

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

СОВЕРШЕННАЯ КОНКУРЕНЦИЯ БЕЗ УСЛОВИЯ СЛЕЙТЕРА: ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕСТАНДАРТНОГО И ДОГОВОРНОГО ПОДХОДОВ

© 2018 г. В.М. Маракулин¹

Аннотация. В неоклассической модели Эрроу – Дебре в условиях совершенной конкуренции каждое распределение из ядра допускает ценовую децентрализацию, т.е. является равновесным распределением. Более того, именно условия, при которых ядро и равновесие совпадают и называются совершенной конкуренцией. Однако во всех известных в литературе моделях совершенной конкуренции соответствующая теорема о совпадении ядра и равновесия доказывается исключительно в рамках условия выживаемости, которое обеспечивает выполнение условия Слейтера в задаче потребителя. Изучается проблема, насколько значимо это дополнительное требование и что будет, если его отбросить. Анализируется классический подход Дебре – Скарфа, который сравнивается с разработанной автором договорной моделью совершенной конкуренции. Показано, что договорной подход обеспечивает наиболее точную модель. Именно, концепция нечетко договорного распределения, где требуется стабильность относительно заключения нового договора при частично-асимметричном разрыве уже имеющихся. При слабых предположениях доказано, что эти распределения совпадают с равновесиями с нестандартными ценами. Распределения, которые при этом реализуются, вообще говоря отличаются от элементов классического ядра в условиях совершенной конкуренции (равновесия Эджуорта). Однако в случае, когда модельные предположения (неразложимость) обеспечивают условие выживаемости для нестандартных равновесий, договорной подход совпадает с классическим.

Ключевые слова: равновесие с нестандартными ценами, условие выживаемости (Слейтера), совершенная конкуренция, нечеткое ядро, нечетко договорные распределения, равновесие Эджуорта.

Классификация JEL: C62, D51.

ВВЕДЕНИЕ

В неоклассической постановке концепция конкурентного равновесия получает существенную поддержку в виде того, что никакая группа агентов (коалиция) не имеет стимулов к образованию автономной подэкономики (говорят, что равновесное распределение принадлежит ядру, т.е. не доминируется никакой коалицией). Более того, в условиях совершенной конкуренции *каждое* распределение из ядра допускает ценовую децентрализацию, т.е. является равновесным распределением (гипотеза Эджуорта). Таким образом, в идеальном мире экономики Эрроу – Дебре конкурентное равновесие, изначально определенное в дескриптивных категориях, получает нормативное обоснование как идеально стабильное (устойчивое в указанном смысле) распределение.

Современные представления о совершенной конкуренции восходят к классическим трудам Ф. Эджуорта¹, который на частном примере экономики с двумя продуктами и двумя агентами заметил и продемонстрировал важный факт сжатия кривой контрактов (ядра – в современной терминологии) при увеличении числа идентичных агентов и предположил, что это множество стягивается к равновесию. Бесплодные попытки развить этот подход и обосновать (а не постулировать) саму концепцию совершенной конкуренции продолжались вплоть до начала второй половины XX в., когда Ж. Дебре и Г. Скарф (Debreu, Scarf, 1963) впервые строго математически

¹ Валерий Михайлович Маракулин – д.ф.-м.н., доцент, Институт математики им. С.Л. Соболева, СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск; marakulv@gmail.com.

¹ В первую очередь это *Mathematical Psychics*, 1881.

обосновали взгляды Ф. Эджуорта. Они предложили подход, основанный на концепции реплицированной экономики: к заданной модели добавляются ее точные копии (агенты из копии получают новые имена-индексы), которые объединяются в общую экономику и этот процесс копирования устремляется к бесконечности. Реплицированные таким образом распределения ресурсов исходной модели являются распределениями в реплицированной. Ж. Дебре и Г. Скарф интересуются такими (исходными) распределениями, которые после реплицирования не теряют ключевого свойства стабильности: не существует группы агентов, для которой было бы выгодно отказаться от данного распределения и, организовав автономную экономику, найти для нее лучшее для себя перераспределение ресурсов. В рамках стандартных на тот момент предположений (позднее ослабленных) было доказано, что этим свойством стабильности обладают только распределения, отвечающие конкурентному равновесию.

В дальнейшем в теории общего равновесия появились и другие методы моделирования совершенной конкуренции. В первую очередь это работы Р. Ауманна (Aumann, 1964), затем продолженные рядом других авторов, в которых исследовалась экономика с измеримым пространством экономических агентов с заданной на нем неатомической мерой. Коалиции представлены как измеримые подмножества пространства агентов, их ресурсы определяются как интеграл по этому множеству (измеримого) отображения, задающего начальные запасы. Так как для неатомической меры мера любого конечного множества равна нулю, то и вклад отдельного индивидуума в коалиционные возможности будет нулевым. При прочих стандартных предположениях Р. Ауманн доказывает, что в этой модели ядро и равновесие совпадают. Это весьма нетривиальный результат, в доказательстве которого применяется (с этой целью разработанная Ауманном) сложная теория интегрирования точечно-множественных отображений (см. также (Гильдебрант, 1986)). Таким образом, в отличие от работы Ж. Дебре и Г. Скарфа, где был установлен асимптотический результат, Р. Ауманн сразу работает с предельной экономикой, которая и представляет модель совершенной конкуренции, где отдельно взятый индивид пренебрежимо мал и не способен повлиять на выбор итогового распределения.

Третий метод моделирования совершенной конкуренции появляется в работе (Brown, Robinson, 1975). Он основан на применении методов нестандартного анализа и состоит в рассмотрении модели экономики с гиперконечным множеством экономических агентов. Здесь постулируется, что общее число экономических агентов равно *бесконечному* натуральному $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, а исходные запасы e_i индивида $i \in \{1, \dots, n\} = I$ по норме ограничены *конечным* стандартным $m(i) \in \mathbb{N}$. Таким образом, доля индивида i в общих ресурсах экономики является бесконечно малой: $e_i / n \approx 0$, $i \in I$. Авторы доказывают совпадение равновесий с распределениями из ядра. Подробное описание нестандартного подхода можно найти в (Rashid, 1987; Anderson, 1992). Однако нужна ли в действительности столь сложная и продвинутая математика, чтобы обосновать совершенную конкуренцию?

Четвертый и ключевой для данной работы метод был предложен мною при разработке договорного подхода. Бартерный договор – это любой допустимый обмен, реализованный между экономическими агентами – членами некоторой коалиции S , формально представленный вектором $v = (v_i)_I$, $\sum_S v_i = 0$, $v_i = 0 \ \forall i \notin S$. Добавление договора v к текущему распределению $x = (x_i)_I$ образует новое распределение $z = (z_i)_I = v + x = (v_i + x_i)_I$. Договоры (контракты) можно объединять, разрывать и заключать новые (обычно взаимовыгодные). Конечное множество договоров образует сеть, если после разрыва любого набора заключенных ранее договоров образуется допустимое распределение. Понятие коалиционного доминирования переносится на доминирование между сетями договоров, что позволяет квалифицировать их по признаку стабильности. Допущение разрыва договоров играет здесь ключевую роль, причем разрыва частичного (замещения контракта $v = (v_i)_I$ контрактом $w = tv = (tv_i)_I$, $0 \leq t \leq 1$) и даже асимметричного (на стадии планирования новых сделок – теперь уже не контрактом $w = (t_i v_i)_I$, $0 \leq t_i \leq 1 \ \forall i$). В (Маракулин, 2011, 2014) показано, что посредством введения частичного разрыва договоров в модели задаются условия совершенной конкуренции – сети договоров, стабильные относительно (одновременного) заключения нового контракта и частичного разрыва имеющихся, реализуют равновесные распределения. При этом собственно метод моделирования совершенной конкуренции существенно проще известных ранее в литературе. Теперь равновесное распределение и распределения из ядра становятся объектами одного порядка: реализуются сетью

договоров, стабильной в специфическом смысле, причем стабильность у равновесия заведомо более сильная.

При каких условиях, помимо собственно *конструкции* модели с совершенной конкуренцией, имеет место факт совпадения ядра и равновесия, что и означает реализацию условий совершенной конкуренции? В сущности это почти те же условия, при которых в современной литературе доказывается теорема существования равновесия: выпуклость множеств $P_i(x_i)$ всех наборов предпочитаемых потребительских благ дает описание элементов из ядра в виде (нетривиально-го) квазиравновесия – это суррогат равновесия такой, что $\exists p \neq 0 : p y_i \geq p x_i = p e_i \quad \forall y_i \in P_i(x_i), \forall i$. Далее на модель накладываются условия, обеспечивающие превращение квазиравновесия в равновесие. Обычно это так называемое условие выживаемости (survival assumption), которое для цен квазиравновесия обеспечивает выполнение условия Слейтера в задаче потребителя: $\inf_{x_i, y_i} p x_i < p e_i$, где X_i – потребительское множество агента i (нужна также открытость $P_i(x_i)$). Это обеспечивает предположение о неразложимости (нередуцируемости) экономики (см. разд.5, определение 8) – наиболее значимо из известных в литературе.

