$ будет ограничивать норму полного градиента показателя $L(x)$ на множестве B и теорема сходимости будет справедлива для процесса (21), который представляет собой покомпонентную запись метода проектирования градиента в задаче минимизации показателя (15) при ограничениях (16).

Таким образом, метод проекции градиента осуществляет декомпозицию исходной задачи на вспомогательные.

Модель позволяет учесть скидки на опт (Лесик, Перевозчиков, 2022) и посреднические менеджерам за вывод недостающих кодеров. В этом случае (15) превращается в

$$L(X) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=n(t)}^n A_{ij} x_{ij}^2(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t) \right\},$$

т.е. квадратичная форма соответствует уже скидкам на опт, а кусочно-линейная — посредническим менеджерам за вывод недостающих кодеров. Соответственно меняется частный показатель:

$$L_t(X) = K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t-1) + \langle Ax(t), x(t) \rangle + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t+1),$$

где $A(t) = aP(t)E$, где a — норма скидки на опт, $P(t)$ — равновесная цена текущего периода, E — единичная матрица соответствующей размерности, K — посреднические менеджерам. Это равенство имеет экономический смысл, поскольку складываются денежные величины. Например, равенство (17)

$$L_t(x) = K \|x(t) - x(t-1)\|^2 - \langle A(t), x(t) \rangle + K \|x(t) - x(t+1)\|^2$$

имеет смысл только в методе штрафных функций, поскольку абстрактная полезность, взятая со знаком «минус», складывается с абстрактным штрафом.

Замечание. Абстрактная полезность может быть нелинейной, например логарифмической по закону логарифма:

$$x_{ij} A_{ij}(x_{ij}) = a_{ij} \ln(1 + x_{ij}) \approx a_{ij} (x_{ij} - 0,5x_{ij}^2) = a_{ij} (1 - 0,5x_{ij}) x_{ij}; \quad x_{ij} \in (-1, 1];$$

что можно интерпретировать как переменную полезность $A_{ij}(x_{ij}) = a_{ij} (1 - 0,5x_{ij})$ (Лесик, Перевозчиков, 2022).

На практике наиболее применим денежный показатель, который можно связать с равновесной ценой дня:

$$L_t(x) = bP(t-1) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t-1) + aP(t) \|x(t)\|^2 + bP(t+1) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t+1).$$

К нему максимально близок показатель с логарифмом

$$L_t(x) = bP(t-1) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t-1) - \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=n(t)}^n A_{ij} \ln(1 + x_{ij}) + bP(t+1) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t+1)$$

в силу приближенного равенства $A_{ij} \ln(1 + x_{ij}) \approx A_{ij} (x_{ij} - 0,5x_{ij}^2)$.

При $A_{ij} = 2aP(t)$ последний эквивалентен показателю по стоимости, в силу того что сумма линейных частей равна константе в силу балансовых ограничений.

4. СЛУЧАЙ НЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

Иногда вместо (15) используется недифференцируемый выпуклый показатель (12), который при исключении управлений принимает вид

$$L(x) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ - \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=1}^{n(t)} A_{ij} x_{ij}(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t) \right\},$$

где $\Delta x_{ij}^+(t) = \max(x_{ij}(t+1) - x_{ij}(t), 0)$.

Как и в разд. 3, будем рассматривать задачу с неуровновешенным балансом (11). Введем функции:

$$\begin{aligned} f_i^t(x(t)) &= \sum_{j=n(t)}^n x_{ij}(t) - a_i(t) \leq 0, i=1, \dots, m(t); \quad f^t(x(t)) = \max_i f_i^t(x(t)), \quad f(x) = \max_t f^t(x(t)); \\ g_j^t(x(t)) &= \sum_{i=1}^{m(t)} x_{ij}(t) - b_j(t) \leq 0, j=n(t), \dots, n; \quad g^t(x(t)) = \max_j g_j^t(x(t)), \quad g(x) = \max_t g^t(x(t)); \\ F(x) &= \max(f(x), g(x)). \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу минимизации (21) на множестве допустимых значений, заданном агрегированным неравенством

$$F(x) \leq 0 \quad (22)$$

и условием принадлежности объемлющему параллелепипеду

$$x \in V = \bigotimes_t V^t, \quad V^t = \bigotimes_{i,j} V_{ij}^t, \quad V_{ij}^t = [0, M_{ij}(t)]. \quad (23)$$

