

Теория катастроф и ценовая динамика

© 2018 г. А.В. Зиненко

*Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М.Ф. Решетнёва; Красноярск*

E-mail: anna-z@mail.ru

Поступила в редакцию 30.01.2017 г.

Статья посвящена исследованиям моделирования динамики рыночных цен неклассическими методами нелинейной динамики. Классические методы анализа и прогнозирования временных рядов, в том числе и рыночной динамики, основаны на математической статистике. К таким методам относятся линейная и нелинейная регрессия, скользящие средние, аналитическое выравнивание и другие. Все перечисленные методы предполагают, что исходная выборка данных подчиняется нормальному распределению. При этом практика применения статистических методов на моделировании рыночного курса показала, что исходные данные подчиняются нормальному распределению только при спокойном состоянии рынка. Аналитику, однако, важнее предсказать резкие изменения в поведении рыночной цены. С развитием как математики, так и социальных наук в экономике стали применять давно известное в физике дифференциальное исчисление и его наиболее сложную часть — нелинейную динамику. Начиная с работ Бенуа Мандельброта в 1960-е годы нелинейные методы моделирования рыночной динамики стали все чаще применяться современными учеными. Мандельброт начинал с фрактального моделирования и степенных законов. В настоящее время используются методы, основанные на теории хаоса, а также теории катастроф. Теория катастроф является обширной математической нелинейной дисциплиной. Суть катастрофы, в математическом смысле, состоит в скачкообразном изменении состояния системы в ответ на малое изменение параметра. В работе теория катастроф применяется в отношении динамики рыночной цены. Управляющими параметрами выступают спрос и предложение, а катастрофой — разворот рыночного тренда. Создана теоретическая модель, которая затем протестирована на практике по данным о рынке недвижимости.

Ключевые слова: нелинейная динамика, теория катастроф, катастрофа сборки, переменная состояния, управляющие параметры.

Классификация JEL: G14.

DOI: 10.31857/S042473880003325-6

1. МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В ФИНАНСАХ

Классические модели инвестиционной финансовой теории основаны на вероятностных методах. Это означает, что предмет таких теорий — динамика котировок биржевых цен — подчиняется нормальному закону распределения вероятностей (Млодинов, 2011, с. 25). Основу вероятностным теориям заложил французский математик Луи Башелье в 1900 г. В своей диссертации он исследовал французские облигации и сделки с ними, во многом похожие на современные опционы колл. По сути, его модель стала прообразом современной модели ценообразования опционов Блека—Шоулза (Боди, Маркус, Кейн, 2005).

Вероятностные теории ценообразования опционов, формирования инвестиционного портфеля и прогнозирования биржевых цен успешно работали вплоть до начала 1990-х годов. Но когда мировой финансовый рынок стали сотрясать кризисы, вероятностные модели оказались не в силах их предсказать. Исследователи и аналитики сделали вывод о том, что классические модели работают только в стабильных условиях и требуют обширной статистики (Уэзеролл, 2013, с. 121, Мабуссин, 2016, с. 244).

Альтернатива, над которой успешно работают современные аналитики, была предложена одним из величайших математиков современности — Бенуа Мандельбротом. Согласно Мандельброту (Мандельброт, Хадсон, 2004, с. 183; Мандельброт, 2006, с. 187–217) действия толпы, которой, по сути, являются участники рынка, нельзя описать вероятностными методами, созданными в по-

мощь физике и другим точным наукам. В качестве альтернативы Мандельброт предложил использовать степенные законы и фрактальные модели. Его модели были дополнены и доработаны аналитиком и ученым Э. Петерсом (Петерс, 2004, с. 109–128, с. 60, 65).

В настоящее время ведутся обширные исследования фрактальности, хаоса и нелинейной динамики в социальных науках, в том числе и в области финансов. Следует отметить, что многочисленные трейдинговые стратегии и индикаторы технического анализа, в названиях которых есть слова «фрактал» и «хаос», не имеют к данным исследованиям никакого отношения, так как из науки о хаосе и фракталах используют только эти слова.