Итак, совпадение ядра и равновесия при совершенной конкуренции и факт существования равновесия доказаны в рамках условия выживаемости. Однако для существования ядра это условие не играет роли – его значение заключается в том, чтобы обеспечить существование стандартного равновесия. Если это условие отсутствует, то существуют равновесия с нестандартными ценами, введенные в (Маракулин, 1988, 2012). Однако совпадают ли эти равновесия в условиях совершенной конкуренции с распределениями из ядра? Это вопрос, на который нацелено исследование данной работы. Представленная работа дает ответ: в экономике без условия выживаемости равновесия с нестандартными ценами и только они являются нечетко договорными распределениями (распределения, реализованные сетью договоров, стабильных относительно заключения нового взаимовыгодного контракта при одновременном несимметричном разрыве текущих договоров). Таким образом, было установлено, что договорная модель является наиболее точным методом моделирования совершенной конкуренции.

Работа организована следующим образом. В разд.1 дается введение в нестандартный анализ, в разд.2 формулируются основные концепции теории равновесия: модель экономики чистого обмена, понятия конкурентного равновесия и ядра, а также равновесия Эджуорта и его аналогов и концепция нечетко договорного распределения. Разд.3 раздел посвящен анализу концепции равновесия с нестандартными ценами, а разд.4 – нечетко договорных распределений и их стоимостной характеристике. Разд.5 содержит основные результаты об эквивалентности нестандартных и нечетко договорных распределений, а также анализ равновесий Эджуорта.

1. МЕТОДЫ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

Нестандартный анализ, иногда называемый также инфинитезимальным анализом, – это, скорее, математическая техника, нежели самостоятельная теория. Нестандартный анализ оперирует с идеальными элементами, которые могут быть как бесконечно близки к интересующему объекту, так и бесконечно далеки от него. В данном разделе я попробую объяснить смысл этой теории, с ее деталями можно ознакомиться в (Девис, 1980; Anderson, 1992; Loeb, 2000).

Большинство приложений нестандартного анализа основывается на идее гиперконечного множества – множества, которое может быть занумеровано нестандартными натуральными числами, не превосходящими некоторое фиксированное нестандартное натуральное число. Используя это понятие, можно аппроксимировать бесконечные (и даже бесконечномерные) объекты множествами, к которым применимы стандартные заключения о конечных объектах. В частности, в микро-математической литературе имеется значительное число работ, использующих идею гиперфинитного множества². Такого рода постановки приводят к рассмотрению моделей с гиперфинитным множеством экономических агентов, оснащенных стандартно ограниченными

² В основном это “большие” модели экономики: с бесконечным числом агентов или продуктов; так моделируются условия совершенной конкуренции – это экономики, содержащие “много” индивидуумов, каждый из которых имеет пренебрежимо малое влияние на экономику в целом.

возможностями влиять на текущую ситуацию (в модели обмена — околостандартными векторами исходных запасов) (Brown, Robinson, 1974; Rashid, 1987; Anderson, 1992). Имеется также множество других приложений методов нестандартного анализа к математической экономике и теории игр. С помощью методов нестандартного анализа также разрешается проблема существования экономического равновесия при отсутствии в модели (очень нереалистичного) условия Слейтера в задаче потребителя или каких-либо его аналогов (survival assumption) (Маракулин, 1988, 2012).

Теория нестандартного анализа работает с двумя структурами — *стандартным универсумом* U и *нестандартным универсумом* *U , которые связывает между собой взаимнооднозначное отображение (инъекция) $*$: $U \rightarrow {}^*U$. Имеется формальный язык, который применяется для формулировки разного рода утверждений в каждой из этих структур. Показано, что множество *U содержит огромное число новых идеальных объектов, в том числе бесконечно малые и бесконечно большие числа. Элементы *U вида $*x = *(x)$ для некоторого $x \in U$ называются стандартными; прочие элементы *U называются нестандартными. Множество $S \subset {}^*U$ элементов нестандартного универсума называется *внутренним*, если S является элементом нестандартного универсума; в противном случае — *внешним*. Множество ${}^*\mathbb{R}$ — нестандартное расширение числовой прямой, включает в себя бесконечно малые и бесконечно большие числа, имеющее те свойства числовой прямой, которые выражаются в определенном формальном языке. Величина $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ бесконечно малая, если $|\xi| < 1/n$ для каждого натурального $n \in \mathbb{N}$. Множество всех таких чисел называется монадой (нуля) $\mu(0)$, причем $\mu(0) \ni \xi \Leftrightarrow \xi \approx 0$. Монада $x \in {}^*\mathbb{R}$ — это $\mu(x) \ni y \Leftrightarrow |x - y| \approx 0$.

Стандартной частью $\text{st}(x) \in \mathbb{R}$ числа $x \in {}^*\mathbb{R}$ называется действительная величина такая, что $|\text{st}(x) - x| \approx 0$. Числа из ${}^*\mathbb{R}$, имеющие стандартную часть, называются околостандартными (при $\xi \approx 0$, $\xi \neq 0$ величина $1/\xi \approx \infty$ существует и не имеет стандартной части). Понятия монады, стандартной части и т.д. переносятся на любые топологические пространства. Отображение $*(\bullet)$ сохраняет векторные и алгебраические свойства объектов стандартной математики.

Имеются три основных инструмента (вида математической техники) нестандартного анализа. Первый — это *принцип переноса*, который утверждает, что любое утверждение, истинное в стандартном универсуме, будет истинным в нестандартном, и наоборот. Второй — *теорема направленности*. Теорема гарантирует, что расширенная структура содержит достаточно много идеальных элементов и, в частности, включает в себя все мыслимые пополнения, компактификации и т.д. Третий инструмент — это принцип доказательства от противного в предположении, что то или иное множество является *внутренним*. Сводка некоторых востребованных в работе результатов нестандартного анализа содержится в Приложении.

2. МОДЕЛЬ РАВНОВЕСНОГО РЫНКА: НЕСТАНДАРТНЫЕ ЦЕНЫ ИЛИ СТАБИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДОГОВОРОВ

Рассмотрим стандартную модель экономики обмена (нет производства) с (конечномерным) *пространством продуктов* $L = \mathbb{R}^I$. Имеется (конечное) множество агентов (торговцев или потребителей) $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$. Потребитель $i \in \mathcal{I}$ стандартным образом характеризуется собственным потребителем множеством $X_i \subset L$, вектором исходных запасов $e_i \in L$ и отношением предпочтения, описанным как точечно-множественное отображение $\mathcal{P}_i : X_i \Rightarrow X_i$, где множество $\mathcal{P}_i(x_i)$ содержательно означает совокупность всех потребителем наборов, строго предпочитаемых агентом i набору x_i . Будет использоваться также обозначение $y_i \succ_i x_i$, которое по определению эквивалентно $y_i \in \mathcal{P}_i(x_i)$. Рассматриваемая экономика чистого обмена может быть представлена в виде тройки $\mathcal{E}^m = \langle \mathcal{I}, L, (X_i, \mathcal{P}_i, e_i)_{i \in \mathcal{I}} \rangle$. Обозначим символом $e = (e_i)_{i \in \mathcal{I}}$ вектор исходных запасов (всех) торговцев рассматриваемой модели, положим $\mathbb{X} = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ и определим $\mathcal{A}(\mathbb{X}) = \left\{ x \in \mathbb{X} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i \right\}$ как множество всех *достижимых распределений* (состояний) модели $\mathcal{E}^m$. В дальнейшем всегда предполагается, что $\mathcal{E}^m$ удовлетворяет следующему предположению.

Предположение А. Для каждого $i \in \mathcal{I}$: множество X_i выпуклое, замкнутое, $\mathcal{P}_i(x_i) \cup \{x_i\}$ и $\mathcal{P}_i(x_i)$ выпуклы, $x_i \notin \mathcal{P}_i(x_i)$ для каждого $x_i \in X_i$.

В силу предположения А предпочтения могут быть насыщаемые, т.е. возможно $\mathcal{P}_i(x_i) = \emptyset$ для некоторых i и $x_i \in X_i$. Однако если $\mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset$, то предпочтения *локально ненасыщаемые* в точке x_i .

Наиболее значимые результаты настоящей работы получены для модели экономики, в которой потребительские множества полиэдральные (многогранные, т.е. являются пересечением конечного числа полупространств). Поэтому для упрощения изложения дадим следующее определение. Назовем модель $\mathcal{E}^m$ *полиэдральной*, если все множества X_i полиэдральные. Наряду с этим будем предполагать, что $e_i \in X_i$ и $\mathcal{P}_i(x_i)$ открыты в $X_i \ \forall i \in \mathcal{I}$.

Данная модель является частным случаем модели Эрроу – Дебре. Напомним известные в литературе концепции конкурентного и кооперативного равновесия, а также представление совершенной конкуренции.

2.1. Конкурентное равновесие.

Определение 1. Пара (x, p) , где $x \in \mathbb{X} = \prod_{\mathcal{I}} X_i$ и $p \neq 0$ – линейный функционал над L , называется *квазиравновесием* модели $\mathcal{E}^m$, если x сбалансирован, т.е. $\sum_{\mathcal{I}} x_i = \sum_{\mathcal{I}} e_i$, и

$$\langle p, \mathcal{P}_i(x_i) \rangle \geq px_i = pe_i \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (1)$$

Квазиравновесие такое, что $x'_i \in \mathcal{P}_i(x_i)$ влечет $px'_i > px_i$ ³ называется *вальрасовским*, или *конкурентным равновесием*.