Эту задачу можно решить методом Поляка (Поляк, 1983):

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= P_V(x^k - \lambda_k v^k), \quad k=0, 1, \dots, \\ v^k &\in \begin{cases} \partial L(x^k), & F(x^k) \leq 0, \\ \partial F(x^k), & F(x^k) > 0, \end{cases} \quad \lambda_k \rightarrow +0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty, \end{aligned} \quad (24)$$

где k — номер шага; λ_k — программный шаг метода; $P_V(x)$ — оператор проектирования на объемлющий параллелепипед V ; $\partial J(x), \partial F(x)$ — субдифференциалы выпуклых функций $J(x), F(x)$. Очевидно, что множество допустимых решений X ограничено и имеет внутренние точки. Тогда согласно результатам (Поляк, 1983, с. 259) справедлива следующая теорема сходимости.

Теорема 3. Последовательность $[x^k]$ в методе (24) сходится к множеству решений задачи минимизации (21) при ограничениях (22), (23).

Возможен, как в дифференцируемом случае, метод проекции субградиента:

$$x^{k+1}(t) = P_{B(t)}(x^k(t) - \lambda_k v_{x(t)}(x^k)) \quad \forall t, \quad k=0, 1, \dots, \quad (25)$$

где $v_{x(t)}(x^k)$ — компонента $x(t)$ субградиента функции $L_t(x^k)$

$$L_t(x) = K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t-1) - \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=1}^{n(t)} A_{ij} x_{ij}(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t+1),$$

λ_k — программный шаг метода, удовлетворяющий условиям (24).

Очевидно, что субградиенты $v_x(x)$ ограничены в совокупности на ограниченном замкнутом множестве B в силу полунепрерывности сверху субградиентного отображения $x \rightarrow v_x(x)$. Тогда согласно результатам (Поляк, 1983, с. 187) справедлива следующая теорема сходимости.

Теорема 4. Последовательность $[x^k]$ в методе (25) сходится к множеству решений задачи минимизации (17) при ограничениях (18).

Как и метод проекции градиента, метод (25) осуществляет декомпозицию задачи минимизации (17) при ограничениях (18), в отличие от алгоритма Поляка (24).

5. ПРИМЕР ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пример 1. Предположим, что в задаче с уравновешенным балансом

$$\|c_{ij}(0)\| = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ a_i(0)/b_j(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \|c_{ij}(1)\| = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a_i(1)/b_j(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = 2.$$

Шаг 0.

Тогда, исключая зависимые переменные из условий (10), приходим к задаче

$$I_0(x(0)) = c_{11}\{a_1(0) - (b_2(0) - x_{22}(0)) - (b_3(0) - x_{23}(0))\} + c_{21}(a_2(0) - x_{22}(0) - x_{23}(0)) + c_{12}(b_2(0) - x_{22}(0)) + c_{13}(b_3(0) - x_{23}(0)) + c_{22}x_{22}(0) + c_{23}x_{23}(0) = 29 - 2x_{22}(0) - 4x_{23}(0) \rightarrow \max \quad (26)$$

при ограничениях

$$a_1(0) - (b_2(0) - x_{22}(0)) - (b_3(0) - x_{23}(0)) \geq 0, \quad a_2(0) - x_{22}(0) - x_{23}(0) \geq 0, \quad b_2(0) - x_{22}(0) \geq 0, \quad b_3(0) - x_{23}(0) \geq 0, \quad x_{22}(0), \quad x_{23}(0) \geq 0, \quad (27)$$

или

$$a_2(0) \geq x_{22}(0) + x_{23}(0) \geq b_2(0) + b_3(0) - a_1(0), \quad b_2(0) \geq x_{22}(0) \geq 0, \quad b_3(0) \geq x_{23}(0) \geq 0, \quad (28)$$

