

Ретроспективный анализ структурных сдвигов в моделях СОУ с переменной структурой. Часть 2¹

© 2018 г. С.А. Айвазян*, Б.Е. Бродский**

ЦЭМИ РАН, Москва

* E-mail: aivazian@cemi.rssi.ru ** E-mail: bbrodsky@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.06.2017 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-18-01080).

Работа представляет собой вторую часть исследования по проблеме обнаружения структурных сдвигов в моделях СОУ (система одновременных уравнений). В ней рассмотрено обоснование метода ретроспективного обнаружения множественных структурных сдвигов, имитационное моделирование предложенного метода, а также эконометрические приложения к задачам макроэконометрического моделирования экономик США и России. В частности, рассмотрена модель экономики США Клейна (обнаружен структурный сдвиг 1929 г.), а также дезагрегированная модель российской экономики (обнаружены структурные сдвиги в 2002 г. и 2010 г.). Представленные в работе результаты имитационных экспериментов показывают, что предложенный метод по своим статистическим характеристикам не уступает известным методам и позволяет эффективно обнаруживать моменты структурных сдвигов в системах одновременных уравнений.

Ключевые слова: модель СОУ, эконометрический анализ, ретроспективное обнаружение, множественные структурные сдвиги, имитационное моделирование, макроэконометрические модели.

Классификация JEL: C30, C51.

DOI: 10.31857/S042473880003320-1

4. МНОЖЕСТВЕННЫЕ СТРУКТУРНЫЕ СДВИГИ

Предложенный метод может быть обобщен на задачи обнаружения и оценивания множественных структурных сдвигов в регрессионных зависимостях. Известный метод решения этих задач состоит (см., например, (Bai, Lumsdaine, Stock, 1998)) в декомпозиции всей полученной выборки данных на всевозможные подвыборки и построении регрессионных оценок для каждой из подвыборок. Декомпозиция, для которой достигается минимум сумм регрессионных остатков, объявляется оценкой декомпозиции всей выборки данных на различные регрессионные режимы.

Подобные методы являются весьма затратными по объему машинного времени и имеют малую мощность. В самом деле, пусть в полученной выборке данных имеются всего два регрессионных режима, но мы не знаем об этом и перебираем все подвыборки вплоть до объема двадцать точек. Тогда объем вычислений будет поистине огромным, а точность вычислений весьма низкой: много ложных структурных сдвигов будет диагностировано.

Мы предлагаем новый метод обнаружения и оценивания множественных структурных сдвигов, который не основан на декомпозиции выборки и вычислении регрессионных оценок. Этот метод более эффективен и менее чувствителен к возможным неточностям в спецификации регрессионных моделей.

Вначале поясним основную идею этого метода на примере модели многофакторной регрессии с детерминированными предикторами. Пусть $\vartheta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, $k \geq 1$ — вектор неизвестных параметров разладки такой, что $0 \equiv \theta_0 < \beta \leq \theta_1 < \dots < \theta_k \leq \alpha < \theta_{k+1} \equiv 1$ и наблюдения взяты из модели

$$y_n = \Pi^*(\vartheta, n)F(n/N) + v_n. \quad (17)$$

¹ Часть 1 данной статьи была опубликована в № 1 за 2018 г.

Здесь $\Pi(\vartheta, n) = \sum_{i=1}^{k+1} a_i I([\theta_{i-1}N] < n \leq [\theta_i N])$, где $a_i \neq a_{i+1}$, $i = 1, \dots, k$ — неизвестные вектора, $F(t)$ — заданная вектор-функция.

Рассмотрим основную решающую статистику (6). Математическое ожидание этой статистики сходится при $N \rightarrow \infty$ к функции

$$m(t) = \int_0^t F(s) F^*(s) \Pi(\vartheta, s) ds - A(t) I^{-1} \int_0^1 F(s) F^*(s) \Pi(\vartheta, s) ds.$$

Из этого выражения следует, что в ситуации, когда нет структурных сдвигов, т.е. вектор регрессионных коэффициентов постоянен на $[0, 1]$, функция $m(t)$ будет тождественным нулем на $[0, 1]$, но присутствие структурных сдвигов значимо изменяет функцию $m(t)$. Это свойство позволяет эффективно обнаружить структурный сдвиг в данных.

Формальный метод состоит в следующем. Зафиксируем малый параметр $0 < \varepsilon < \beta$ и рассмотрим алгоритм.

Шаг 1. Рассчитаем статистику (6) по данным в диапазоне аргументов $\mathcal{N} = ([\beta N], \dots, N)$. Если $\max_{n \in \mathcal{N}} \|Z_{\mathcal{N}}(n)\|^2 > C$, где $C = C(\mathcal{N})$ — порог принятия решения, то рассчитаем $nmax = \arg \max_{n \in \mathcal{N}} \|Z_{\mathcal{N}}(n)\|^2$, в противном случае выборка считается однородной (без структурных сдвигов).

Шаг 2. Положим $N' = nmax - [\varepsilon N]$ и рассчитаем статистику (6) по данным в диапазоне аргументов $\mathcal{N}' = ([\beta N], \dots, N')$ согласно шагу 1. Этот цикл повторяется, пока:

а) получим однородную выборку данных в диапазоне аргументов $([\beta N], \dots, N')$, т.е. $\max_{n \in \mathcal{N}'} \|Z_{\mathcal{N}'}(n)\|^2 \leq C(N')$. Тогда положим $n(1) = N' + [\varepsilon N]$ в качестве оценки первой точки структурного сдвига и переходим к шагу 3;

б) или получим объем выборки $N' \leq [2\varepsilon N]$, тогда положим $n(1) = N' + [\varepsilon N]$ и перейдем к шагу 3.