Ясно, что если определить *бюджетное множество* потребителя $i \in \mathcal{I}$: $B_i(p) = \{y \in X_i \mid py \leq pe_i\}$, то (в строгой форме неравенства) условие равновесия (1) можно переписать в виде $\mathcal{P}_i(x_i) \cap B_i(p) = \emptyset$. При всех своих достоинствах данное классическое понятие равновесия обладает одним существенным недостатком: оно может не существовать при, казалось бы, всех нужных (и естественных) предположениях, обеспечивающих непрерывность, выпуклость и компактность необходимых модельных параметров. Причина этому в возможном нарушении условия Слейтера в задаче потребителя: чтобы обеспечить его, приходится накладывать дополнительные жесткие требования. Проблема условия Слейтера проявляется (хотя и в несколько ином виде) и в ряде других более общих моделей, например, для экономики с общественными благами. По этой причине в теории общего равновесия рассматривается ряд обобщенных концепций. Одним из наиболее продуктивных подходов здесь является концепция равновесия с нестандартными ценами (Маракулин, 2012), предварительному анализу которой посвящен данный раздел.

С целью пояснить исследуемую проблему рассмотрим показательный пример, заимствованный из (Маракулин, 1988, 2012, с. 89, пример 1.2.1), а затем изложим формальное понятие равновесия с нестандартными ценами.

Пример 1. В модели $\mathcal{E}^m$ имеются два агента и два типа продуктов (см. рисунок). При этом:

- 1) $X_1 = \{(x, y) \mid (0, 0) \leq (x, y) \leq (10, 10)\}$,
- 2) $X_2 = X_1 \cap \{(x, y) \mid y \geq 4 - x\}$,
- 3) $u_1(x, y) = 16 - (x - 4)^2 - (y - 4)^2$, $u_2(x, y) = y$,
- 4) $e_1 = (1, 3)$, $e_2 = (2, 2)$.

Рассмотрим имеющиеся возможности для нахождения того, что можно было бы назвать равновесием. При ценах $p = (p^x, p^y)$ таких, что $p^x \leq 0$, оптимальная реакция агента 1 такова, что его спрос на первый товар больше или равен 4, т.е. больше общего количества данного товара. Поэтому ни равновесие, ни даже полуравновесие⁴ в этом случае невозможно. При $p^y \leq 0$

³ Далее это записывается в виде $\langle p, \mathcal{P}_i(x_i) \rangle > px_i$.

⁴ Баланс в форме неравенства: $\sum_{\mathcal{I}} x_i \leq \sum_{\mathcal{I}} e_i$.

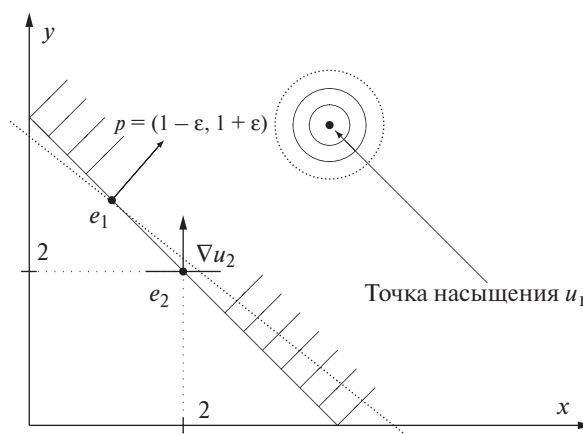


Рисунок. Равновесие с нестандартными ценами и трансферабельными стоимостями

с нереальным запросом на товар y выступает агент 2: $y_2 = 10$. Следовательно, должно быть $p \gg 0$. При $p^y \gtrsim p^x$ оптимальная реакция агента 2 совпадает с e_2 , а агента 1 такова, что $x_1 > 1$, т.е. баланс снова недостижим даже в форме неравенства. При $p^x \gtrsim p^y$ оптимальной реакцией агента 2 будет $(0, y_2)$, где $y_2 \geq 4$, а оптимальная реакция агента 1 такова, что суммарный спрос на второй продукт больше 5 и превысит предложение. Последнее следует из того, что все наборы (x_1, y_1) , которые лучше e_1 и такие, что $x_2 \leq 1$ (чтобы выдерживался баланс), при этих ценах находятся вне бюджетного множества участника 1. При ценах $p = (1, 1)$ так же, как и при нестандартных ценах $p = (1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$, $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon > 0$, спрос на y выше предложения. Цены $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ дают превышение спроса на x над его предложением. Все случаи, когда нестандартность в ценах играет роль, исчерпываются двумя вышеуказанными (в силу однородности доходов). В остальных ситуациях бюджетные множества участников при ценах p и $st p$ совпадают⁵ (Маракулин, 2012, с. 64, утверждение 1.1.5). Таким образом, при любых ценах (в том числе нестандартных) нарушается условие сбалансированности итогового распределения. Тем не менее в этой экономике есть состояние нестандартного равновесия: $(x_1, y_1) = (2, 2)$, $(x_2, y_2) = (1, 3)$, реализующееся при ценах $p = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon \neq 0$ и условии, что к доходам агента 2 (правая часть бюджетного ограничения) добавить величину 2ε . В целом такая конструкция называется равновесием с нестандартными ценами и трансферабельными стоимостями $\delta = (0, 2\varepsilon)$ (равновесие будет также при $\delta = (\varepsilon', 2\varepsilon')$ и любых $\varepsilon \approx \varepsilon' \approx 0$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$).

Для того чтобы определить в модели экономики обоснованное равновесное распределение, нам потребовалось прибегнуть к весьма нетривиальному стоимостному механизму, использующему нестандартные цены и трансферабельные стоимости. Однако этого же распределения можно достичь, если позволить агентам обмениваться продуктами. В (равновесном) состоянии $(x_1, y_1) = (2, 2)$, $(x_2, y_2) = (1, 3)$ агент 1 всего лишь выменял у агента 2 единицу первого продукта на единицу второго, и при этом оба существенно повысили свою полезность. Подобного рода операция называется заключением взаимовыгодного бартерного контракта (договора) и здесь мы приходим к понятию стабильной сети договоров, развитой в рамках общей теории договоров (разрабатывается автором).

В современной теории договоров (бартерное взаимодействие) существует множество типов стабильных систем (сетей) договоров (слабых и сильных), но ключевым моментом в этой теории является возможность разрыва договоров. В различных постановках этот разрыв может быть разным — полный, частичный, асимметричный частичный и даже разрыв договоров из эквивалентной (в некотором смысле) сети договоров. Исследования показали, что для описания равновесия наиболее адекватной формой договорного взаимодействия является концепция нечетко договорного распределения, суть которой состоит в том, что при договорном взаимодействии при заключении нового взаимовыгодного контракта одновременно допускается асимметричный

⁵ Это ситуация, в которой при ценах $\bar{p} = st p \neq 0$ в задаче потребителя выполнено условие Слейтера: $\inf_{x_i} \bar{p}x_i < \bar{p}e_i$.

частичный разрыв договоров – стабильные распределения в данном смысле (не допускающие такого рода манипуляций) и называются нечетко договорными (Маракулин, 2011; Marakulin, 2013). В п. 2.3 этот подход будет описан формально. Однако в каких именно модельных рамках имеет место эквивалентность между равновесием и договорными распределениями? Существует ли какое-нибудь различие между распределениями, соответствующими нестандартным равновесиям и нечетко договорным?

Рассмотрим далее формальную концепцию равновесия с нестандартными ценами и трансферабельными стоимостями в простейшем случае модели обмена с частной собственностью (Маракулин, 1988, 2012).

В работе будут использованы следующие понятия и обозначения: для *внутреннего* подмножества $A \subset {}^*L$ определены стандартная часть и стандартная внутренность, соответственно, $\text{st } A = \{y \in L \mid \mu(y) \cap A \neq \emptyset\}$, $\text{si } A = \{y \in L \mid \mu(y) \subset A \neq \emptyset\}$, где $\mu(y)$ – монада точки $y \in L$. Известно, что $\text{st } A$ – замкнутое и $\text{si } A$ – открытое множества (Маракулин, 1988, утверждение 2.14).

Для данного $p \in {}^*L$ и $\delta \in {}^*\mathbb{R}^I$, $\delta \geq 0$ рассмотрим нестандартные бюджетные множества ${}^*B_i(p, \delta_i)$, определяемые посредством ограничения $px' \leq pe_i + \delta_i$, $x' \in {}^*X_i$ т.е. положим ${}^*B_i(p, \delta_i) = \{x' \in {}^*X_i \mid px' \leq pe_i + \delta_i\}$, $i \in I$. Заметьте, что это внутреннее подмножество в *X_i . Используемый здесь вектор $\delta \geq 0$, определяющий стоимости, добавленные к правой части бюджетных ограничений, называется *схемой перераспределения избыточных стоимостей*.

Определение 2. Говорят, что состояние $x \in \mathbb{X}$ это равновесие с нестандартными ценами $p \in {}^*L'$ и фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей $\delta \in {}^*\mathbb{R}^I$, $\delta \geq 0$, если выполнены условия:

- i) $x_i \in \text{st } {}^*B_i(p, \delta_i) \quad \forall i \in I$;
- ii) $\mathcal{P}_i(x_i) \cap \text{st } {}^*B_i(p, \delta_i) = \emptyset \quad \forall i \in I$;
- iii) $\sum_I x_i = \sum_I e_i$.