Автор опубликовала немало работ, касающихся фракталов и степенных законов в финансах. Данная работа касается другого направления нелинейной динамики — *теории катастроф*.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Математическая теория катастроф — относительно молодая научная дисциплина, появившаяся из таких разделов математики, как теория особенностей Уитни и теория бифуркаций. Первые упоминания о теории катастроф появились в 1970 г. Теория особенностей состоит в расширении исследования функции на экстремум, а теория бифуркаций изучает изменения динамических систем при малом изменении параметров. Бифуркации также являются важнейшей частью теории хаоса, так как при определенном значении параметра система подвергается бифуркациям (раздвоению притягивающих точек) и затем приходит к хаотическому поведению (Стюарт, 1987, с. 32).

С математической точки зрения *катастрофа* представляет собой скачкообразное изменение состояния системы, возникающее как отклик на изменение параметров. Примерами катастроф могут послужить поломка бытового инструмента, закипание воды в чайнике (данное явление проще объясняется молекулярно-кинетической теорией Ван дер Ваальса), каустика в оптике.

Ключевое предположение данной работы состоит в том, что изменение направления биржевого тренда тоже можно рассматривать как катастрофу. Мы не первые выдвинули данное предположение. Здесь уместно процитировать первого советского автора книг по теории катастроф В.И. Арнольда: «В теории хлопков упругих конструкций и в теории опрокидывания кораблей предсказания теории (катастроф) полностью подтверждаются экспериментом. С другой стороны, в биологии, психологии, социальных науках (скажем, в приложениях к теории поведения биржевых игроков или к изучению нервных болезней) как исходные предпосылки, так и выводы имеют скорее эвристическое значение» (Арнольд, 1990, с. 12). Необходимо учитывать данный постулат при попытках моделировать динамику биржевого курса с использованием теории катастроф.

Итак, для моделирования катастрофы нам понадобится два пространства: управляющих параметров и переменных состояния. Эти пространства формируют поверхность отклика.

Измерения пространства управляющих параметров составляют параметры, которые мы плавно изменяем. Чтобы катастрофа сводилась к элементарному типу, таких измерений должно быть не более четырех. Вообще, при числе управляющих параметров более двух катастрофы становятся сложно описывать математически и представлять визуально.

Переменные состояния — то, на что влияют управляющие параметры. К примеру, если рассматривать процесс закипания жидкости как катастрофу, то плотность жидкости выступит переменной состояния (в данной катастрофе пространство переменных состояния одномерное). А поверхность отклика (в данном случае она двумерна — состояние жидкости и состояние газа) выступают состояния, какие может принимать жидкость в зависимости от плотности. Множество, которое пересекают переменные состояния, для того чтобы произошла катастрофа (т.е. отклик на пространстве откликов изменился), называется бифуркационным.

Описанная выше катастрофа представляет собой одну из собственно элементарных катастроф — катастрофу сборки (Гилмор, 1984, с. 102). Модель такой катастрофы показана на рис. 1. Катастрофе сборки соответствует двумерное пространство управляющих параметров и одномерное простран-

ство переменных состояний. Бифуркационное множество является кривой на плоскости управляющих параметров. Катастрофа сборки задается следующим семейством потенциальных функций

$$F(x, a, b) = 0,25x^4 + 0,5ax^2 + bx, \quad (1)$$

где x — переменная состояния, a, b — управляющие параметры.

