ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2023, том 59, № 4, с. 126–129

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Многокритериальная оптимизация на графах. Результаты вычислительных экспериментов

К.Р. Ахонов,
НИУ МЭИ, Москва; e-mail: AkhonovKR@mpei.ru

А.А. Заславский
ЦЭМИ РАН; НИУ МЭИ, Москва; e-mail: alzasl@yandex.ru

Е.В. Ковырзина,
НИУ МЭИ, Москва; e-mail: Kovyrzinayv@mpei.ru

Поступила в редакцию 07.07.2023

Аннотация. Метод пометок (метод Дейкстры) позволяет найти кратчайший путь между двумя вершинами графа, для каждого ребра которого задана длина. В статье А.М. Беловой и А.А. Заславского 2020 г. была предложена модификация метода пометок для задачи могокритериальной оптимизации на графах. В отличие от классического метода пометок в этой задаче предполагалось, что каждое ребро графа характеризуется не одной, а несколькими характеристиками, например временем и стоимостью проезда по ребру. Возникающая в результате задача многокритериальной оптимизации не имеет однозначного решения, поскольку у разных лиц, принимающих решения (ЛПР), могут быть разные представления о значимости критериев. Возможный подход к решению этой проблемы состоит в формализации предпочтений ЛПР на основе полученной от него информации и построении оптимального по Парето пути с учетом этих предпочтений. В 2020 г. А.М. Беловой и А.А. Заславским был предложен один из возможных способов решения этой задачи, основанный на оптимизации одного из критериев при заданных ЛПР ограничениях на остальные критерии. Данная работа продолжает начатые А.М. Беловой и А.А. Заславским исследования модифицированного метода пометок. В ней описываются результаты вычислительных экспериментов, проведенных К.Р. Ахоновым и Е.В. Ковырзиной для проверки эффективности предложенного алгоритма.

Ключевые слова: граф, метод пометок, многокритериальная оптимизация, оптимальность по Парето.

Классификация JEL: C02.

Для цитирования: **Ахонов К.Р., Заславский А.А., Ковырзина Е.В.** (2023). Многокритериальная оптимизация на графах. Результаты вычислительных экспериментов // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 4. С. 126–129. DOI: 10.31857/S042473880028296-4

Метод пометок (МП), или метод Дейкстры (Ху, 1974, гл. 10), позволяет решить следующую задачу. Дан ориентированный граф, каждому ребру которого приписано положительное число (длина ребра). Требуется найти кратчайший путь от вершины S до вершины F. Если каждое ребро графа характеризуется не одной, а несколькими величинами, например временем пути и его стоимостью, то невозможно однозначно указать наилучший путь из S в F, поскольку у разных лиц, принимающих решения (ЛПР), могут быть разные представления о сравнительной важности критериев. При этом необходимо требовать, чтобы найденный путь был оптимальным по Парето, т.е. не существовало пути, лучшего по всем критериям (Подиновский, Ногин, 1982, гл. 1; Захарова, Минашина, 2014). Представляется естественной задача построить достаточно представительное множество Парето-оптимальных путей, из которого ЛПР сможет выбрать устраивающий его путь. Строить такое множество целесообразно с помощью интерактивной процедуры, постепенно уточняя требования ЛПР. В качестве основы для такой процедуры в работе (Белова, Заславский, 2020) был предложен следующий алгоритм.

Будем искать путь, минимизирующий один из критериев T (назовем этот критерием временем) и удовлетворяющий заданным ЛПР ограничениям для остальных критериев $C_1, \ldots, C_n$. Пусть для критерия j ($j = 1, \ldots, n$) ЛПР задал в качестве максимального допустимого значения C_{j0}.

В отличие от классического алгоритма МП вершина графа может получить не одну, а несколько пометок (T_1, C_{11}, ..., C_{n1}), ..., (T_k, C_{1k}, ..., C_{nk}), где $T_1<...<T_k$. Кроме того, пометки могут не только добавляться, но и удаляться.

Приведем формальное описание алгоритма.

Шаг 0. Присвоим вершине S постоянную пометку (0, ..., 0), а остальным вершинам временные бесконечные пометки.

Шаг 1. Пусть V — последняя вершина, получившая постоянную пометку (T, C_1, ..., C_n). Для каждой вершины i, в которую ведет ребро из V, вычислим величины $T_i'=T+t_i$, $C_{ji}'=C+C_{ji}$, где t_i, c_{ji} — время и значение критерия j, соответствующие ребру $V-i$.

Шаг 2. Если не существует вершины i, для которой $C_{ji}'\le C_{j0}$ ($j = 1, ..., n$), удаляем пометку (T, C) и переходим к шагу 4.