Для краткости тройка (x, p, δ) также называется δ -равновесием с нестандартными ценами. Иллюстрацией определения 2 служит приведенный выше пример 1 экономики обмена. Следующая теорема обеспечивает существование нестандартных δ -равновесий.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{E}^m$ удовлетворяет предположению А $e_i \in X_i \quad \forall i \in I$ и $\mathcal{A}(\mathbb{X})$ ограничено. Пусть также для каждого $i \in I$ предпочтения $\mathcal{P}_i(\cdot)$ имеют открытый график⁶ в $X_i \times X_i$. Тогда для каждого $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in {}^*\mathbb{R}^I$ такого, что $\varepsilon \gg 0$, существуют δ -равновесия такие, что $\delta = \tau \varepsilon$ при некотором нестандартном $\tau \geq 0$.

Пример 1 показывает, что для существования стандартных равновесий предположений, приведенных в теореме 1, недостаточно, так как предположение $e_i \in X_i$ не обеспечивает выполнение условия Слейтера ($\inf_{X_i} px_i < pe_i$) в задаче потребителя для всех потенциально равновесных (стандартных) цен $p \in L'$. Однако существуют нестандартные равновесия. Для существования стандартного равновесия с трансферабельными стоимостями достаточно постулировать $e_i \in \text{int } X_i \quad \forall i \in I$. С содержательной точки зрения это, конечно, является чрезмерным требованием (фактически означает, что каждый агент имеет ненулевые запасы каждого продукта). Подробности и доказательство теоремы 1 можно найти в (Маракулин, 2012).

Замечание 1. Термин “равновесие с нестандартными ценами и фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей” апеллирует к тому, что в любом равновесии есть финансовый баланс $\sum_I px_i = \sum_I pe_i$ и, следовательно, агент i может потратить больше денег чем у него есть только в том случае, когда в его распоряжение поступили деньги $px_i - pe_i = \delta_i > 0$, полученные от агентов, которые в них не нуждаются. В стандартной постановке это могут быть только насыщенные агенты.

В равновесии с нестандартными ценами ситуация тоньше и неравенство $px_j < pe_j$ может появиться даже в случае ненасыщенных индивидов $j \in I$. Это возможно в случае когда

⁶ График отображения $\mathcal{P}_i : X_i \Rightarrow X_i$ это множество $\text{Gr}(\mathcal{P}_i) = \{(x_i, y_i) \in X_i \times X_i \mid y_i \in \mathcal{P}_i(x_i)\}$.

величины $\delta_i > 0$ бесконечно малые, образованные из остаточных (избыточных) стоимостей $\gamma_j = pe_j - px_j > 0$ индивидов, для которых любое увеличение полезности возможно только для бесконечно больших стоимостей (при их делении на γ_j получаем бесконечно большую величину). Таким образом, невостребованные избыточные ресурсы как-то собираются и передаются заинтересованным в них агентам.

В теореме 1 это перераспределение между агентами может осуществляться в любых заданных пропорциях, определенных вектором $\varepsilon \gg 0$. Тот факт, что к правой части каждого агента что-то добавляется иллюзорный — для насыщенных индивидов эти деньги не расходуются, а как-то передаются прочим — по схеме $\varepsilon \gg 0$. В итоге агенты дополнительно получают стоимостные величины $\delta_i = \tau \varepsilon_i \geq 0$, где $\tau \geq 0$ можно интерпретировать как цену избыточных финансовых ресурсов. Теорема 1 говорит о том, что такие равновесия существуют при любом $\varepsilon \gg 0$ и, более того, как это доказано в (Kononov, Marakulin, 2006), гарантировать (почти всегда) конечное число равновесий можно только для фиксированной схемы перераспределения, иначе их может оказаться бесконечно много. Соответствующий пример (устойчивый относительно вариаций полезностей) имеется в (Kononov, Marakulin, 2006; Маракулин, 2012).

2.2. Ядро, реплики и равновесия Эджуорта. Напомним, что распределение $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ доминируется (блокируется по) коалицией (непустой) $S \subset \mathcal{I}$, если существует такой $y^S \in \prod_{i \in S} X_i$, что $\sum_{i \in S} y_i^S = \sum_{i \in S} e_i$ и $y_i^S \succ_i x_i$ для каждого $i \in S$.

Ядро модели $\mathcal{E}^m$ — обозначенное как $\mathcal{C}(\mathcal{E}^m)$ — это множество всех $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$, которые не блокируются никакой коалицией.

Концепция ядра экономики формализует идею того, что не существует группы агентов (коалиции), у которой были бы выявленные стимулы к образованию автономной подэкономики: распределение из ядра разрушает такого рода деструктивную кооперацию и экономическая система сохраняет целостность. В общей теории равновесия хорошо известно (несложно доказать), что конкурентное равновесие всегда принадлежит ядру и, следовательно, обладает теми же свойствами кооперативной стабильности. Проблема в том, чтобы установить обратное включение, т.е. требуется выявить условия, при которых в модели *каждый элемент ядра* является равновесием, — это и будут условия *совершенной конкуренции*.

Классическим и исторически первым методом моделирования совершенной конкуренции является подход, основанный на понятии реплицированной модели экономики. Именно таким способом Ж. Дебре и Г. Скарф сумели впервые обосновать гипотезу Ф. Эджуорта, на которой основываются современные представления о совершенной конкуренции. В (Debreu, Scarf, 1963) было доказано, что ядро стягивается к равновесию, если (грубо) объем реплики стремится к бесконечности. В последствии подход Дебре — Скарфа обобщался и развивался многими авторами, причем на этом пути были разработаны не только новые методы моделирования совершенной конкуренции, но и получены наиболее мощные теоремы существования равновесия в моделях экономики с бесконечномерным пространством продуктов (Алипрантис и др., 1989; Маракулин, 2012). Ниже описывается базовая конструкция этого подхода.

Репликой модели $\mathcal{E}^m$ объема $r \in \mathbb{N}$ (т.е. r -кратной репликой) называется модель $\mathcal{E}_r^m$, составленная из r штук подэкономик, каждая из которых совпадает с исходной моделью $\mathcal{E}^m$. Иначе говоря, параметры реплицированной модели получены как r -кратное копирование параметров исходной экономики. Более точно, модель $\mathcal{E}_r^m$ включает в себя $\mathcal{I}_r = \{(i, m)\}_{m=1, i \in \mathcal{I}}^{m=r}$ потребителей, которые обладают тем свойством, что их параметры (потребительские множества, предпочтения, исходные запасы и др.), имеющие двойной индекс (i, m) , полностью определяются их типом в исходной модели, т.е. первым индексом. Предпочтения потребителей также задаются точно-множественным отображением $\mathcal{P}_{im}(\bullet) = \mathcal{P}_i(\bullet)$, но теперь уже определенным (потенциально на $\mathbb{X}_m = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_{im}$) и принимающим значения в X_{im} для всех $m = 1, \dots, r$.

Распределению $x = (x_i)_{\mathcal{I}}$ модели $\mathcal{E}^m$ поставим в соответствие распределение $x^r = (x_{im}^r)$ из реплики по правилу $x_{im}^r = x_i \forall i, m$. Аналогично, распределению $(x_{im})_{\mathcal{I}_r}$ из реплики можно поставить в соответствие распределение в исходной модели, если $x_{im}^r = x_{im'}$ для всех $i \in \mathcal{I}$,

$m, m' = 1, \dots, r$, т.е. если агенты одного типа потребляют одинаковые наборы благ⁷. Следуя (Али-прантис и др., 1989), определим основной предмет в анализе совершенной конкуренции – концепцию равновесия по Эджуорту.

Определение 3. Достижимое распределение $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ называется *равновесием Эджуорта*, если $x^r \in \mathcal{C}(\mathcal{E}_r^m)$ для каждого натурального $r \geq 1$. Совокупность всех равновесий Эджуорта обозначено как $\mathcal{C}^e(\mathcal{E}^m)$.

Одним из эффективных инструментов в анализе совершенной конкуренции является понятие нечеткого ядра, определение и основные свойства которого приводятся ниже. Как мы увидим в дальнейшем, это формально другое понятие реализует распределения аналогичные равновесиям Эджуорта, т.е. математически эти концепции эквивалентны. Напомним, что любой вектор $t = (t_1, \dots, t_n) \neq 0$, $0 \leq t_i \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{I}$ отождествляется с *нечеткой коалицией*, где вещественные t_i интерпретируются как мера участия потребителя i в данной коалиции.

Определение 4. Говорят, что нечеткая коалиция t доминирует (блокирует) распределение $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$, если найдется такой $y^t \in \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$, что

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} t_i y_i^t = \sum_{i \in \mathcal{I}} t_i e_i \Leftrightarrow \sum_{i \in \mathcal{I}} t_i (y_i^t - e_i) = 0 \quad (1)$$

и при этом

$$y_i^t \succ_i x_i, \quad \forall i \in \text{supp}(t) = \{i \in \mathcal{I} \mid t_i > 0\}. \quad (2)$$

Множество всех неблокируемых по нечетким коалициям достижимых состояний обозначается $\mathcal{C}^f(\mathcal{E}^m)$ и называется *нечетким ядром* модели $\mathcal{E}^m$.

Для ненасыщенных предпочтений, т.е. когда $\mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset \quad \forall i \in \mathcal{I}$, ситуацию нечеткого доминирования можно переписать в эквивалентном виде⁸ $0 \in \sum_{i \in \mathcal{I}} t_i (\mathcal{P}_i(x_i) - e_i)$. Таким образом, если $\mathcal{E}^m$ удовлетворяет предположению А (выпуклые предпочтения), то условие $x \in \mathcal{C}^f(E)$ эквивалентно⁹

$$0 \notin \text{co}[\bigcup_{i \in \mathcal{I}} (\mathcal{P}_i(x_i) - e_i)], \quad (3)$$

откуда, в частности, (после применения теоремы отделимости) следует тот факт, что элементы нечеткого ядра являются квазиравновесиями. В (Маракулин, 2011) была предложена другая характеристика нечеткого ядра и была доказана следующая лемма.