Шаг 3. Положим $n' = n(1) + [\varepsilon N]$ и рассчитаем статистику (6) по данным в диапазоне аргументов $(n', \dots, N)$ (т.е. с относительными аргументами $[1, \dots, N - n' + 1]$) и далее повторяем шаги 1 и 2. Этот цикл повторяется, пока не получена однородная выборка данных в диапазоне аргументов $[n', \dots, nmax]$ или $nmax - n' \leq [2\varepsilon N]$. Тогда положим $n(2) = nmax$ в качестве оценки следующей точки структурного сдвига. Если $N - n(2) < [2\varepsilon N]$, то останавливаемся, в противном случае повторяем шаг 3 по данным в диапазоне аргументов $(n(2), \dots, N)$.

В результате получим ряд оценок $n(1), n(2), \dots$ истинных моментов разладки $[\theta_1 N], \dots, [\theta_k N]$. Число этих оценок $\hat{k}_N$ определяется числом стационарных подвыборок $[1, \dots, n(1)], \dots, [n(i), \dots, n(i+1)], \dots, [n(\hat{k}_N), \dots, N]$.

Предложенный метод основан на редукции к случаю одного структурного сдвига. Ключевым моментом является вычисление порога принятия решения $C(N)$, зависящего от объема выборки N .

Итак, пусть $\hat{k}_N$ — оценка количества моментов структурных сдвигов в выборке, а $\hat{\vartheta}_N = (\theta_{N1}, \dots, \theta_{N\hat{k}_N})'$ — вектор координат этих моментов, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены предположения теоремы 2. Более того, допустим, что существуют такие числа $h > 0$, $B > 0$, что для всех $i = 2, \dots, k + 1$:*

$$0 < \|A(\theta_{i-1}, \theta_i) A^{-1}(\theta_{i-2}, \theta_{i-1})\| \leq h, \quad \|A(\theta_{i-1}, \theta_i)(a_i - a_{i-1})\| \geq B > 0. \quad (18)$$

Тогда для любого достаточно малого $\delta > 0$ имеем:

$$\mathbf{P} \left\{ (\hat{k}_N \neq k) \cup \left\{ (\hat{k}_N = k) \cap \left(\max_{1 \leq i \leq k} |\hat{\theta}_{Ni} - \theta_i| > \delta \right) \right\} \right\} \leq C(\delta) \exp(-D(\delta)N), \quad (19)$$

где константы $C(\delta) > 0$, $D(\delta) > 0$ не зависят от N .

Из теоремы 3 следует, что оценка числа моментов структурных сдвигов сходится п.н. к истинному значению этого параметра, а координаты этих оценок — к истинным координатам моментов структурных сдвигов п.н. при $N \rightarrow \infty$.

Доказательство. Предложенный метод обнаружения и оценивания множественных структурных сдвигов основан на редукции к случаю единственного структурного сдвига. Поэтому для доказательства теоремы 3 достаточно доказать два утверждения. Первое: для стационарной подвыборки данных норма решающей статистики метода, как правило, не превосходит порога. Этот факт является прямым следствием теоремы 1. Второе: в случае нестационарной подвыборки данных (не менее одного момента структурного сдвига) норма решающей статистики, как правило, превосходит решающий порог. Для единственного момента структурного сдвига это утверждение уже доказано (теорема 2). Поэтому рассмотрим подвыборку данных объема N с двумя (по меньшей мере) моментами структурных сдвигов $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$.

В ситуации детерминированных предикторов решающая статистика может быть разложена на детерминированную и стохастическую часть: $Z_N(t) = Y_N(t) + \eta_N(t)$. При $0 \leq t \leq \theta_1$ детерминированное слагаемое равно:

$$Y_N(t) = A(t)a_1 - A(t)A^{-1}(1)(A(\theta_1)a_1 + A(\theta_1, \theta_2)a_2 + \dots + A(\theta_k, 1)a_{k+1}) = A(t)(a_1 - A^{-1}(1)u),$$

где $u = A(\theta_1)a_1 + A(\theta_1, \theta_2)a_2 + \dots + A(\theta_k, 1)a_{k+1}$, а при $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$ —

$$Y_N(t) = A(\theta_1)a_1 + A(\theta_1, t)a_2 - A(t)A^{-1}(1)u = A(\theta_1)(a_1 - A^{-1}(1)u) + A(\theta_1, t)(a_2 - A^{-1}(1)u).$$

Пусть $\|a_1 - A^{-1}(1)u\| > h/r$, где $r > 0$ — некоторая константа, тогда $\|Y_N(\theta_1)\| = \|A(\theta_1)\| \times \|a_1 - A^{-1}(1)u\| \geq \delta h/r$. Если $\|a_1 - A^{-1}(1)u\| \leq hr$, то для $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$ имеем:

$$\begin{aligned} \|Y_N(t)\| &= \|A(\theta_1)(a_1 - A^{-1}(1)u) + A(\theta_1, t)(a_2 - A^{-1}(1)u)\| \geq \\ &\geq \|A(\theta_1, t)\| \times \|a_2 - A^{-1}(1)u\| - \|A(\theta_1)\| \times \|a_1 - A^{-1}(1)u\|, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|Y_N(\theta_2)\| &\geq \delta \|a_2 - a_1\| + \|a_1 - A^{-1}(1)u\| - (1 - \delta)h/r \geq \\ &\geq \delta \|a_2 - a_1\| - \delta \|a_1 - A^{-1}(1)u\| - (1 - \delta)h/r \geq h(\delta r - \delta - (1 - \delta))/r. \end{aligned}$$