Шаг 3. Сравниваем вектор (T_i', $C_{1i}', \ldots, C_{ni}'$) со всеми пометками (T_k, C_{k1}, ..., C_{kn}), присвоенными вершине i. Если для некоторого k $T_k\le T_i'$ и $C_{kj}\le C_{ji}'$, то новая пометка не записывается; в противном случае записываем новую пометку и удаляем все пометки (T_j, C_j) с $T_i'\le T_k$ и $C_{ji}'\le C_{kj}$.

Шаг 4. Если не существует ни одной временной пометки с $C_{ji}'\le C_{j0}$ ($j = 1, ..., n$), алгоритм заканчивает работу (т.е. не существует пути, удовлетворяющего заданному ограничению по стоимости). В противном случае находим пометку с наименьшим T и делаем ее постоянной.

Шаг 5. Если вершина, получившая постоянную пометку, совпадает с F, строим обратным ходом искомый путь. Иначе возвращаемся к шагу 1.

ОПИСАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Все вычисления проводились на машине со следующими характеристиками: процессор — Intel(R) Core(TM) i5-8300H CPU @ 2.30GHz 2.30 GHz, x64; оперативная память — 8ГБ. Программа была написана на языке C++19.

Для проверки эффективности предложенного алгоритма использовался следующий метод генерации графов.

Между вершинами S и F располагаются N уровней по K вершин на каждом, вершины S и F соединяются со всеми вершинами ближайших к ним уровней. Между любыми двумя вершинами, лежащими на соседних уровнях, проводится ребро с вероятностью p_1, а между двумя вершинами, лежащими через уровень,— с вероятностью p_2. После этого выбираются случайные значения весов ребер (критериев).

В вычислительных экспериментах исследовалась зависимость эффективности алгоритма от значений N, K, p_1, p_2, а также от наличия положительной или отрицательной корреляции между критериями.

Для ускорения работы алгоритма К.Р. Ахонов предложил проводить предварительную обработку графа (описанную в данной статье), включающую удаление тупиковых вершин (с входящей или исходящей степенью, равной нулю) и вершин с входящей или исходящей степенью, равной 1. В последнем случае исходящие из вершины (входящие в нее) ребра объединялись с единственным входящим (исходящим), а значения соответствующих параметров суммировались.

Результаты экспериментов. В табл. 1 приведено время работы алгоритма при различных значениях N и K для двух и трех критериев. Значения критериев выбирались равномерно распределенными от 1 до максимально возможных, приведенных в таблице в столбцах W1lim, W2lim, W3lim соответственно.

Из таблицы видно, что для трех критериев алгоритм, как правило, работает дольше, чем для двух. Кроме того, можно сделать вывод, что наиболее существенное влияние на время работы алгоритма оказывает средняя длина N путей между S и F. Например, время при $N = 5$, $K = 100$ и $N = 100$, $K = 5$ отличается примерно в 40 раз для двух и почти в 1000 раз для трех критериев, хотя общее число вершин в обоих случаях будет одинаковым.

В табл. 2 приводится время работы алгоритма для двух критериев при наличии положительной и отрицательной корреляций между ними. Результаты приведены для графов с $N = 100$, $K = 5$. Можно сделать вывод, что наличие положительной корреляции существенно уменьшает время работы алгоритма. Это связано с тем, что при отрицательной корреляции число Парето-оптимальных путей существенно больше, а значит, возрастает время проверки выполнения ограничений.

В табл. 3 приводится время работы алгоритма в зависимости от вероятностей p_1, p_2 наличия ребер между соседними и несоседними уровнями. Вероятности даны в процентах, расчеты проводились для $N = K = 10$. Видно, что время работы возрастает с ростом каждой вероятности. При этом влияние вероятности p_1 оказывается выше. Это связано с ростом средней длины путей между S и F.

В целом проведенные эксперименты позволяют сделать вывод о возможности применения предложенных алгоритмов для решения задач многокритериальной оптимизации на графах.

Таблица 1. Зависимость времени работы от размеров графа

Число узлов	N	K	W1lim	W2lim	W3lim	Время, с	
						пара весов	тройка весов
50	5	10	20	20	4	0,1576	0,1257
50	10	5	40	30	7	0,1225	0,2442
100	5	20	20	20	4	0,6843	0,2146
100	10	10	40	30	7	0,2410	0,6473
100	20	5	80	60	10	0,4480	1,6
100	25	4	100	80	13	0,3122	2,4063
200	5	40	20	20	4	0,3568	0,549
200	10	20	40	30	7	0,5914	1,4066
200	20	10	80	60	10	0,8839	3,6059
200	40	5	180	150	25	2,2904	27,5977
200	50	4	225	180	35	1,9837	13,0893
500	5	100	20	20	4	0,4509	0,6891
500	10	50	40	30	7	0,9576	1,8847
500	25	20	100	80	13	3,522	21,1931
500	50	10	225	180	35	10,3546	73,919
500	100	5	450	375	60	18,9923	276,9526
500	125	4	560	400	90	24,8978	556,2984