Лемма 1. Если выполняется предположение А, то распределение $x = (x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E}^m)$ тогда и только тогда, когда

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} \text{co}(\mathcal{P}_i(x_i) \cup \{e_i\}) \cap \{(z_1, \dots, z_n) \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i\} = \{e\}. \quad (4)$$

Заметьте, что характеристика (5) имеет место и для насыщенных предпочтений.

Результат следующей леммы хорошо известен в теории равновесия, он приводит анализ равновесий Эджуорта к анализу элементов нечеткого ядра.

Лемма 2. Если выполнено предположение А и $\mathcal{P}_i(x_i)$ открыты в $X_i \quad \forall i \in \mathcal{I}$, то $\mathcal{C}^f(\mathcal{E}^m) = \mathcal{C}^e(\mathcal{E}^m)$.

Доказательство леммы 2. Сначала покажем $\mathcal{C}^f(\mathcal{E}^m) \subseteq \mathcal{C}^e(\mathcal{E}^m)$. С этой целью предположим, что для некоторого r коалиция $S \subseteq \mathcal{I} \times \{1, \dots, r\}$ доминирует распределение x^r при $x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E}^m)$.

⁷ В теории равновесия это известно как требование “equal treatment”.

⁸ Допуская небрежность, здесь и ниже в формулах мы отождествляем вектор с содержащим его одноэлементным множеством.

⁹ Так как доминирование по произвольным нечетким коалициям эквивалентно доминированию по нормированным коалициям.

Пусть $\mathcal{I}(S) \subseteq \mathcal{I}$ – множество всех типов агентов, нетривиально представленных в коалиции S . По определению доминирование означает, что для каждого $(i, m) \in S$ найдутся такие $y_{im} \in \mathcal{P}_i(x_i)$,

что $\sum_{(i,m) \in S} y_{im} = \sum_{(i,m) \in S} e_{im}$. Теперь, если усреднить доминирующие потребительские наборы, отве-

чающие каждому из типов агента, т.е. если положить $y_i = \left(\sum_{m|(i,m) \in S} y_{im} \right) / s_i \quad \forall i \in \mathcal{I}(S)$, где s_i – число элементов (мощность) множества $S^i = \{m \mid (i, m) \in S\}$ (имеем $i \in \mathcal{I}(S) \Leftrightarrow S^i \neq \emptyset$), то из

предыдущих равенств получим $\sum_{i \in \mathcal{I}(S)} s_i y_i = \sum_{i \in \mathcal{I}(S)} s_i e_i$. В силу выпуклости $\mathcal{P}_i(x_i)$ также имеем

$y_i \in \mathcal{P}_i(x_i)$ для всех $i \in \mathcal{I}(S)$. Определим далее вектор $t = (t_1, \dots, t_n)$, полагая $t_i = s_i / r$, $i \in \mathcal{I}(S)$ & $t_i = 0$, $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}(S)$. Ясно, что в предыдущем равенстве *натуральные* числа s_i можно эквивалентным образом заменить на *рациональные* t_i . Таким образом, равновесия Эджуорта характеризуются тем фактом, что доминирование невозможно по нечетким рациональным коалициям, а в нечетком ядре – для любых. Включение установлено.

Далее установим $\mathcal{C}^e(\mathcal{E}^m) \subseteq \mathcal{C}^f(\mathcal{E}^m)$. Предполагая противное, найдем $x \in \mathcal{C}^e(\mathcal{E}^m)$, который доминируется нечеткой коалицией $t \neq 0$. По определению найдется $y^t \in \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$, удовлетворяющий соотношениям (2) и (3). Покажем, что тогда распределение x доминируется нечеткой коалицией $q = (q_1, \dots, q_n)$ с *рациональными* компонентами q_i , $i \in \mathcal{I}$. С этой целью для $t_i > 0$ положим

$$x'_i = (t_i / q_i) y_i + (1 - t_i / q_i) e_i \Rightarrow q_i (x'_i - e_i) = t_i (y_i - e_i),$$

где *рациональные* q_i удовлетворяют условию $t_i \leq q_i \leq 1$, а для $t_i = 0$ определим $q_i = 0$ и $x'_i = y_i^t$. Так как $e_i \in X_i$, то по построению $x' = (x'_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ и $\sum_{i \in \mathcal{I}} q_i (x'_i - e_i) = 0$. Однако в силу

открытости $\mathcal{P}_i(x_i)$ величины q_i можно выбрать так, чтобы $x'_i \in \mathcal{P}_i(x_i)$ выполнялось для всех i ,

удовлетворяющих $q_i > 0$. Пришли к противоречию с выбором $x \in \mathcal{C}^e(\mathcal{E}^m)$. Итак, доказано совпадение нечеткого ядра с множеством равновесий Эджуорта. ■

2.3. Кооперативное равновесие как нечетко договорное распределение. В (Маракулин, 2011) изучалась другая нечеткая концепция – понятие нечетко договорного распределения. Здесь мы даем его в несколько упрощенном виде (достаточном для наших целей), избегая подробных пояснений и терминологии договорного подхода. Пусть, как и ранее, $t = (t_1, \dots, t_n)$, $0 \leq t_i \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{I}$ вектор, подобный нечеткой коалиции (допускаем $t = 0$) и $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ – допустимое распределение, которому соответствует валовой контракт $x - e = v = (v_i)_{i \in \mathcal{I}}$ (net trade). Предполагается, что агенты экономики могут (нечетко – асимметрично) разрывать $v = (v_i)_{i \in \mathcal{I}}$, уменьшая индивидуальные потоки (фрагменты) этого контракта в долях $(1 - t_i)_{i \in \mathcal{I}}$, образуя при этом кортеж¹⁰ $v^t = (t_1 v_1, \dots, t_n v_n)$ продуктовых наборов, которые они могут использовать совместно с исходными запасами в последующих меновых операциях. После заключения некоторой коалицией $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}$ нового договора $w^{\mathcal{S}} = (w_i)_{i \in \mathcal{I}} \in L^{\mathcal{I}}$, $\sum_{i \in \mathcal{I}} w_i = 0$ ($i \notin \mathcal{S} \Rightarrow w_i = 0$) они достигнут (возможно недостижимого!) распределения

$$\xi(t, v, w) = w + v^t + e = (w_1 + t_1 v_1^t + e_1, \dots, w_n + t_n v_n^t + e_n).$$

¹⁰ Это не контракт, так как не выполнено его ключевое свойство $\sum_{i \in \mathcal{I}} t_i v_i = 0$.

Определение 5. Распределение $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ называется *нечетко договорным*, если для каждого $t = (t_i)_{i \in \mathcal{I}}, 0 \leq t_i \leq 1 \ \forall i \in \mathcal{I}$ не существует такого бартерного контракта $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{\mathcal{I}} w_i = 0$, что при $x - e = v$ и

$$\xi_i = \xi_i(t, v, w) = w_i + t_i v_i + e_i, \ i \in \mathcal{I} \quad (5)$$

имеет место

$$\xi_i \succ_i x_i \ \forall i : \xi_i \neq x_i. \quad (6)$$

Множество всех нечетко договорных распределений обозначено как $\mathcal{FC}(\mathcal{E}^m)$.

Отметим, что в силу (7) допустимо $w = 0$, т.е. возможен только частичный разрыв договоров. Отрицание возможности такого доминирования означает, что сеть договоров *правильная* и распределение *устойчиво относительно* асимметричного *частичного разрыва договоров*. Непосредственно из определения 5 следует характеристическая лемма (Маракулин, 2011).

Лемма 3. Распределение $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ является нечетко договорным тогда и только тогда, когда¹¹

$$\mathcal{P}_i(x_i) \cap [x_i, e_i] = \emptyset \ \forall i \in \mathcal{I} \quad (7)$$

и при этом

$$\prod_{\mathcal{I}} [(\mathcal{P}_i(x_i) + [0, e_i - x_i]) \cup \{e_i\}] \cap \{(z_i)_{\mathcal{I}} \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i\} = \{e\}. \quad (8)$$

Условие (8) говорит о том, что частичный разрыв договоров без заключения нового контракта никому не выгоден, т.е. $\{x - e\}$ — правильная сеть. Требование (9) отрицает наличие доминирующей коалиции после частично-асимметричного разрыва договора $v = (x - e)$. Утверждение леммы 3 можно переформулировать в несколько ином виде, удобном для дальнейшего анализа.

Следствие 1. Распределение $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ нечетко договорное, если и только если выполнено (8) и

$$\prod_S (\mathcal{P}_i(x_i) + [0, e_i - x_i]) \cap \{(z_i^S)_S \in L^S \mid \sum_S z_i^S = \sum_S e_i\} = \emptyset \ \forall S \subseteq \mathcal{I}. \quad (9)$$

Заметим, что для каждого $x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in \mathbb{X}$ при предположении А мы имеем

$$e_i \in \text{co}(\mathcal{P}_i(x_i) \cup \{e_i\}) \subset (\mathcal{P}_i(x_i) + [0, e_i - x_i]) \cup \{e_i\} \ \forall i \in \mathcal{I},$$

откуда в силу леммы 1 и (5) заключаем, что каждое нечетко договорное распределение принадлежит нечеткому ядру.