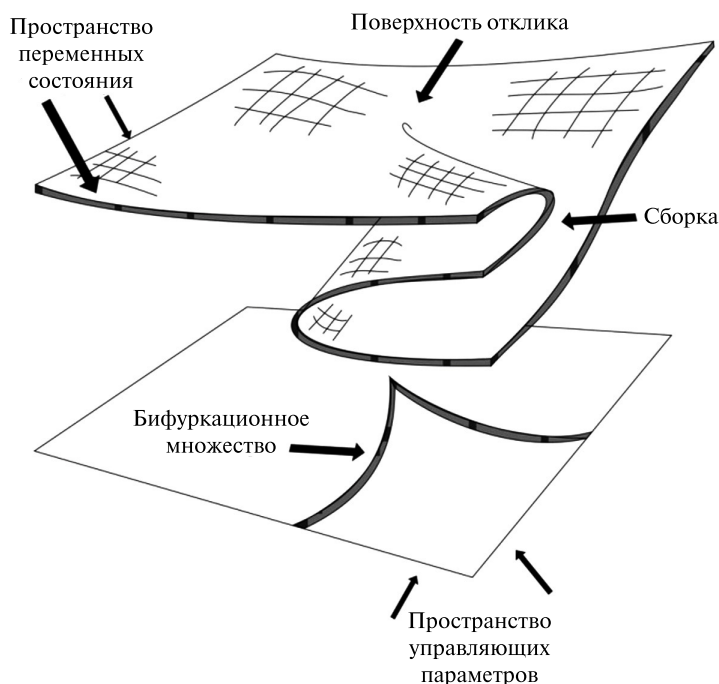


Рис. 1. Катастрофа сборки

Согласно одной из базовых теорем разработчика теории катастроф Рене Тома для четырех и менее управляющих параметров и любого числа переменных состояний существует только семь типов элементарных катастроф. С катастрофой сборки мы уже ознакомились, далее ознакомимся с еще более простой катастрофой — катастрофой складки (Гилмор, 1984, с. 101). Ее модель показана на рис. 2. Катастрофе складки соответствуют одномерные пространства управляющих параметров и переменных состояния, а бифуркационное множество является точкой. Катастрофа складки задается следующим семейством потенциальных функций

$$F(x, a) = x^3/3 + ax, \quad (2)$$

где x — переменная состояния, a — управляющий параметр. Очевидно, что функция (1) имеет критические точки только при $a \leq 0$, причем при $a < 0$ критических точек две, а при $a = 0$ — одна. Бифуркационное множество состоит из точки $x = 0$.

Мы не будем описывать остальные типы элементарных катастроф, так как они имеют большее число управляющих параметров, что делает их сложными. К тому же они не понадобятся в нашей модели.

При практическом применении теории катастроф в неточных науках рассматривают так называемые флаги катастроф — косвенные признаки, которые могут повлечь за собой катастрофу. В частности, при исследовании экономических явлений таким флагом выступает рост дисперсии.

На практике функции катастроф, определяемые уравнениями (1) и (2), обычно представляют собой потенциальную энергию. Например, при моделировании предельной нагрузки на линейку (рис. 3), при которой она останется согнутой, функцией катастроф выступает потенциальная энергия линейки.