Таблица 2. Зависимость времени работы от корреляции между критериями

Эксперимент	T, с			
	$r = 1$	$r = 0,85$	$r = -0,85$	$r = -1$
1	2,286	12,586	25,459	26,982
2	2,571	12,727	34,885	34,623
3	0,737	12,867	38,079	41,417
4	0,986	9,759	42,275	30,129
5	0,813	6,691	36,341	26,480
6	1,1	6,87	24,406	35,606
7	1,045	5,477	40,466	42,006
8	1,887	12,327	32,154	30,618
9	1,211	7,213	33,250	37,179
10	2,82	10,163	32,158	21,766
Среднее значение	1,546	9,67	33,947	32,681

Таблица 3. Зависимость времени работы от вероятностей наличия ребер между уровнями

p_1/p_2	Время выполнения, с					Среднее время, с
10/90	0,0018289	0,0017563	0,0017611	0,0013354	0,0016391	0,0016642
30/70	0,0014451	0,0016674	0,0013402	0,0025126	0,0018623	0,0017655
50/50	0,0016126	0,0031358	0,0024080	0,0019583	0,0021339	0,0022497
70/30	0,0027430	0,0022483	0,0020195	0,0022756	0,0032750	0,0025123
90/10	0,0025741	0,0033038	0,0025390	0,0030616	0,0025954	0,00281478
10/10	0,0017332	0,0012298	0,0020653	0,0008926	0,0013524	0,00145466
90/90	0,0025865	0,0032779	0,0042503	0,0023808	0,0036200	0,0032231

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

Белова А.М., Заславский А.А. (2020). Модификация метода пометок для задач многокритериальной оптимизации на графах // *Экономика и математические методы*. Т. 56. № 1. С. 95–99. DOI: 10.31857/S042473880008559-3 [**Belova A.M., Zaslavsky A.A.** (2020). Modification of the label method for problems of multicriterial optimization. *Economics and Mathematical Methods*, 56, 1, 95–99. DOI: 10.31857/S042473880008559-3 (in Russian).]

Захарова Е.М., Минашина И.К. (2014). Обзор методов многокритериальной оптимизации // *Информационные процессы*. Т. 14. № 3. С. 256–274. [**Zakharova E.M., Minashina I.K.** (2014). Methods of multicriterial optimizaton. *Information Processes*, 14, 3, 256–274 (in Russian).]

Подиновский В.В., Ногин В.Д. (1982). Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука. [**Podinovsky V.V., Nogin V.D.** (1982). *Pareto-optimal solutions of multicriterial problems*. Moscow: Nauka (in Russian).]

Ху Т. (1974). Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир. [**Hu T.C.** (1974). *Integer programming and network flows*. Transl. from the English. Moscow: Mir. Originally published in 1970. California–London: Addison-Wesley Publishing Company (in Russian).]

Multicriterial optimization on graphs. Results of calculating experiments

K.R. Akhonov,
National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (NRU MPEI), Moscow, Russia; e-mail: AkhonovKR@mpei.ru

A.A. Zaslavsky,
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences (CEMI RAS); National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (NRU MPEI), Moscow, Russia; e-mail: alzasl@yandex.ru

E.V. Kovyrzina,
National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (NRU MPEI), Moscow, Russia; e-mail: Kovyrzinayv@mpei.ru

Received 07.07.2023

Abstract. The label method (Dejkstra's method) allows to find the shortest path between two vertices of graph with given lengths of edges. In the article by A.M. Belova and A.A. Zaslavsky (2020) the modification of label method was proposed for problems of multicriterial optimization on graphs. Differentiating from classical label method, this problem supposes that the values of several criteria are given for each edge. As a result we obtain a multicriterial problem which doesn't have the unique solution because different decision makers may have different opinions about the importance of criteria. A possible approach to the solution of this problem includes the formalization of preferences of decision makers and the construction of a Pareto-optimal way corresponding to these preferences. In 2020 A.M. Belova and A.A. Zaslavsky proposed an approach to this problem based on the optimization of one of criteria with limiting terms for the remaining criteria. This paper continues the investigations of the modified label method. It describes the results of calculating experiments examinating the effectivness of proposed algorythm made by K.R. Akhonov and E.V. Kovyrzina.

Keywords: graph, label method, multicriterial optimization, Pareto-optimality.

JEL Classification: C02.

For reference: **Akhonov K.R., Zaslavsky A.A., Kovyrzina E.V.** (2023). Multicriterial optimization on graphs. Results of calculating experiments. *Economics and Mathematical Methods,* 59, 4, 126–129. DOI: 10.31857/S042473880028296-4 (in Russian).