Следующее утверждение отчасти обосновывает обратную взаимосвязь между двумя нечеткими понятиями.

Лемма 4. Пусть выполняется предположение А, $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ и $\mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset$ для всех $i \in \mathcal{I}$. Тогда $x \in C^f(\mathcal{E})$ влечет

$$\prod_{\mathcal{I}} (\mathcal{P}_i(x_i) + [0, e_i - x_i]) \cap \{(z_1, \dots, z_n) \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i\} = \emptyset. \quad (10)$$

Доказательство леммы 4. Покажем, что (5) влечет (11). Предположим, что x удовлетворяет (5), но при этом (11) ложно. Тогда найдутся вектор $t = (t_i)_{i \in \mathcal{I}}, 0 \leq t_i \leq 1$ и наборы $z_i \succ_i x_i, i \in \mathcal{I}$ такие, что

$$\sum_{\mathcal{I}} z_i + \sum_{\mathcal{I}} t_i(e_i - x_i) = \sum_{\mathcal{I}} e_i. \quad (11)$$

Для действительного $0 < \beta \leq 1/2$ рассмотрим вектор $y = y(\beta) = (y_i)_{i \in \mathcal{I}}$, полагая $y_i(\beta) = \beta[z_i + t_i(e_i - x_i)] + (1 - \beta)x_i, i \in \mathcal{I}$. В силу (12) и $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ имеем $\sum_{\mathcal{I}} y_i(\beta) = \sum_{\mathcal{I}} e_i$ для каждого β .

¹¹ Линейный отрезок с концами $a, b \in L$ — это $[a, b] = \text{co}\{a, b\} = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Далее векторы $y_i(\beta)$ представим в виде $y_i(\beta) = (1 - \beta t_i)x_i + \beta t_i e_i + (1 - \beta t_i) \frac{\beta}{1 - \beta t_i} (z_i - x_i)$, $i \in \mathcal{I}$, где по выбору β имеем $\mu_i = \beta / (1 - \beta t_i) \leq 1$. Последнее в силу предположения А для $i \in \mathcal{I}$ влечет $\mu_i(z_i - x_i) \in \mathcal{P}_i(x_i) - x_i \Rightarrow \exists \eta_i \in \mathcal{P}_i(x_i) : \mu_i(z_i - x_i) = \eta_i - x_i$. Следовательно, из предыдущей формулы заключаем $y_i = (1 - \beta t_i)\eta_i + \beta t_i e_i$, что влечет $y_i \in \text{co}(\mathcal{P}_i(x_i) \cup \{e_i\})$, $i \in \mathcal{I}$. Теперь можно применить (5), заключая $y = y(\beta) = e$ для всех действительных $0 < \beta \leq 1/2$. Запишем далее это равенство покомпонентно и по определению $y_i(\beta)$ найдем

$$\beta[z_i + t_i(e_i - x_i)] + (1 - \beta)x_i = e_i \Rightarrow z_i + t_i(e_i - x_i) = x_i + (e_i - x_i) / \beta,$$

что должно выполняться для всех $i \in \mathcal{I}$ и всех $0 < \beta \leq 1/2$. Однако эти равенства выполняются для разных β , что возможно только если $x_i = e_i = z_i$, $i \in \mathcal{I}$, что по выбору z_i влечет $x_i \succ_i x_i$, но это противоречит предположению А (предпочтения иррефлексивны). ■

3. РАВНОВЕСИЕ С НЕСТАНДАРТНЫМИ ЦЕНАМИ. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ И СВОЙСТВА

Рассмотрим одну полезную спецификацию нестандартного равновесия, которая существенно упрощает теоретическую конструкцию и используется в последующем анализе. В случае *стандартного* рыночного равновесия с трансферабельными стоимостями потребительские наборы индивидуумов удовлетворяют бюджетному неравенству $\langle p, z \rangle \leq \langle p, e_i \rangle + \delta_i$. При этом для локально ненасыщенных предпочтений для равновесного плана x_i выполнено $px_i = pe_i + \delta_i$, что позволяет переписать ограничение в виде

$$\langle p, z \rangle \leq \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\}, i \in \mathcal{I}. \quad (12)$$

Теперь ограничения вида (13) можно применить для определения концепции обобщенного равновесия. Очевидно, что верно и обратное: если определить стоимости как $\delta_i = \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\} - \langle p, e_i \rangle \geq 0$, то равновесие на основе ограничений (13) преобразуется в стандартное равновесие с трансферабельными стоимостями.

В случае *нестандартного* равновесия ситуация далеко не столь тривиальна. Далее мы подробно изучим эту конструкцию.

Определение 6. Допустимое состояние $x \in \mathbb{X}$ экономики $\mathcal{E}^m$ называется *равновесием с нестандартными ценами* $p \in {}^*L'$, если выполнены условия:

$$i) \mathcal{P}_i(x_i) \cap \text{st}\{z \in {}^*X_i \mid \langle p, z \rangle \leq \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\}\} = \emptyset \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

$$ii) \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i.$$

В данном определении бюджетное ограничение имеет вид (13), но уже с нестандартными ценами и потребительскими планами, и ему соответствуют бюджетные множества $B_i^x(p) = \text{st}\{z \in {}^*X_i \mid \langle p, z \rangle \leq \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\}\}$, $p \in {}^*L'$, $i \in \mathcal{I}$. Как и ранее, величина, стоящая в правой части бюджетного ограничения, включает в себя стоимость $\delta_i = \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\} - \langle p, e_i \rangle \geq 0$, которую ненасыщенные индивиды получили от насытившихся. Однако теперь это может быть не только обычное насыщение, но и нестандартное: насыщение может наступить на рынках более высокого стоимостного уровня с пренебрежимо малой остаточной стоимостью, которая передается на следующий (нижний) уровень “бедности” (их может быть несколько).

Чтобы установить совпадение двух нестандартных концепций, заданных с помощью $B_i^x(p)$ и, альтернативно, через $\text{st}^* B_i(p, \delta_i)$, достаточно показать, что при любом заданном δ_i и $x_i \in \text{st}^* B_i(p, \delta_i)$ множество $B_i^x(p) \subseteq \text{st}^* B_i(p, \delta_i)$. Проблема состоит в том, что, в отличие от стандартного случая, для нестандартных бюджетных множеств при выпуклом и замкнутом X_i

потенциально возможно $z \in \text{st}^* B_i(p, \delta_i) \& pz > pe_i + \delta_i$. В (Маракулин, 2012, с. 97, пример 1.2.2) такого рода ситуация анализируется и описана формально. Следовательно, для $z \in \text{st}^* B_i(p, \delta_i)$ включение $\{y \in X_i \mid \langle p, y \rangle \leq \langle p, z \rangle\} \subseteq \{y \in X_i \mid \langle p, y \rangle \leq \langle p, e_i \rangle + \delta_i\}$ вообще говоря *ложное*. Однако при дополнительных предположениях оно имеет место, но только *после стандартизации* правой и левой частей. Это свойство является предметом ближайших рассмотрений.

Напомним некоторые важные факты из общей теории равновесия с нестандартными ценами. Первое это специфическое разложение вектора нестандартных цен по стандартному базису (Маракулин, 2012, лемма 1.1.2).

Лемма 5. Для каждого $p \in {}^*L'$, $p \neq 0$ найдется такая (единственная) система ортонормальных стандартных векторов $\{e_1, \dots, e_k\}$ из $L = \mathbb{R}^l$, что

$$p = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k, \quad \lambda_j \in {}^*\mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (13)$$

При этом коэффициенты $\lambda_j > 0$ и удовлетворяют соотношениям $\lambda_{j+1} / \lambda_j \approx 0$, $j = 1, \dots, k-1$.

Указанная в лемме система векторов единственная, но она может не быть базисом — хотя при необходимости ее можно дополнить до базиса. В (Маракулин, 1988, 2012) также изучалась структура бюджетных множеств: на основе описанного в лемме 5 представления нестандартного функционала в форме (14) было получено полное описание востребованных в равновесном анализе бюджетных множеств с нестандартными ценами и трансферабельными стоимостями.

Используя лемму 5 и представление (14), для данного $p \in {}^*L' = {}^*\mathbb{R}^l$ поставим в соответствие нестандартной величине $\gamma > 0$ номер $j = 1, \dots, k+1$:

$$\gamma / \lambda_{j-1} \approx 0 \& \gamma / \lambda_j \neq 0. \quad (14)$$

В (15) для определенности полагаем $\lambda_0 = +\infty$ и $\lambda_{k+1} = 0$. Такой $j = j(p, \gamma)$, в силу сказанного и леммы 5, определен корректно. Положим $\mu = \text{st}(\gamma / \lambda_{j-1})$ при $\gamma / \lambda \not\approx \infty$.