Докажем, что $\|Y_N(\theta_2)\| \geq h\delta/r$. С этой целью положим $h(\delta r - \delta - (1 - \delta))/r = h\delta/r$. Тогда $r = 1 + \delta^{-1}$ и $\|Y_N(\theta_2)\| \geq h\delta/(1 + \delta^{-1})$. Таким образом, при данном выборе r получим $\|Y_N(\theta_1)\| \geq h\delta/r$ или $\|Y_N(\theta_2)\| \geq h\delta/r \quad \forall \omega \in \Omega$.

В ситуации стохастических регрессоров разложение решающей статистики на детерминированную и стохастическую часть проводится аналогично $Z_N(n) = Y_N(n) + g_N(n) + \eta_N(n)$, где детерминированная ($Y_N(\bullet)$) и стохастическая ($\eta_N(\bullet)$) части имеют те же свойства, что и в случае детерминированных предикторов, а дополнительный детерминированный член $g_N(\bullet)$ стремится к нулю, как $O(1/N)$. Поэтому данное утверждение сохраняет силу также в случае стохастических предикторов.

После этих предварительных замечаний рассмотрим вероятность события

$$(\hat{k}_N \neq k) \cup \{(\hat{k}_N = k) \cap (\max_{1 \leq i \leq k} |\hat{\theta}_{Ni} - \theta_i| > \varepsilon)\}.$$

Возможны следующие случаи.

Случай 1. $\{\hat{k}_N < k\}$, тогда предложенный метод не обнаруживает по меньшей мере одного структурного сдвига. В силу структуры метода мы непременно получим некоторую подвыборку объема $\tilde{N} \geq [2\delta N]$, которая содержит по меньшей мере один структурный сдвиг, но классифицируется как стационарная, поэтому

$$P_0\{\hat{k}_N < k\} \leq P_0\left\{\max_{[\beta\tilde{N}] \leq n \leq \tilde{N}} \|Z_{\tilde{N}}(n)\| \leq C(\tilde{N})\right\} = P_0\left\{\max_{[\beta\tilde{N}] \leq n \leq \tilde{N}} \|Y_{\tilde{N}}(n) + \eta_{\tilde{N}}(n)\| \leq C(\tilde{N})\right\}.$$

Но $\max_n \|Y_{\tilde{N}}(n)\| \geq h\delta / r > C(\tilde{N}) > 0$, тогда

$$P_\theta \left\{ \max_n \|Y_{\tilde{N}}(n) + \eta_{\tilde{N}}(n)\| \leq C(\tilde{N}) \right\} \leq P_\theta \left\{ \max_n \|\eta_{\tilde{N}}(n)\| \geq h\delta / r - C(\tilde{N}) \right\}.$$

Пусть $\tilde{\delta} = h\delta / r - C(\tilde{N}) > 0$, тогда из теоремы 2 следует, что

$$P_\theta \left\{ \max_n \|\eta_{\tilde{N}}(n)\| \geq h\delta / r - C(\tilde{N}) \right\} \leq m_0(\tilde{\delta}) \begin{cases} \exp(-TN\beta\tilde{\delta} / [4m_0(\tilde{\delta})]), & \tilde{\delta} > gT; \\ \exp(-N\beta\tilde{\delta}^2 / [4gm_0(\tilde{\delta})]), & \tilde{\delta} \leq gT. \end{cases}$$

Случай 2. $\{\hat{k}_N < k\}$ — здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда в силу структуры метода должна найтись стационарная подвыборка объема не менее $\tilde{N} = [\delta N]$, которая классифицируется как стационарная. Поэтому из теоремы 1 следует, что

$$P_\theta \left\{ \hat{k}_N > k \right\} \leq P_\theta \left\{ \max_{[\beta\tilde{N}] \leq n \leq \tilde{N}} \|Z_{\tilde{N}}(n)\| > C(\tilde{N}) \right\} \leq m_0(C(\tilde{N})) \begin{cases} \exp(-TN\beta C(\tilde{N}) / [4m_0(C(\tilde{N}))]), & C(\tilde{N}) > gT; \\ \exp(-N\beta C(\tilde{N})^2 / [4gm_0(C(\tilde{N}))]), & C(\tilde{N}) \leq gT. \end{cases}$$

Случай 3. $\{(\hat{k}_N = k) \cap (\max_{1 \leq i \leq k} |\hat{\theta}_{Ni} - \theta_i| > \varepsilon)\}$ — здесь метод правильно оценивает число структурных сдвигов, но дает существенную ошибку в оценках некоторых структурных сдвигов. В силу описанного выше алгоритма и из теорем 1–2 получим:

$$P_\theta \left\{ (\hat{k}_N = k) \cap (\max_{1 \leq i \leq k} |\hat{\theta}_{Ni} - \theta_i| > \varepsilon) \right\} \leq m_0(\varepsilon) \begin{cases} \exp\left(-\frac{TN^*\beta\varepsilon}{4m_0(\varepsilon)} \text{tr}((\mathbf{a} - \mathbf{b})'(\mathbf{a} - \mathbf{b})W(\theta))\right), & C(\varepsilon) > gT; \\ \exp\left(-\frac{N^*\beta\varepsilon^2}{4gm_0(\varepsilon)} \text{tr}^2((\mathbf{a} - \mathbf{b})'(\mathbf{a} - \mathbf{b})W(\theta))\right), & C(\varepsilon) \leq gT, \end{cases}$$

где константы $g, T, m_0(\varepsilon) \geq 1$ взяты из условий Крамера и ψ -перемешивания; $W(\theta)$ — положительно определенная матрица, зависящая от параметра θ и $C(\varepsilon) = \varepsilon \text{tr}((\mathbf{a} - \mathbf{b})'(\mathbf{a} - \mathbf{b})W(\theta))$.

5. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В этом разделе представлены результаты имитационного моделирования предложенного метода, предназначенного для обнаружения и оценивания структурных сдвигов в моделях СОУ с переменной структурой, в сравнении с другими широко известными методами решения подобных задач. На сегодняшний день наиболее известны следующие методы: тест Чоу; метод CUSUM (метод кумулятивных сумм), основанный на рекурсивных регрессионных остатках (Brown, Durbin, Evans, 1975); метод CUSUM, основанный на обычных регрессионных остатках (OLS CUSUM test, (Ploberger, Krämer, 1992)); флуктуационный тест (Ploberger, Kramer, Kontrus, 1989); тест Вальда (Andrews, 1993; Andrews, Ploberger, 1994); LM-тест (Lagrange Multiplier test) (Andrews, 1993). Однако хорошо известно (см., например, (Maddala, Kim, 1998)), что именно тест Вальда обладает наилучшими характеристиками в обнаружении структурных сдвигов в регрессионных моделях. Статистика этого теста определяется формулой:

$$\sup W = \max_{1 \leq m \leq N} N \left[\frac{S(N) - S_1(m) - S_2(N - m)}{S_1(m) + S_2(N - m)} \right],$$

где $S(N)$ — сумма регрессионных остатков, построенных для регрессионной модели по всей выборке объема N ; $S_1(m)$ — сумма регрессионных остатков, построенных по модели, использующей первые m наблюдений; $S_2(N - m)$ — то же для модели для последних $N - m$ наблюдений.

Оценка момента структурного сдвига определяется как $n_0 \in \arg \sup W$, а соответствующая оценка параметра структурного сдвига как $\hat{\theta}_N = n_0 / N$.

Сравнительный анализ характеристик различных методов проводится следующим образом. Вначале методы уравниваются по частоте ошибок 1-го рода. Для этого используются эксперименты с однородными выборками (без структурных сдвигов), в которых рассчитываются 95%-ные квантили вариационного ряда, построенного по значениям решающей статистики метода в 1000 независимых повторениях эксперимента. Затем с использованием этого 95%-ного квантиля в качестве решающего порога проводятся эксперименты с неоднородными выборками различного объема, в которых рассчитываются оценки вероятности ошибки 2-го рода и моментов структурных сдвигов. Метод А является более предпочтительным в сравнении с методом Б, если при том же значении оценки вероятности ошибки 1-го рода он дает меньшее значение оценки вероятности ошибки 2-го рода.

Вначале характеристики предложенного метода сравнивались с аналогичными характеристиками теста Вальда на регрессионной модели (детерминированные предикторы):

$$y_i = c_0 + c_1 x_i + \xi_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (21)$$

где $(x_1, \dots, x_N)'$ — вектор предикторов; $\{\xi_i\}$ — стандартная гауссовская последовательность (с нулевым средним и единичной дисперсией); c_0, c_1 — регрессионные коэффициенты, изменяющиеся в момент $n_0 = [\theta N]$, $0 < \theta < 1$.

Значения решающего порога, в качестве которого использовались 95%-ные квантили решающей статистики для статистически однородных выборок в 1000 независимых повторениях эксперимента, для теста Вальда приведены в табл. 1.

Таблица 1. 95%-ные квантили решающей статистики для теста Вальда при различных значениях объема выборки

N	100	200	300	400	500	700	1000	1200
$p = 0,95$	10,10	8,09	9,59	8,66	8,12	7,62	7,51	7,43
$p = 0,99$	12,60	10,88	14,14	12,10	12,20	9,97	11,68	10,02

Далее рассматривались случаи, когда до момента структурного сдвига значения регрессионных коэффициентов равнялись $c_0 = 0, c_1 = 1$ и когда после момента структурного сдвига они стали $c_0 = \delta, c_1 = 1$.

В экспериментах варьировались значения параметра δ и объема выборки N . Оценивались следующие эмпирические оценки:

- максимума статистики $\|Z_N(\bullet)\| : C$;
- вероятности ошибки 2-го рода $\hat{w}_N$;
- момента структурного сдвига $\hat{\theta}_N$.

Полученные результаты для теста Вальда приведены в табл. 2.

Таблица 2. Оценивание момента структурного сдвига $\theta = 0,30$ с использованием теста Вальда

N		300	400	500	700	1000
$\delta = 0,3$	C	5,63	6,76	8,24	9,77	12,09
	$\hat{w}_N$	0,83	0,71	0,59	0,46	0,32
	$\hat{\theta}_N$	0,29	0,25	0,22	0,19	0,20
$\delta = 0,4$	C	9,65	10,20	11,88	15,27	19,32
	$\hat{w}_N$	0,56	0,47	0,34	0,23	0,18
	$\hat{\theta}_N$	0,28	0,25	0,22	0,20	0,23

Та же модель исследовалась методом, предложенным в данной статье.