или с учетом значения параметров (рис. 1)

$$4 \geq x_{22}(0) + x_{23}(0) \geq 2, \quad 3 \geq x_{23}(0) \geq 0. \quad (29)$$

Найдем точку максимума показателя (26) при ограничениях (29) геометрически. Получим точку статически-оптимального решения $x_{22}(0) = 2, x_{23}(0) = 0$. Собирая все найденные x_{ij} , запишем статически-оптимальное решение задачи на нулевом шаге:

$$\|x_{ij}(0)\| = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ a_i(0)/b_j(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Шаг 1. Исключая зависимые переменные, приходим к задаче

$$I_1(x) = c_{11}\{a_1(1) - (b_2(1) - x_{22}(1))\} + c_{21}(a_2(1) - x_{22}(1)) + c_{12}(b_2(1) - x_{22}(1)) + c_{22}x_{22}(1) = 22 - 2x_{22}(1) \rightarrow \max \quad (31)$$

при ограничениях

$$a_1(1) - (b_2(1) - x_{22}(1)) \geq 0, \quad a_2(1) - x_{22}(1) \geq 0, \quad b_2(1) - x_{22}(1) \geq 0, \quad x_{22}(1) \geq 0, \quad (32)$$

или

$$a_2(1) \geq x_{22}(1) \geq b_2(1) - a_1(1), \quad b_2(1) \geq x_{22}(1) \geq 0, \quad (33)$$

или с учетом значения параметров

$$4 \geq x_{22}(1) \geq 2. \quad (34)$$

Найдем точку максимума показателя (31) при ограничениях (34) геометрически. Получим точку статически-оптимального решения $x_{22}(1) = 2$. Собирая все найденные x_{ij} , запишем статически-оптимальное решение задачи на шаге 1:

$$\|x_{ij}(1)\| = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a_i(1)/b_j(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Замечание. Приведенный пример получается динамическим расширением примера из (Лесик, Перевозчиков, 2022) и дает точное решение

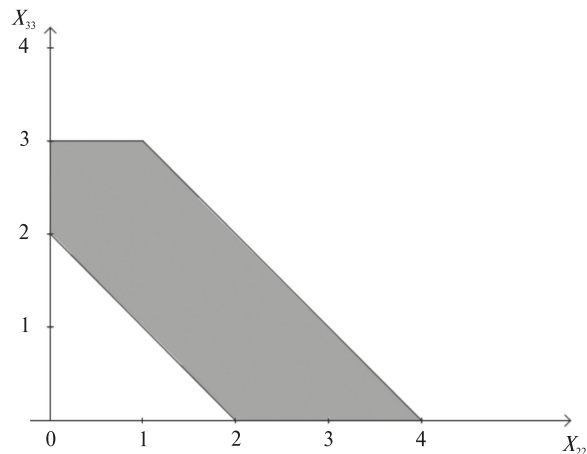


Рис. 1. Допустимая область на нулевом шаге

динамического расширения ТЗ по стоимости с исходной матрицей на два шага. На каждом шаге найденное оптимальное решение статической задачи по времени является решением по стоимости, причем решение второй задачи будет сужением первого 2×3 на подматрицу 2×2 , поэтому штраф за наращивание компонент решения

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \max(x_{ij}(1) - x_{ij}(0); 0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(0);$$

$$\Delta x_{ij}^+(0) = \max(\Delta x_{ij}(0); 0)$$
(36)

будет равен нулю, т.е. минимальным. Эта задача содержит $2 + 1 = 3$ независимые переменные и может быть решена методом проекции градиента и служить для проверки его практической сходимости.

Для решения вспомогательной задачи проектирования множества $B(t)$ на каждом шаге можно использовать конечный метод сопряженных градиентов из (Поляк, 1983, с. 195) применительно к двойственной задаче (там же, с. 297).