Теорема 2 (Маракулин, 2012, теорема 1.1.9). Пусть $X \subset L$ — выпуклое полиэдральное множество, $w \in X$, $p \in {}^*L'$, и нестандартный $\gamma > 0$ и номер $j = j(p, \gamma)$ связаны соотношением (15). Пусть $B^w(p, \gamma) = \text{st}\{z \in X \mid \langle p, z \rangle \leq \langle p, w \rangle + \gamma\}$. Тогда истинна одна из альтернатив:

i) $B^w(p, \gamma) = X$ при $\gamma / \lambda_1 \approx +\infty$;

ii) существует такой $m < j$, что $B^w(p, \gamma) = \{x \in X \mid e_r y = e_r w, r < m, e_m y \leq e_m w\} = B(m, p, w)$, причем найдется такой $y \in X$, что $e_m y < e_m w$;

iii) $B^w(p, \gamma) = \{x \in X \mid e_r y = e_r w, r < j\}$ при $\gamma / \lambda_j \approx +\infty$;

iv) $B^w(p, \gamma) = \{x \in X \mid e_r y = e_r w, r < j, e_j y \leq e_j w + \mu\}$ при $\gamma / \lambda_j \not\approx +\infty$.

При этом во всех вариантах ii) – iv): $\nexists y \in X : e_r y = e_r w, r < s, e_s y < e_s w \quad \forall 1 \leq s < m$.

Эта теорема была установлена А.В. Коноваловым и обобщает подобный результат из (Маракулин, 1988) (доказан для $\gamma = 0$, см. (Маракулин, 2012, теорема 1.1.8)). Отметим, что случай $\gamma = 0$ также описан в заключении теоремы 2, он соответствует альтернативе (ii) и, при $j = k+1$, альтернативе (iii). В целом теорема 2 представляет нетривиальный результат, при доказательстве которого предположение о полиэдральности X является существенным (контрпример имеется в (Маракулин, 2012)). Теперь нужное нам включение можно получить как следствие этой теоремы.

Замечание 2. Теорема 2 раскрывает внутреннее устройство бюджетного множества с нестандартной ценой $p \in {}^*\mathbb{R}^l$ и трансферабельной стоимостью $\gamma \geq 0$. На содержательном уровне оно таково. Первая группа ограничений $e_r y = e_r w$, $r < m \leq j$, заданных с помощью функционалов e_r , представленных в разложении (14) нестандартного вектора $p \in {}^*\mathbb{R}^l$, выделяет некоторую грань многогранника X . В пределах этой грани срабатывает последнее бюджетное ограничение $e_m y \leq e_m w + \mu$, для которого условие Слейтера (для найденной грани) выполняется (и это первая такая ситуация). При этом в данной конструкции отброшены несущественные элементы:

в разложении p это слагаемые вида $\lambda_r e_r$ при $\lambda_r / \gamma \approx 0$. Кроме того, описаны крайние варианты — случай когда $\gamma > 0$ “слишком большое” (случай *i*), и когда исполнение Слейтера не наступает вообще (случай *iii*). ■

Следствие 2. В условиях теоремы 2 для любого $z \in B^w(p, \gamma)$ имеет место $\text{st}\{y \in {}^*X \mid \langle p, y \rangle \leq \langle p, z \rangle\} \subseteq B^w(p, \gamma)$.

Доказательство. Применяя теорему 2 при $\gamma = 0$ в случае (*ii*) имеем: $\exists q < j$

$$\text{st}\{y \in {}^*X \mid \langle p, y \rangle \leq \langle p, z \rangle\} = \{x \in X \mid e_r y = e_r z, r < q, e_q y \leq e_q z\},$$

причем найдется такой $y \in X$, что $e_q y < e_q z$. Так как $z \in B^w(p, \gamma)$ то, в силу теоремы 2, имеем $q \geq m$ и $e_r z = e_r w$; $r < m$; & $e_m z \leq e_m w$ или $e_j z \leq e_j w + \mu$ при $\gamma / \lambda_j \approx +\infty$. Теперь предыдущая формула в каждом из пунктов (*i*) – (*iv*) теоремы 2 дает искомым результат. ■

Следствие 3. В условиях теоремы 2 из $x \in B^w(p, \gamma)$ и $\mathcal{P}(x) \cap B^w(p, \gamma) = \emptyset$ при $\mathcal{P}(x) \neq \emptyset$ открытым в X выполнено $\langle p, \mathcal{P}(x) \rangle > \langle p, x \rangle$.

Доказательство. Воспользуемся заключением следствия 2 и запишем условие $\mathcal{P}(x) \cap \text{st}\{y \in {}^*X \mid \langle p, y \rangle \leq \langle p, x \rangle\} = \emptyset$ в виде $\mu(z) \cap \{\xi \in {}^*X \mid \langle p, \xi \rangle \leq \langle p, x \rangle\} = \emptyset \quad \forall z \in \mathcal{P}(x)$. Так как $z \in \mu(z)$, то $pz \leq px$ невозможно, откуда $pz > px \quad \forall z \in \mathcal{P}(x)$. ■

Применяя следствие 2 непосредственно устанавливаем эквивалентность двух определений нестандартного равновесия для полиэдральных экономик.

Теорема 3. Пусть полиэдральная модель $\mathcal{E}^m$ удовлетворяет предположению А. Тогда распределение $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ является равновесием с нестандартными ценами $p \in {}^*L'$ и (некоторыми) трансфербельными стоимостями $\delta \in {}^*\mathbb{R}_+^I$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{P}_i(x_i) \cap \text{st}\{y \in {}^*X_i \mid py \leq \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\}\} = \emptyset \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

Замечание 3. Тот факт, что в теореме 3 рассматривается полиэдральная экономика в предъявленном доказательстве является значимым и его нельзя заменить на более слабое требование выпуклости. В полном объеме общее решение пока что не найдено, но есть ряд частных вариантов, что позволяет уверенно надеяться на то, что в будущем это ограничение можно будет снять.

Доказательство теоремы 3. Ранее уже отмечалось, что при $\delta_i = \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\} - \langle p, e_i \rangle \geq 0$ равновесие по определению 6 становится равновесием по определению 2. Обратное следует из $\text{st}\{y \in {}^*X_i \mid \langle p, y \rangle \leq \langle p, x_i \rangle\} \subseteq B_i^{e_i}(p, \delta_i) = \text{st}^* B_i(p, \delta_i)$ в силу следствия 2 и тривиального $\text{st}\{y \in {}^*X_i \mid \langle p, y \rangle \leq \langle p, e_i \rangle\} \subseteq \text{st}^* B_i(p, \delta_i)$. Следовательно (так как объединение левых частей содержится в правой), $\text{st}\{y \in {}^*X_i \mid \langle p, y \rangle \leq \max\{\langle p, x_i \rangle, \langle p, e_i \rangle\}\} \subseteq \text{st}^* B_i(p, \delta_i)$. В итоге, в силу условия 2 определения 2 имеем $\mathcal{P}(x_i) \cap \text{st}\{y \in {}^*X_i \mid \langle p, y \rangle \leq \max\{\langle p, x_i \rangle, \langle p, e_i \rangle\}\} = \emptyset$. ■

4. НЕЧЕТКО ДОГОВОРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ СТОИМОСТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ

В данном разделе мы исследуем вопрос о характеристизации нечетко договорного распределения в виде равновесия с нестандартными ценами. В последующем анализе важную роль играют множества следующей конструкции. Пусть $x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ – распределение в $\mathcal{E}^m$ и пусть $A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i)$ – любое конечное подмножество, $i \in \mathcal{I}$. Положим $D_i = \text{co}[(\text{co } A_i + [0, e_i - x_i]) \cup \{e_i\}]$ 12.

¹² Если $\mathcal{P}_i(x_i) = \emptyset$, то $A_i = \emptyset$ и значит $D_i = \{e_i\}$.

Из предположения А имеем $\text{co } A_i \subset P_i(x_i)$, откуда следует $D_i \subset (P_i(x_i) + [0, e_i - x_i]) \cup \{e_i\}$, $i \in \mathcal{I}$. В силу леммы 3 и требования (9), для нечетко договорного x получаем

$$\prod_{\mathcal{I}} D_i \cap \{(z_i)_{\mathcal{I}} \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i\} = \{e\}. \quad (15)$$

Лемма 6. Пусть выполнено предположение А и $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ – нечетко договорное распределение. Тогда e_i – вершина в $D_i \subset \mathbb{R}^I \ \forall i \in \mathcal{I}$ и e – вершина в $\prod_{\mathcal{I}} D_i$.

Доказательство. Сначала покажем, что $e_i \notin (\text{co } A_i + [0, e_i - x_i])$. Предполагая противное найдем $y_i \in \text{co } A_i$ и $\lambda \in [0, 1]$ такие, что

$$e_i = y_i + \lambda(e_i - x_i) \Rightarrow y_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)e_i = \lambda(x_i - e_i) + e_i,$$

тогда потребление $y_i \in [x_i, e_i] \cap P_i(x_i)$, т.е. может быть достигнуто путем разрыва имеющихся договоров в объеме $(1 - \lambda)$, что противоречит (8).

Доказано, что множество $C_i = \text{co } A_i + [0, e_i - x_i]$ – это ограниченный многогранник такой, что $e_i \notin C_i$. В силу (второй) классической теоремы отделимости найдется линейный функционал h (вектор) такой, что при некотором действительном γ имеем $\langle h, e_i \rangle < \gamma < \langle h, C_i \rangle$. Отсюда следует, что гиперплоскость, заданная уравнением $hz = he_i$, $z \in \mathbb{R}^I$, является опорной по отношению к D_i и пересекается с ним в единственной точке e_i . Это характеризует $e_i \in D_i$ как вершину (грань нулевой размерности). ■

Лемма 7. Пусть выполнено предположение А и $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ – нечетко договорное распределение. Тогда существует $p \in \mathbb{R}^I$ такой, что $\langle p, \text{co } A_i \rangle > \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\} \ \forall i \in \mathcal{I} : P_i(x_i) \neq \emptyset$.