1. *Решающие пороги.* В первой серии тестов использовалась модель (15) с постоянными коэффициентами $c_0 = 0, c_1 = 1$ (табл. 3).

Таблица 3. 95%- и 99%-ные квантили решающей статистики для непараметрического метода

N	100	200	300	400	500	700	1000	1200
$p = 0,95$	0,401	0,257	0,202	0,182	0,150	0,125	0,103	0,081
$p = 0,99$	0,450	0,300	0,247	0,211	0,187	0,162	0,138	0,102

2. Оценки момента структурного сдвига (табл. 4).

Таблица 4. Результаты оценивания параметра структурного сдвига $\theta = 0,30$ непараметрическим методом

N		300	400	500	700	1000
$\delta = 0,4$	C	0,179	0,177	0,168	0,157	0,151
	$\hat{w}_N$	0,64	0,55	0,33	0,13	0,03
	$\hat{\theta}_N$	0,340	0,322	0,332	0,324	0,307
$\delta = 0,4$	C	0,220	0,211	0,208	0,195	0,192
	$\hat{w}_N$	0,28	0,24	0,11	0,02	0,005
	$\hat{\theta}_N$	0,315	0,312	0,308	0,305	0,304

Таблица 5. Результаты оценивания параметра структурного сдвига $\theta = 0,50$ непараметрическим методом

N		300	400	500	700	1000
$\delta = 0,4$	C	0,194	0,184	0,175	0,168	0,164
	$\hat{w}_N$	0,62	0,50	0,25	0,05	0,01
	$\hat{\theta}_N$	0,456	0,485	0,501	0,502	0,499
$\delta = 0,4$	C	0,231	0,221	0,215	0,214	0,211
	$\hat{w}_N$	0,26	0,22	0,003	0,02	0
	$\hat{\theta}_N$	0,495	0,495	0,489	0,501	0,499

Сравнивая результаты из табл. 2, 4 и 5, можно заключить, что частота ошибки 2-го рода для предложенного метода ниже, чем для теста Вальда, а точность оценивания момента структурного сдвига существенно выше. Более того, обнаружить структурный сдвиг, расположенный ближе к краям отрезка $[0, 1]$ (имеется в виду параметр θ), предложенный методом Вальда.

В следующей серии тестов рассматривалась регрессионная модель со стационарными стохастическими регрессорами: $y_i = c_0 + c_1 x_i + \xi_i$, $i = 1, \dots, N$, где $(x_1, \dots, x_N)^*$ — стационарная случайная последовательность вида $x_i = \rho x_{i-1} + \eta_i$, $i = 1, \dots, N$, $x_0 = 0$; $\{\xi_i, \eta_i\}$ — стандартная гауссовская последовательность; c_0, c_1 — регрессионные коэффициенты, изменяющиеся в момент $n_0 = [\theta N]$, $0 < \theta < 1$; $0 \leq |\rho| < 1$.

1. *Оценивание решающих порогов.* Для этого использовалась стационарная последовательность с регрессионными коэффициентами: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Результаты, приведенные в табл. 6, показывают, что полученные оценки моментов структурных сдвигов достаточно быстро сходятся к их истинным значениям.

Таблица 6. Оценивание решающих порогов

N	100	200	300	400	500	700	1000	1200
$p = 0,95$	0,355	0,291	0,230	0,188	0,150	0,132	0,103	0,082
$p = 0,99$	0,401	0,332	0,273	0,218	0,192	0,171	0,141	0,100

2. *Оценивание параметра структурного сдвига.* Далее рассматривалась модель со структурным сдвигом по регрессионному коэффициенту (табл. 7): до момента структурного сдвига — $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ и после момента структурного сдвига — $c_0 = 0$, $c_1 = 1,3$.

Таблица 7. Оценивание параметра структурного сдвига

N		500	700	1000	1200
$\delta = 0,5$	C	0,167	0,157	0,152	0,152
	$\hat{w}_N$	0,32	0,21	0,02	0
	$\hat{\theta}_N$	0,481	0,495	0,498	0,499
$\delta = 0,3$	C	0,156	0,148	0,142	0,140
	$\hat{w}_N$	0,45	0,30	0,03	0
	$\hat{\theta}_N$	0,312	0,310	0,308	0,301

3. Множественные структурные сдвиги в многомерных СОУ. Рассматривалась многомерная система

$$\begin{aligned} y_i &= c_0 + c_1 y_{i-1} + c_2 z_{i-1} + c_3 x_i + \varepsilon_i, \\ z_i &= d_0 + d_1 y_i + d_2 x_i + \xi_i, \\ x_i &= 0,5 x_{i-1} + v_i, \\ \varepsilon_i &= 0,3 \varepsilon_{i-1} + \eta_i, \end{aligned}$$

где $\xi_i, v_i, \eta_i, i = 1, 2, \dots$ — стандартные гауссовские $N(0, 1)$ белые шумы; $(y_i, z_i, x_i, \varepsilon_i)'$ — вектор эндогенных переменных, $(Const, y_{i-1}, z_{i-1}, x_{i-1}, \varepsilon_{i-1})'$ — вектор преддетерминированных переменных системы.