Задача проектирования может быть поставлена как задача:

$$\min \left[\langle d, x \rangle + \frac{1}{2\gamma} \|x - a\|^2 \right], \quad Ax \leq b,$$
(37)

где

$$d = \bar{0}, \quad \gamma = 1.$$
(38)

Двойственная задача имеет вид:

$$\min \left[0, 5\gamma \|d + A^T y\|^2 - \langle y, Aa - b \rangle \right], \quad y \geq 0 = \min \left[0, 5\langle Ay, y \rangle - \langle y, e \rangle \right] \triangleq f(y), \quad y \geq 0,$$
(39)

где

$$A = AA^T, \quad e = Aa - b.$$
(40)

Исходная точка минимума связана с точкой минимума двойственной задачи формулой

$$x^* = a - \gamma(A^T y^* + d) = a - A^T y^*.$$
(41)

Градиент показателя (46) задается формулой

$$\nabla f(y) = Ay - e.$$
(42)

Пример 2. Рассмотрим задачу проектирования точки $a = (3, 3)^T$ на допустимое множество статической задачи на нулевом шаге в примере 1. Из рис. 1 видно, что проекцией будет точка $(2, 2)^T$.

Матрица A ограничений (29), векторы b, y будут иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A = AA^T$ и вектор e равны

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Метод сопряженных направлений:

$$y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(y^0) = -e = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Множество индексов I_0 и шаг β_0 равны $I_0 = \{i, y_i^0 = 0, \nabla f(y^0)_i > 0\} = \{2, 4\}; \beta_0 = 0$.

Сопряженный градиент

$$p^0, p_i^0 = \begin{cases} -\nabla f(y^0)_i, & i \notin I_0, \\ 0, & i \in I_0 \end{cases}$$

равен

$$p^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^1 = y^0 + \alpha_0 p^0 = \begin{pmatrix} 2\alpha_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \alpha_0 \in [0, \infty).$$

Найдем производную функции $F(\alpha_0) \triangleq f(y^0 + \alpha_0 p^0)$:

$$\begin{aligned} F'_{\alpha_0}(\alpha_0) &= \langle \nabla f(y^0 + \alpha_0 p^0), p^0 \rangle = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2\alpha_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \alpha_0 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 8\alpha_0 - 4 = 0 \Rightarrow \alpha_0^* = 0,5. \end{aligned}$$

Отсюда

$$y^1 = y^0 + 0,5p^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(y^1) = y^1 - e = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Множество индексов I_1 и шаг β_1 равны $I_1 = I_0 \cup \{i, y_i^1 = 0\} = \{2, 3, 4\}; I_1 \neq I_0 \Rightarrow \beta_1 = 0 \Rightarrow y^2 = y^1 = y^*$.
Отсюда

$$x^* = a - A^T y^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

что совпадает с ранее найденной точкой.

Пример 3. В условиях примера 2 сделаем один шаг метода проекции субградиента (25). Тогда общий показатель (21) имеет вид:

$$\begin{aligned} L(x) &= -(29 - 2x_{22}(0) - 4x_{23}(0)) - (22 - 2x_{22}(1)) + \max[(x_{22}(1) - 2) - (x_{22}(0) + x_{23}(0) - 2)] + \\ &+ \max[(4 - x_{22}(1)) - (4 - x_{22}(0))] + \max[(4 - x_{22}(1)) - (4 - x_{22}(0) - x_{23}(0))] + \max[x_{22}(1) - x_{22}(0)] \end{aligned} \quad (43)$$

при ограничениях (29) и (34):

$$4 \geq x_{22}(0) + x_{23}(0) \geq 2, \quad 3 \geq x_{23}(0) \geq 0, \quad 4 \geq x_{22}(1) \geq 2.$$

В качестве начальных координат возьмем точку

$$x^0(0) = \begin{pmatrix} x_{22}^0(0) \\ x_{23}^0(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x^0(1) = x_{22}^0(1) = 4.$$

В этой точке только последний максимум в (43) положителен, поэтому субградиенты вычисляются по формулам:

$$v_{x(0)}(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_{x(1)}(x^0) = 2 + 1 = 3.$$