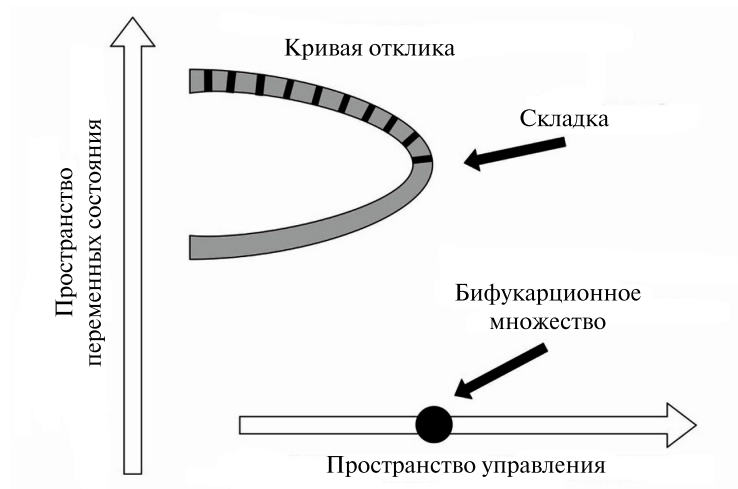
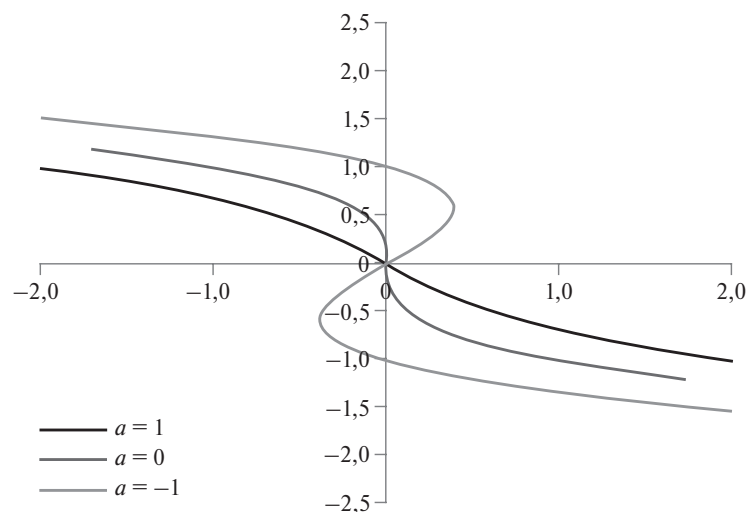


Рис. 2. Катастрофа складки

Рис. 3. Критические точки как функция параметра b

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ БИРЖЕВЫХ КОТИРОВОК КАК КАТАСТРОФЫ СКЛАДКИ

В предыдущих работах мы использовали фрактальные и степенные модели для объяснения динамики биржевых цен. Применение теории катастроф является вполне логичным продолжением, так как катастрофы также являются нелинейными динамическими моделями и принципиально отличаются от общепринятых стохастических моделей.

Определим управляющие параметры, переменную состояния и функцию катастрофы. Переменной состояния логично взять курсовую стоимость (например, акции либо квадратного метра недвижимости). Но в моделях теории катастроф изучаются критические и экстремальные точки, поэтому необходима хотя бы теоретическая возможность принятия переменной состояния и управляющих параметров нулевого и отрицательного значений. Поэтому в качестве переменной состояния мы возьмем приращение курса. В качестве управляющих параметров, влияющих на цену, мы возьмем приращение спроса и приращение предложения.

Катастрофой с двумя управляющими параметрами и одной переменной состояния могут быть катастрофа складки и катастрофа сборки. Основная область математического моделирования с использованием таких катастроф — физические и физико-химические процессы. Но модель катастро-

фы сборки также применяется при моделировании социального процесса — изучении агрессивности животного. Мы рассматриваем также социальный процесс и выбираем для его моделирования катастрофу сборки.

Для любой катастрофы определяется функция потенциала, т.е. функция, описывающая потенциальную энергию переменных состояния. Исследуется поведение функции потенциала при изменении управляющих параметров.

Функция потенциала для динамики цены имеет вид:

$$F(x, a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + b, \quad (3)$$

где x — приращение курса, a — приращение спроса, b — приращение предложения. Функция потенциала определена в каждый момент времени t . Критические точки функции определяются из производной

$$F'(x, a, b) = x^3 + ax + b. \quad (4)$$

Критические точки можно найти только при известных параметрах a и b . Для этого рассматривают три среза поверхности, заданной формулой (3), при $a = \{-1, 0, 1\}$. Критические точки определяются уравнениями

$$\begin{aligned} x^3 + x + b &= 0 \quad \text{при } a = 1, \\ x^3 + b &= 0 \quad \text{при } a = 0, \\ x^3 - x + b &= 0 \quad \text{при } a = -1. \end{aligned} \quad (5)$$

Затем находят значения параметра b и критические точки x в данных срезах из формул (5) из следующих соотношений пересчета, полученных с помощью преобразований подобия:

$$x \rightarrow \lambda x', \quad a \rightarrow \lambda^2 a', \quad b \rightarrow \lambda^3 b'. \quad (6)$$

Для облегчения задачи можно построить график зависимости x от b для трех срезов параметра a (см. рис. 3). Последний этап расчетов состоит в пересчете критических точек для заданных параметров a и b по соотношениям (6).