Динамика этой системы характеризуется вектором коэффициентов $\mathbf{u} = [c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ d_0 \ d_1 \ d_2]$. Начальные значения этих коэффициентов: $[0, 0,5 \ 0,3 \ 0,7 \ 0,2 \ 0,4 \ 0,6]$. Первый структурный сдвиг происходит при $\theta_1 = 0,3$, и тогда вектор $\mathbf{u}$ изменяется на $[0,1 \ 0,5 \ 0 \ 0,7 \ 0,2 \ 0,4 \ 0,6]$. Второй структурный сдвиг происходит при $\theta_2 = 0,7$, и тогда $\mathbf{u}$ становится равным $[0,1 \ 0,5 \ 0 \ 0,7 \ 0,2 \ 0,4 \ 0,9]$.

В первой серии тестов оценивался решающий порог C . С этой целью, как и выше, проводились эксперименты с однородными выборками. Была использована модель с начальным вектором $\mathbf{u}$. В 1000 независимых повторениях эксперимента рассчитывались максимумы модуля решающей статистики, а затем 95%- и 99%-ный квантили построенного вариационного ряда (максимумов модуля решающей статистики) (табл. 8).

Таблица 8. Эксперимент с однородными выборками

N	200	400	500	700	900	1000	1200	1500
$p = 0,95$	0,28	0,20	0,19	0,18	0,16	0,15	0,145	0,14
$p = 0,99$	0,36	0,33	0,28	0,24	0,23	0,21	0,19	0,17

Рассчитанные 95%-ные квантили далее были задействованы в качестве решающих порогов в экспериментах с неоднородными выборками различного объема.

В следующей серии тестов использовались нестационарные выборки с множественными структурными сдвигами. Истинное число структурных сдвигов равнялось $p = 2$, а параметры этих структурных сдвигов — $\theta_1 = 0,3$ и $\theta_2 = 0,7$ (табл. 9). Результаты эксперимента показывают, что ошибка оценивания быстро сходится к нулю с ростом объема выборки данных.

Таблица 9. Оценивание множественных структурных сдвигов

N	200	400	500	700	900	1000	1200	1500
w	0,96	0,54	0,39	0,21	0,04	0,03	0,02	0,01
Δ	0,02	0,05	0,04	0,02	0,03	0,02	0,01	0,005

Примечание. w — оценка вероятности $P\{\hat{p}_N \neq p\}$ в 1000 независимых повторениях эксперимента, p_N — оценка числа структурных сдвигов в выборке; Δ — оценка ошибки оценивания при условии $\hat{p}_N = p$, т.е. $\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^p (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2}$.

7. ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА

7.1. Нестационарная модель Клейна. В своей книге Л. Клейн (Klein, 1950) представил кейнсианскую модель экономики США в период 1921–1941 гг. Этот период включает в себя Великую депрессию 1929–1933 гг. Приведем уравнения модели Клейна (в оригинале — построенные по годовым данным):

$$Cons_t = 16,60 + 0,017P_t + 0,216P_{t-1} + 0,81(PWB_t + GWB_t);$$

$$I_t = 20,3 + 0,15P_t + 0,616P_{t-1} - 0,158K_{t-1};$$

$$PWB_t = 1,50 + 0,439PSO_t + 0,147PSO_{t-1} + 0,13TIME;$$

$$PSO_t = Cons_t + I_t + (G_t - GWB_t);$$

$$P_t = PSO_t - PWB_t - T_t;$$

$$K_t = K_{t-1} + I_t,$$

$$GNP_t = Cons_t + I_t + G_t,$$

где $Cons$ — частное потребление; P — прибыль экономики за вычетом налогов на бизнес; PWB — затраты на заработную плату частного сектора; GWB — затраты на заработную плату государственного сектора; I — частные инвестиции; K — капитал частного сектора (на конец года); PSO — агрегированный выпуск частного сектора; $TIME$ — индекс времени, 1931 г. — нулевой; G — государственные расходы плюс чистый экспорт; T — налоги на бизнес; GNP — ВВП.

В этой модели последние 4 уравнения — это определения соответствующих переменных; первые 3 уравнения — регрессионные зависимости. Число рассматриваемых временных периодов (20) для модели Клейна слишком мало для обнаружения структурных сдвигов. Однако мы знаем плохие прогностические возможности этой модели, которая включает в себя период кризиса Великой депрессии. Это заставляет предположить, что здесь присутствует структурный сдвиг. Для его обнаружения использовались квартальные данные за период 1921–1941 гг.

Функциональная форма этой модели совпадает с оригинальной моделью Клейна. Решающим преимуществом изложенного здесь метода является то, что конкретные значения регрессионных коэффициентов не столь важны для диагностики структурных сдвигов, как сами данные за рассматриваемый период. Определение вектора эндогенных переменных, а также вектора предопределенных переменных имеют решающее значение для вывода о наличии структурных сдвигов.

Для рассматриваемой модели Клейна эти вектора имеют вид:

$$Y_t = (Cons_t, I_t, PWB_t, PSO_t, P_t, K_t, GNP_t)';$$

$$X_t = (Cons_t, G_t, T_t, TIME, GWB_t, P_{t-1}, K_{t-1})'.$$

Таким образом, $M = 7$ и $K = 6$ для метода, описанного выше, который в результате обнаруживает единственную точку структурного сдвига 1929(3).

Представляет интерес вопрос выбора решающего порога данного метода. При его выборе мы исходили из того, что данный метод устойчив к неточностям оценивания регрессионных коэффициентов и поэтому варьирование порога в достаточно широком диапазоне не должно резко изменять оцениваемое количество структурных сдвигов. Полученный график числа оцениваемых структурных сдвигов в зависимости от решающего порога приведен на рис. 1. При выборе решающего порога $C = 20$ мы получим единственную точку структурного сдвига 1929(3).