Теперь можно сделать первый шаг метода проекции субградиента:

$$x^1(0) = \mathbf{P}_{B(0)}(x^0(0) - \lambda_0 v_{x(0)}(x^0)) = \mathbf{P}_{B(0)}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \mathbf{P}_{B(0)}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix},$$

$$x^1(1) = \mathbf{P}_{B(1)}(x^0(1) - \lambda_0 v_{x(1)}(x^0)) = \mathbf{P}_{B(1)}(4 - 1 \times 3) = 2.$$

Если нанести полученную точку на рис. 1, видно, что она близка к аналитическому решению модельного примера динамической задачи, полученному в примере 1: $x_{22}(0) = 2$, $x_{23}(0) = 0$, $x_{22}(1) = 2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена практически значимая методология распределения загрузки работ по исполнителям на рынке РПО, обеспечивающая стабилизацию планов назначения за счет уменьшения изменения этих планов. Показано, что задача определения оптимальных приращений планов сводится к блочной задаче выпуклого программирования и может быть решена методом проекции градиента в дифференцируемом случае и методом Поляка в негладком случае. Основным результатом работы является декомпозиция задачи на основе метода проекции градиента или метода Поляка.

Результаты работы позволяют применять их в транзакционных платформах на рынке РПО для динамической загрузки заданий (согласно терминологии, обоснованной в работе (Устюжанина, Дементьев, Евсюков, 2021)).

В статье построена динамическая модель загрузки заданий с двумя группами агентов — компаниями—разработчиками ПО и компаниями—заказчиками ПО, которые могут опередить свои резервные цены на рынке повременной аренды разработанного ПО в двухсекторной модели экономики (Васин, Морозов, 2005). Дискриминируемыми агентами являются компании—заказчики ПО, которые оплачивают услуги оператора платформы в виде процентных надбавок, включенных оператором в цену работы компаний—разработчиков ПО. Имеются в виду платформы-рынки, взаимодействие экономических агентов на которых имеет эпизодический характер разовых сделок. Предполагается удаленное взаимодействие, т.е. возможность коммуникации между агентами, находящимися на любом расстоянии друг от друга. Допускается возможность масштабирования, т.е. теоретическое отсутствие ограничений для расширения поля взаимодействия (числа пользователей). Такое расширение возможно за счет перекрестного сетевого эффекта, когда численность одного вида пользователей влияет на численность другого вида (спрос порождает предложение, и наоборот).

Предполагается возможность ЦТП оказывать влияние на объем коммуникации через уровень и структуру цен. Исходя из базовых характеристик поля взаимодействия, платформа РПО относится к двусторонним рынкам. Для одноранговых (peer-to-peer) (Устюжанина, Дементьев, Евсюков, 2021) ЦТП, к которым относятся платформы на рынке РПО, организующие торговые транзакции, непосредственными агентами являются поставщики — агенты, разрабатывающие ПО, и потребители — агенты, использующие разработанное ПО для повременной сдачи в аренду. Операторы платформы на рынке РПО могут получать доход в виде платы пользователей за покупку. Пользователи получают доход в виде платы за повременное использование разработанных ПО в двухсекторной модели экономики (Васин, Морозов, 2005). Цены на такое ПО определяют резервные цены потребителей, по терминологии, принятой в указанной работе.

Настоящая статья является продолжением серии статей (Перевозчиков, Лесик, 2014; Лесик, Перевозчиков, 2016, 2020) о динамическом расширении статических моделей рынка с рынка инвестиций на рынок разработки программного обеспечения и использует разработанный там инструментарий, который может служить фундаментальной основой для построения соответствующих цифровых платформ. Предложенная схема динамического расширения задачи переносится на транспортную задачу с переменными коэффициентами, изученную в работе (Лесик, Перевозчиков, 2022).