Подробнее с вышеописанным алгоритмом можно ознакомиться в книге (Гилмор, 1984, с. 103–109).

Критические точки для разных значений a и b нужны нам, чтобы определить, при каких именно значениях параметров может произойти катастрофа. В зоне катастрофы потенциальная функция имеет более одной критической точки. Именно данный метод можно использовать, применяя модель катастрофы сборки к динамике биржевого курса.

Можно задаться вопросом, зачем такие сложности. Ведь все очевидно: спрос превышает предложение — цена растет, предложение превышает спрос — цена падает. Сложности в данном случае не являются лишними, так как наша задача — составить адекватную математическую модель динамики курса и определить значения спроса и предложения, при которых происходит перелом тренда.

4. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛИ НА РЕТРОСПЕКТИВНЫХ ДАННЫХ

Для тестирования нашей модели мы возьмем данные по рынку недвижимости в Красноярске за 2014–2016 гг. Число заключенных договоров составляет спрос, а число предлагаемых на продажу квартир — предложение. Переменной состояния выступает цена за квадратный метр. Мы преобразуем исходные данные. Во-первых, все данные представим не в абсолютных величинах, а в процентах к начальному значению. Во-вторых, в качестве управляющих параметров и переменной состояния возьмем приращения соответствующих относительных величин.

В качестве параметра a мы взяли прирост предложения. Обратим внимание, что расчеты следует проводить для $a' = -1$, так как только в таком случае, согласно данным, показанным на рис. 3, по-

тенциальная функция (3) может иметь более одной критической точки, поскольку согласно формуле (6) $a \rightarrow \lambda^2 a'$ мы можем брать только отрицательные значения параметра a , т.е. только снижение предложения. Данные о спросе, предложении и цене представлены в табл. 1.

Точки на плоскости управляющих параметров, в которых параметр a принимает отрицательное значение, это $(-16,48; -116,58)$; $(-16,9; -7,27)$; $(-1,65; -7,27)$ и $(-13,04; -55,59)$.

Исследуем критические значения x для каждого случая. Расчеты приведем только для первой точки, так как в остальных точках они аналогичны.

Таблица 1. Данные по рынку недвижимости в Красноярске за 2014–2016 гг.

Период	Предложение, %	Прирост, a	Спрос, %	Прирост, b	Цена, %	Прирост, x
Ноябрь 2014 г.	100,00		100,00		100,00	
Декабрь 2014 г.	103,98	3,98	178,79	78,79	100,57	0,57
Январь 2015 г.	87,50	-16,48	62,21	-116,58	101,89	1,32
Февраль 2015 г.	96,55	9,05	75,13	12,92	102,64	0,75
Март 2015 г.	112,69	16,13	69,52	-5,61	100,19	-2,45
Апрель 2015 г.	112,70	0,01	61,89	-7,64	99,43	-0,75
Май 2015 г.	95,80	-16,90	54,61	-7,27	98,11	-1,32
Июнь 2015 г.	97,84	2,04	69,24	14,63	98,11	0,00
Июль 2015 г.	97,66	-0,17	72,61	3,37	98,11	0,00
Август 2015 г.	96,01	-1,65	65,34	-7,27	96,04	-2,08
Сентябрь 2015 г.	99,89	3,88	78,63	13,29	95,85	-0,19
Октябрь 2015 г.	102,16	2,27	82,12	3,49	95,47	-0,38
Ноябрь 2015 г.	107,76	5,60	83,75	1,63	93,77	-1,70
Декабрь 2015 г.	120,09	12,33	108,94	25,19	92,45	-1,32
Январь 2016 г.	107,04	-13,04	53,35	-55,59	92,45	0,00
Февраль 2016 г.	108,43	1,38	85,66	32,30	91,32	-1,13
Март 2016 г.	118,29	9,86	97,85	12,19	90,19	-1,13
Апрель 2016 г.	124,09	5,80	101,46	3,62	89,43	-0,75

Примечание. Полужирным шрифтом выделены периоды, в которых прирост предложения отрицательный, т.е. возможно существование более одной критической точки, соответственно возможна катастрофа. В таблице выделена строка (май 2015 г.), соответствующая периоду катастрофы.