7.2. Дезагрегированная макроэконометрическая модель российской экономики. В качестве наиболее значимого приложения описанного метода рассмотрим обнаружение структурных сдвигов в дезагрегированной макроэконометрической модели российской экономики. В данном примере мы возьмем коинтеграционную модель, в которой из коинтеграционных уравнений намеренно убраны все дамми-переменные, отражающие эффекты структурных сдвигов.

Основной блок модели, отражающий взаимосвязи реального и финансового сектора, представлен следующими уравнениями (приводятся только полученные коинтеграционные зависимости).

Динамика индекса реального ВВП:

$$\log(GDP) = a_0 + a_1 \log(Woil) + a_2 \log(rmon) + a_3 \log(Inv(-4)),$$

где $Woil$ — экспортная цена на российскую нефть (долл./т); $rmon$ — индекс опережающего роста цен на продукцию естественных монополий; Inv — индекс инвестиций в основной капитал.

Таким образом, полученное уравнение показывает, что к факторам, определяющим долгосрочные тренды в динамике индекса реального ВВП в России, следует отнести мировые (экспортные) цены на российскую нефть ($Urals$); состояние сектора «Электричество — газ — вода» ($rmon$) и общий показатель инвестиционной динамики (Inv). Заметим, что по определению

$$\log(rmon) = \log(pcel/pcum) = \log(pcel) - \log(pcum) = \log(pcel(-1)) - \log(pcum(-1)) + piel - pi$$

для достаточно малых ($<10\%$) значений $piel$, pi . Здесь $pcel$ — кумулятивный индекс цен на электроэнергию — газ — воду; $pcum$ — кумулятивный индекс цен на потребительском рынке в России; $piel = pel/100 - 1$ — темп изменения цен на электроэнергию — газ — воду; $pi = CPI/100 - 1$ — темп изменения цен на потребительском рынке.

Что касается динамики индекса инвестиций в основной капитал, то на макроэкономическом уровне чем выше индекс реального ВВП, тем больше возможностей для отчислений на обновление основного капитала и, как результат, тем выше индекс инвестиций в основной капитал. Экспериментально мы наблюдаем следующую зависимость (здесь также приведена только полученная коинтеграционная зависимость): $\log(Inv) = b_0 + b_1 \log(GDP)$. Получены следующие коинтеграционные уравнения для динамики выпуска в основных отраслях реального сектора:

- индекс сельскохозяйственного производства —

$$\log(Agro) = d_0 + d_1 \log(woil) + d_2 Seas + d_3 Seas(-1) + d_4 Seas(-2);$$

- объем грузоперевозок, млрд т/км —

$$\log(Transp) = d_5 + d_6 \log(woil);$$

- индекс объема производства в строительстве —

$$\log(Constr) = d_7 + d_8 \log(woil);$$

- индекс оборота розничной торговли —

$$\log(Retail) = d_9 + d_{10} \log(woil) + d_{11} \log(rmon);$$

- индекс промышленного производства —

$$\log(Ind) = d_{12} + d_{13} \log(woil) + d_{14} \log(Inv(-4)) + d_{15} \log(rmon).$$

Таким образом, уравнения модели СОУ в точности совпадают со структурной формой модели СОУ, приведенной выше. Особенностью описанного в статье метода обнаружения структурных сдвигов в нестационарных моделях СОУ является то, что используемая в данном тесте статистика не зависит от конкретных значений регрессионных коэффициентов (a_i , b_i , c_i). Можно сказать, что эта непараметрическая статистика не основана на методологии регрессионного анализа. Это свойство позволяет существенно упростить процедуру формирования решающей статистики и оценивания структурных сдвигов. В частности, для рассматриваемой модели российской экономики вектор эндогенных переменных модели имеет вид:

$$Y = (\log(GDP), \log(Inv), pi, piel, pioilp, \log(pcel), \log(pcum), \log(rmon), \log(Ind), \log(Agro), \log(Retail), \log(Tran), \log(Constr))',$$

где *Agro* — индекс сельскохозяйственного производства; *Retail* — индекс оборота розничной торговли; *Constr* — индекс объема работ в строительной отрасли; *Tran* — коммерческий грузооборот транспорта (млрд т/км).

Вектор предопределенных переменных модели:

$$X = (Const, \log(Woil), \log(Inv(-4)), eps, ugas, piwoil, \log(pcel(-1)), \\ \log(pcum(-1)), Seas, Seas(-1), Seas(-2))',$$

где *Seas* — сезонная дамми-переменная.

Заметим, что значения всех этих переменных определяются из базы данных (квартальных) для рассматриваемой задачи. Объем выборки — 87 точек (1995(1)—2016(3)); число определений равно 3; число регрессионных уравнений — 10. При выборе решающего порога мы исходили из того, что данный метод устойчив к неточностям оценивания регрессионных коэффициентов и поэтому варьирование порога в достаточно широком диапазоне не должно резко изменять оцениваемое количество структурных сдвигов.

Далее были проведены эксперименты с различными порогами. График количества оцениваемых структурных сдвигов в зависимости от решающего порога приведен на рис. 2.

Полученные результаты:

- порог 0,08. Два момента структурных сдвигов: 29(2002(1)), 62 (2010(4)). Заметим, что первый момент соответствует принятию нового налогового кодекса в 2001—2002 гг., второй момент отражает влияние мирового финансового кризиса 2008—2009 гг. на российскую экономику;
- порог 0,16. Единственный момент структурного сдвига: 56(2008(4)).