В общетеоретическом плане схема решения динамической задачи, предложенная в настоящей статье, может считаться схемой декомпозиции, основанной на численном методе решения (Цурков, 1981, с. 111).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Ашманов С.А. (1981). Линейное программирование. М.: Наука. [Ashmanov S.A. (1981). *Linear programming*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Васильев Ф.П. (1981). Методы решения экстремальных задач. М.: Наука. [Vasil'ev F.P. (1981). *Methods for solving extreme problems*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Васин А.А., Григорьева О.М., Лесик И.А. (2017). Синтез транспортной системы многоузлового конкурентного рынка с переменным спросом // *Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова*. Под ред. В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс. № 55. С. 74–90. [Vasin A.A., Grigor'eva O.M., Lesik I.A. (2017). Synthesis of the transport system of a multi-node competitive market with variable demand. *Applied Mathematics and computer science: Proceedings of the Faculty of Computational mathematics and cybernatics of Lomonosov Moscow State University*. V.I. Dmitriev (ed.). Moscow: MAKS Press, 55, 74–90 (in Russian).]
- Васин А.А., Григорьева О.М., Лесик И.А. (2018). Задача оптимизации транспортной системы энергетического рынка. В сб.: IX Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2018). Труды. А.А. Васин, А.Ф. Измаилов (отв. ред.). С. 247–251. [Vasin A.A., Grigor'eva O.M., Lesik I.A. (2018). The problem of optimizing the transport system of the energy market. In: *The collection of the IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM2018). Proceedings*. A.A. Vasin, A.F. Izmailov (resp. eds.), 247–251 (in Russian).]
- Васин А.А., Григорьева О.М., Цыганов Н.И. (2017). Оптимизация транспортной системы энергетического рынка // *Доклады Академии наук*. Т. 475. № 4. С. 377–381. [Vasin A.A., Grigor'eva O.M., Cyganov N.I. (2017). Optimization of the transport system of the energy market. *Reports of the Academy of Sciences*, 475, 4, 377–381 (in Russian).]
- Васин А.А., Морозов В.В. (2005). Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс. [Vasin A.A., Morozov V.V. (2005). *Game theory and models of mathematical economics*. Moscow: MAKS Press (in Russian).]
- Корбут А.А., Финкильштейн Ю.Ю. (1969). Дискретное программирование. Под ред. Д.Б. Юдина. М.: Наука. [Korbut A.A., Finkil'shtein Yu.Yu. (1969): *Discrete programming* D.B. Yudin (ed.). Moscow: Nauka (in Russian).]
- Лесик И.А., Перевозчиков А.Г. (2016). Определение оптимальных объемов производства и цен реализации в линейной модели многопродуктовой монополии // *Экономика и математические методы*. Т. 52. № 1. С. 140–148. [Lesik I.A., Perevozchikov A.G. (2016). Determination of optimal production volumes and sales prices in a linear model of a multi-product monopoly. *Economics and Mathematical Methods*, 52, 1, 140–148 (in Russian).]
- Лесик И.А., Перевозчиков А.Г. (2020). Динамическая модель инвестиций в научные исследования олигополии // *Экономика и математические методы*. Т. 56. № 2. С. 102–114. [Lesik I.A., Perevozchikov A.G. (2020). A dynamic model of investment in scientific research of an oligopoly. *Economics and Mathematical Methods*, 56, 2, 102–114 (in Russian).]
- Лесик И.А., Перевозчиков А.Г. (2021). Динамическая модель рынка разработки программного обеспечения на основе задачи о назначении на узкие места // *Экономика и математические методы*. Т. 57. № 4. С. 108–116. [Lesik I.A., Perevozchikov A.G. (2021). A dynamic model of software development based on the problem of assignment to bottlenecks. *Economics and Mathematical Methods*, 56, 4, 102–114 (in Russian).]
- Лесик И.А., Перевозчиков А.Г. (2022). Статическая модель рынка разработки программного обеспечения на основе транспортной задачи с квадратичными добавками по стоимости // *Экономика и математические методы*, 58, 3, 146–160. [Lesik I.A., Perevozchikov A.G. (2022): Market's static model for software development based on a transport problem with quadratic cost additions. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 94–101 (in Russian).]
- Макаров В.Л., Рубинов Ф.М. (1973). Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука. [Makarov V.L., Rubinov F.M. (1973). *Mathematical theory of economic dynamics and equilibrium*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Мезоэкономика развития (2011). Под ред. Г.Б. Клейнера. М.: Наука. [Mesoeconomics of development (2011). G.B. Kleiner (ed.). Moscow: Nauka (in Russian).]
- Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. (2014). Нестационарная модель инвестиций в основные средства предприятия. В сб.: *Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова*. Под ред. В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 46, 76–88. [Perevozchikov A.G., Lesik I.A. (2014). Non-stationary model of investment in fixed assets of the enterprise. In: *Applied mathematics and computer science: Proceedings of the Faculty of Computational mathematics and cybernatics of Lomonosov Moscow State University*. V.I. Dmitriev (ed.). Moscow: MAKS Press, 46, 102–114 (in Russian).]