Итак, по формулам (6) имеем

$$-16,46 = \lambda^2(-1), \quad \lambda = 4,06, \quad -116,58 = 4,06^3 b', \quad b' = -1,74. \quad (7)$$

По данным рис. 3 и путем подстановки можно определить, что при $b' = -1,74$, $x' = 1,3$. Пересчитав, получим одну критическую точку $x = 4,06 \times 1,3 = 5,27$. В исследуемой точке (январь 2015 г.) потенциальная функция имеет только один экстремум, следовательно, катастрофа перелома тренда не произойдет (по крайней мере согласно нашей модели). Результаты расчетов по всем точкам показаны в табл. 2.

Таблица 2. Результаты анализа предполагаемых критических точек

Показатель	Январь 2015 г.	Май 2015 г.	Август 2015 г.	Январь 2016 г.
λ	4,06	11	1,28	3,6
b'	-1,74	-0,1	-3,4	-1,19
x'	1,3	-0,1; -0,9; 1,1	1,73	1,2
x	5,27	-0,41; -3,7; 4,52	2,2	5,27

Итак, мы получили точку, в которой потенциальная функция принимает три критических значения, и это — май 2015 г. В этой точке значения параметров управления находятся в зоне, ограниченной бифуркационным множеством, в котором может произойти катастрофа. В случае движения рыночной

цены *катастрофой* выступает *разворот тренда*. Действительно, до мая 2016 г. тренд — боковой (незначительные флуктуации) в обе стороны, затем в июне и июле активность в движении цены отсутствует вообще, и с августа намечается убывающий тренд. Таким образом, наши теоретические выводы подтвердили реальные события.

В анализе рыночных тенденций и прогнозировании котировок до конца прошлого века доминировала вероятностная теория. Но практика показала, что она работает только при стабильном рынке. В нестабильных условиях целесообразно применять модели нелинейной динамики, частью которых выступают модели математической теории катастроф.

Наиболее распространены простейшие катастрофы — складка и сборка. К динамике рыночных цен целесообразно применить катастрофу сборки с двумя параметрами управления и одной переменной состояния. Мы взяли в качестве параметров управления прирост спроса и предложения, а в качестве переменной — состояние “прирост цены”. Катастрофой в данной модели выступает смена направления тренда. С помощью модели мы определяем зону плоскости параметров управления, ограниченную бифуркационным множеством, в котором происходит катастрофа. Согласно теории в такой зоне должно быть более одной критической точки потенциальной функции.