8. ВЫВОДЫ

Рассмотрена общая постановка задачи ретроспективного обнаружения и оценивания структурных сдвигов в моделях СОУ с переменной структурой. Предложен новый метод обнаружения и оценивания структурных сдвигов в моделях СОУ с переменной структурой. В задаче с единственным моментом структурного сдвига исследованы статистические характеристики предложенного метода: получены экспоненциальные оценки сверху для вероятности ошибки 1-го и 2-го рода в случае зависимых наблюдений, удовлетворяющих условию слабой зависимости и условию Крамера. Задача обнаружения и оценивания структурных сдвигов обобщена на случай обнаружения и оценивания нескольких моментов структурных сдвигов. Доказана теорема о сходимости п.н. оценки числа структурных сдвигов к истинному значению этого параметра при объеме выборки, стремящемся к бесконечности.

Свойства предложенного метода исследованы методом имитационного моделирования в ситуации единственного и множественных моментов структурных сдвигов для гауссовских и негауссовских зависимых с.п. В разд. 7 рассмотрены прикладные задачи обнаружения и оценивания моментов структурных сдвигов в макроэконометрических моделях СОУ с переменной структурой: модели Клейна национальной экономики США в 1920—1940-е годы; модели инфляции в России 1995(1)—2016(3) (помесячные данные); дезагрегированной модели российской экономики в период 1995(1)—2016(2) (квартальная модель).

Общий вывод исследования: предложенный метод позволяет эффективно обнаруживать и оценивать моменты структурных сдвигов в моделях СОУ с переменной структурой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Andrews D.W.K.** (1993). Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point // *Econometrica*. Vol. 61. P. 821—856.
- Andrews D.W.K., Ploberger W.** (1994) Optimal Tests When a Nuisance Parameter Is Present Only under the Alternative // *Econometrica*. Vol. 62. P. 1383—1414.

- Bai J., Lumsdaine R., Stock J. (1998). Testing for and Dating Common Breaks in Multivariate Time Series // *Review of Economic Studies*. Vol. 65. P. 395–432.
- Brown R.L., Durbin J., Evans J.M. (1975). Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time // *Journal of Royal Statistical Society, Series B*. Vol. 37. P. 149–192.
- Klein L. (1950). *Economic Fluctuations in the United States 1921–1941*. Cowles Foundation. New York: John Wiley.
- Maddala G., Kim I. (1998). *Unit Roots, Cointegration, and Structural Change*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Ploberger W., Krämer W. (1992). The CUSUM Test with OLS Residuals // *Econometrica*. Vol. 60. P. 271–285.
- Ploberger W., Krämer W., Kontrus K. (1989). A New Test for Structural Stability in the Linear Regression Model // *Journal of Econometrics*. Vol. 40. P. 307–318.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Andrews D.W.K. (1993). Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point. *Econometrica*, 61, 821–856.
- Andrews D.W.K., Ploberger W. (1994) Optimal Tests When a Nuisance Parameter Is Present Only under the Alternative. *Econometrica*, 62, 1383–1414.
- Bai J., Lumsdaine R., Stock J. (1998). Testing for and Dating Common Breaks in Multivariate Time Series. *Review of Economic Studies*, 65, 395–432.
- Brown R.L., Durbin J., Evans J.M. (1975). Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time. *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, 37, 149–192.
- Klein L. (1950). *Economic Fluctuations in the United States 1921–1941*. Cowles Foundation. New York: John Wiley.
- Maddala G., Kim I. (1998). *Unit Roots, Cointegration, and Structural Change*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Ploberger W., Krämer W. (1992). The CUSUM Test with OLS Residuals. *Econometrica*, 60, 271–285.
- Ploberger W., Krämer W., Kontrus K. (1989). A New Test for Structural Stability in the Linear Regression Model. *Journal of Econometrics*, 40, 307–318.

Retrospective Analysis of Structural Changes in SEM (Simultaneous Equation) Models with Varying Structure. Part 2

S.A. Aivazian*, B.E. Brodsky**

Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Russia

* E-mail: aivazian@cemi.rssi.ru ** E-mail: bbrodsky@yandex.ru

Received 29.06.2017

This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 15-01-03359).

This article is devoted to the study of the problem of retrospective analysis of structural changes in SEM (simultaneous equation) models with varying structure. We consider main assumptions about statistical dependence of observations: strong mixing and ψ -weak dependence conditions, as well as the main criteria for effectiveness of a method of retrospective analysis. A new nonparametric method of retrospective detection of structural changes is proposed which does not require knowledge about distributional laws of data and its statistical properties are studied. We formulate theorems about convergence to zero of type 1 and type 3 error probabilities for the proposed method with an increasing sample size. Results of the simulation study of the proposed method are given in the second part of the paper. Unlike earlier published papers, this article considers the problem of macroeconomic modeling with account of structural changes in data. Here we consider the method for the retrospective detection of multiple structural changes in data, simulation study of this method, as well as applications to the problems of macroeconomic modeling with account of structural changes in data. In particular, we consider the macromodel of the USA economy proposed by L. Klein (the structural change in the year 1929 is detected) and the disaggregated model of the Russian economy (quarterly data in 1995–2016s). Here we detect two instants of structural changes in 2002 and 2010. Results of the simulation study witness about the fact that the proposed method can effectively detect structural changes in SEM models.

Keywords: SEM model, econometric analysis, retrospective method, structural change, type 1 error, type