- Поляк Б.Т. (1983). Введение в оптимизацию. М.: Наука. [Polyak B.T. (1983). *Introduction to optimization*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Сергиенко А.М., Симоненко В.П., Симоненко А.В. (2016). Улучшенный алгоритм назначения для планировщиков заданий в неоднородных распределительных вычислительных системах // *Системні дослідження та інформаційні технології*. № 2. С. 20–35. [Sergienko A.M., Simonenko V.P., Simonenko A.V. (2016). Improved assignment algorithm for task schedulers in heterogeneous distributed computing systems. *System Research and Information Technologies*, 2, 20–35 (in Russian).]
- Устюжанина Е.В., Дементьев В.Е., Евсюков С.Г. (2021). Транзакционные цифровые платформы: задача обеспечения эффективности // *Экономика и математические методы*. Т. 57. № 1. С. 5–18. [Ustyuzhanina E.V., Dement'ev V.E., Evsyukov S.G. (2021). Transactional digital platforms: The task of ensuring efficiency. *Economics and Mathematical Methods*, 57, 1, 5–18 (in Russian).]
- Цурков В.И. (1981). Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука. [Tsurkov V.I. (1981). *Decomposition in large-dimensional problems*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Debreu G. (1954). Valuation equilibrium and Pareto optimum. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 40, 588–592.
- Ding X., Wang K., Gibbons P.B., Zhang X. (2012). BWS: Balanced work stealing for time-sharing multicores. *Proceedings of the 7th ACM European Conference on Computer Systems*. New York. *EuroSys.*, 365–378.

Reducing the dynamic model of the software development market to a block problem of convex programming

© 2023 I.A. Lesik, A.G. Perevozchikov

I.A. Lesik,

Joint-Stock Company Scientific and Production Association “Russian basic information technology”, Moscow, Russia; e-mail: lesik56@mail.ru

A.G. Perevozchikov,

Joint-Stock Company Scientific and Production Association “Russian basic information technology”, Moscow, Russia; e-mail: pere501@yandex.ru

Received 08.11.2022

Abstract. The authors propose to reduce a discrete dynamic model of the software development market to a block problem of convex programming, which can be solved by successive approximations based on contraction mapping, in case of abandoning the integer elements of the destination matrix. However, there are also peculiarities: equilibrium prices can be calculated directly and therefore a variational formulation of the internal problem of determining equilibrium prices based on Debreu's theorem is not required. The functions of phase coordinates' change can be taken as convex, for example, the norm of the difference squared, and do not take into account the fixed costs for each control switch, which is excluded from the equations of system's dynamics. The resulting block problem of convex programming allows decomposition by freezing the connection variables with neighboring blocks at the level of the previous iteration. It is shown that the operator on the right side of the resulting recurrent equation is compressive under fairly general conditions. This allows the authors to prove successive approximations for solving the resulting problem, based on the principle of contraction mapping. The authors give the model example of its use in the dynamic expansion of the transport problem according to the value.

Keywords: transport problem according to the value, problem's dynamic expansion, exclusion of controls, problem's decomposition, principle of contraction mapping, method of successive approximations.

JEL Classification: O12, C51.

For reference: Lesik I.A., Perevozchikov A.G. (2023). Reducing the dynamic model of the software development market to a block problem of convex programming. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 119–130. DOI: 10.31857/S042473880024879-5