Мы протестировали модель на данных по рынку недвижимости, и результаты подтвердили теорию. Данную модель можно применять на любых ценовых котировках, например на рынке акций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Арнольд В.И. (1990). Теория катастроф. М.: Наука.
- Боди З., Маркус А.Дж., Кейн А. (2005). Принципы инвестиций. М.: Вильямс.
- Гилмор Р. (1984). Прикладная теория катастроф. М.: Мир.
- Зиненко А.В. (2012). R/S анализ на фондовом рынке // *Бизнес-информатика*. № 3 (21). С. 21–27.
- Зиненко А.В. (2015). Закон Парето на фондовом рынке // *Финансы и кредит*. № 38. С. 11–19.
- Зиненко А.В. (2015). Анализ динамики индекса ММВБ с использованием современных инвестиционных теорий: монография. Красноярск: СибГАУ.
- Мабуссин М. (2016). Больше, чем вы знаете. Необычный взгляд на мир финансов. М.: Альпина Паблишер.
- Мандельброт Б. (2006). (Не)послушные рынки. Фрактальная революция в финансах. М.: Вильямс.
- Мандельброт Б., Халдсон Р. (2004). Фракталы, случай и финансы. Москва, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”.
- Млодинов Л. (2011). Несовершенная случайность. М.: Livebook—Гаятри.
- Петерс Э. (2000). Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. М.: Мир.
- Петерс Э. (2004). Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-трейдинг.
- Стьюарт И. (1987). Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир.
- Уэзеролл Д. (2013). Физика фондового рынка. Краткая история предсказаний непредсказуемого. М.: Манн, Иванов и Фербер.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Arnold V.I. (1990). Catastrophe Theory. Moscow: Nauka (in Russian).
- Bodie Z., Marcus A.J., Kane A. (2005). Essentials of Investments. Moscow: Williams (in Russian).
- Gilmor R. (1984). Applicable Catastrophe Theory. Moscow: Mir (in Russian).
- Mandelbrot B. (2004). Fractals, Hazard and Finance. Moscow, Izhevsk: Reguljarnaja i Haoticheskaja Dinamika (in Russian).
- Mandelbrot B., Hudson R. (2006). The (Mis)Behavior of Markets. Moscow: Williams (in Russian).

- Mauboussin M.** (2014). *More Than You Know. Finding Financial Wisdom*. Moscow: Alpina Publisher (in Russian).
- Mlodinow L.** (2011). *The Drunkard's Walk. How Randomness Rules Our Lives*. Moscow: Livebook—Gayatri (in Russian).
- Peters E.** (2000). *Chaos and Order in the Capital Markets*. Moscow: Mir (in Russian).
- Peters E.** (2004). *Fractal Market Analyses*. Moscow: Internet-trading (in Russian).
- Stewart I.** (1987). *Catastrophe Theory and Its Applications*. Moscow: Mir (in Russian).
- Weatherall J.** (2013). *The Physics of Wall Street. A Brief History of Predicting the Unpredictable*. Moscow: Mann, Ivanov i Ferber (in Russian).
- Zinenko A.V.** (2012). R/S Analyses on Stock Market. *Business — Informatics*, 3 (21), 21–27 (in Russian).
- Zinenko A.V.** (2015a). Pareto Laws on Stock Exchange. *Finance and Credit*, 38, 11–19 (in Russian).
- Zinenko A.V.** (2015b). *MICEX Index Dynamics Analyses With Modern Investment Theory*. Krasnoyarsk: Sib SAU (in Russian).

Catastrophe Theory and Price Dynamics

A.V. Zinenko

Siberian State University of Science and Technology named after M.F. Reshetnev, Krasnoyarsk, Russia

E-mail: anna-z@mail.ru

Received 30.01.2017

The paper is about finance markets research using non-classical non-linear dynamic methods. Classical time series (including market trends) prediction and analyses methods are based on mathematical statistics. These methods are based on linear and non-linear regression, moving averages and others. Statistical approach assumes that input data honors the normal distribution law. Practice shows that market trends data form normal distribution only on quiet market form and prediction of abrupt shifts is more valuable and important for market analytics. With the evolution of mathematics and social sciences, economists began to apply the differential calculus and its most complicated part — non-linear dynamics — long-known in physics. Starting with Benoit Mandelbrot 1960s works, scientists and analytics widely apply non-linear methods in market terms researches. Mandelbrot started with fractals and power laws; the researches nowadays also apply chaos and catastrophe theory. Catastrophe theory is a big mathematics nonlinear discipline. Catastrophe in terms of mathematics is a discontinuous shift of a system in response to small parameter change. In this paper we apply catastrophe theory to market quotes dynamics. We take market demand and supply as control parameters and trend reverse — as catastrophe. We constructed theoretical model and tested it on real data of property market.

Keywords: nonlinear dynamics, catastrophe theory, assembly-type catastrophe, condition variable, control parameters.

JEL Classification: G14.

DOI: 10.31857/S042473880003325-6