При доказательстве данной леммы нам потребуется специфическая теорема отделимости многогранников (Маракулин, 2012, с. 26, утверждение 1.1.1).

Утверждение 1 (Маракулин, 2001). Пусть $\{A_j\}_{j=1}^{j=k}$ – совокупность выпуклых многогранников¹³ в линейном пространстве E , удовлетворяющая условию $\bigcap_{j=1}^k A_j = \{x\}$, и пусть $x \in \text{ri } F_{A_j}$ для всех $j = 1, \dots, k$, где F_{A_j} – грань A_j ¹⁴. Тогда найдется совокупность линейных стандартных функционалов $\{f_j\}_{j=1}^{j=k}$, не все из которых равны нулю, таких, что $f_j(A_j) \geq f_j(x)$, причем $F_{A_j} = \{y \in A_j \mid f_j(y) = f_j(x)\}$ для всех $j = 1, \dots, k$, и $\sum_{j=1}^k f_j = 0$.

Доказательство леммы 7. Применим утверждение 1 к соотношению (16), где пересекаются два множества. Заключаем существование ненулевого вектора $f \in (\mathbb{R}^I)^I$ такого, что при $\mathcal{A}(L^{\mathcal{I}}) = \{(z_i)_{\mathcal{I}} \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i\}$ выполняется $\langle f, \prod_{\mathcal{I}} D_i \rangle \geq \langle f, e \rangle$ & $\langle -f, \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}}) \rangle \geq \langle -f, e \rangle$

и при этом равенство в неравенствах реализуется только для точек из минимальной грани, содержащей элемент e . Однако e – вершина в $\prod_{\mathcal{I}} D_i$, а $\mathcal{A}(L^{\mathcal{I}})$ – аффинное подпространство. Таким образом, в силу утверждения 1, заключаем: $\forall i \in \mathcal{I} \mid P_i(x_i) \neq \emptyset$ имеет место

$\langle f, \prod_{\mathcal{I}} D_i \setminus \{e\} \rangle > \langle f, e \rangle$ & $\langle f, \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}}) \rangle = \langle f, e \rangle$. Более того, по определению $\mathcal{A}(L^{\mathcal{I}})$ последнее соотно-

шение означает, что вектор $f = (f_1, \dots, f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathcal{I}}$, представляющий разделяющий функционал,

¹³ Это множество, представимое как выпуклая оболочка конечного числа точек.

¹⁴ Это условие означает, что F_{A_j} – грань минимальной размерности, содержащая точку x .

удовлетворяет $f_i = f_j = p \neq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{I}$. С учетом этого факта первое неравенство дает:
 $\forall i \in \mathcal{I} \mid \mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} \langle p, D_i \setminus \{e_i\} \rangle + \sum_{j \in \mathcal{I}, j \neq i} \langle p, D_j \rangle &> \sum_{j \in \mathcal{I}} \langle p, e_j \rangle \Rightarrow \langle p, D_i \setminus \{e_i\} \rangle + \sum_{j \in \mathcal{I}, j \neq i} \langle p, e_j \rangle > \sum_{\mathcal{I}} \langle p, e_j \rangle \Rightarrow \\ \langle p, \text{co } A_i + [0, e_i - x_i] \rangle &> \langle p, e_i \rangle \Rightarrow \langle p, \text{co } A_i \rangle > \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Ключевая теорема данной работы будет доказана с помощью теоремы направленности из теории нестандартного анализа. Пусть U — это универсум стандартной математики и *U — нестандартный. Напомним далее понятие *направленного* отношения.

Определение 7. Бинарное отношение $r \in U$ называется *направленным относительно U* (или просто *направленным*), если для любого конечного набора $a_1, \dots, a_k \in \text{dom}(r)$ существует такой элемент b , что $(a_i, b) \in r$ для всех $i = 1, \dots, k$.

Теорема 4 (теорема направленности). Пусть r — направленное отношение в U . Тогда существует такой элемент $b \in {}^*U$, что $({}^*a, b) \in {}^*r$ для всех $a \in \text{dom}(r)$.

Итак, по определению направленного отношения для каждого конечного подмножества A из области определения ($\text{dom}(r)$) отношения r найдется такой элемент $q_A \in U$, что $(a, q_A) \in r$ для всех $a \in A$. Интуитивно, теорема направленности обеспечивает существование такого (нестандартного) b , который представляет собой “предел” точек q_A как только A “приближается” к $\text{dom}(r)$.

Теорема 5. Пусть экономика $\mathcal{E}^m$ полиэдральная, $x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$, выполнено предположение A и $\mathcal{P}_i(x_i)$ открыты в X_i , $\forall i \in \mathcal{I}$. Тогда, если x — нечетко договорное, то существует нестандартный $p \in \mathbb{R}^l$ такой, что

$$\mathcal{P}_i(x_i) \cap \text{st}\{y \in {}^*X_i \mid py \leq \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\}\} = \emptyset \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (16)$$

Доказательство теоремы 5. Определим *направленное отношение $\mathcal{U}$* . Пусть $\mathbb{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ любая совокупность (кортеж) *конечных* (возможно пустых) подмножеств $A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i)$. В силу леммы 7 истинно высказывание: $\forall i \in \mathcal{I}, \forall A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i), A_i \neq \emptyset, |A_i| < +\infty \exists p \in \mathbb{R}^l \mid \langle p, A_i \rangle > \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\}$. Обозначим через $p(\mathbb{A})$ линейный функционал, отвечающий набору $\mathbb{A} = \{A_i\}_{\mathcal{I}}$ и удовлетворяющий заключению леммы 7. Теперь определим отношение $\mathcal{U}$ как совокупность всех пар $(\mathbb{A}, p(\mathbb{A}))$ указанного вида, т.е. положим

$$\mathcal{U} = \{(\mathbb{A}, p) \mid \mathbb{A} = \{A_i\}_{i=1}^n, |A_i| < \infty, A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i), p = p(\mathbb{A})\}.$$

Свойство *направленности* отношения $\mathcal{U}$ легко проверяется. Действительно, для конечного семейства $\{\mathbb{A}^t\}$ из $\text{dom } \mathcal{U}$ достаточно положить $\hat{A}_i = \cup_t A_i^t$ и, используя лемму 7, найти вектор $\hat{p}$, соответствующий набору $\hat{\mathbb{A}} = \{\hat{A}_i\}_{\mathcal{I}}$. Легко убедиться, что $(\hat{\mathbb{A}}, \hat{p}) \in \mathcal{U}$. Итак, $\mathcal{U}$ — направленное отношение. В силу теоремы направленности найдется такой нестандартный вектор *p , что $(\mathbb{A}, {}^*p) \in {}^*\mathcal{U}$ при любом $\mathbb{A} \in \text{dom } \mathcal{U}$.

Заметим, что по определению $\mathcal{U}$ вектор *p удовлетворяет заключению леммы 7 при любом $\mathbb{A} \in \text{dom } \mathcal{U}$ и, так как к A_i можно добавить любую точку из $\mathcal{P}_i(x_i)$ не выходя за пределы $\text{dom } U$, то $\langle {}^*p, y \rangle > \max\{\langle {}^*p, e_i \rangle, \langle {}^*p, x_i \rangle\} \quad \forall y \in \mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset$. Это соотношение можно переписать в виде $\mathcal{P}_i(x_i) \cap \{y \in {}^*X_i \mid \langle {}^*p, y \rangle \leq \max\{\langle {}^*p, e_i \rangle, \langle {}^*p, x_i \rangle\}\} = \emptyset \quad \forall i \in \mathcal{I}$. Обратите внимание, что левое множество $\mathcal{P}_i(x_i)$ в этом пересечении внешнее, а правое — внутреннее. Это не позволяет сразу прийти к нужному заключению путем применения операций $\text{si}(\bullet)$ и $\text{st}(\bullet)$.

Пусть произвольный $y \in \mathcal{P}_i(x_i)$. Ранее предполагалось, что $\mathcal{P}_i(x_i)$ открыто в $X_i \subset \mathbb{R}^I$ и X_i — полиэдральные (многогранные) множества. Поэтому у y найдется многогранная окрестность в $\mathcal{P}_i(x_i)$, т.е. существует конечное множество $A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i)$ такое, что $\text{co} A_i$ — окрестность y в X_i . Но тогда из построения $\text{co} A_i \cap \{y \in X_i \mid \langle p, y \rangle \leq \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\}\} = \emptyset$, что в силу $\mu(y) \subset \text{co} A_i$ дает

$$\mu(y) \cap \{z \in X_i \mid \langle p, z \rangle \leq \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\}\} = \emptyset \Rightarrow y \notin \text{st}\{z \in X_i \mid \langle p, z \rangle \leq \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\}\},$$

что и требовалось доказать. ■

5. СОВЕРШЕННАЯ КОНКУРЕНЦИЯ: ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕСТАНДАРТНОГО И ДОГОВОРНОГО ПОДХОДА

В предыдущих разделах были получены теоремы, характеризующие совершенную конкуренцию в экономике без условия выживаемости. Напомним, что $x = (x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ называется *равновесием с нестандартными ценами*, если существуют нестандартный $p \in \mathbb{R}^I$ такой, что

$$\mathcal{P}_i(x_i) \cap \text{st}\{y \in X_i \mid py \leq \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\}\} = \emptyset \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

Теорема 6. Пусть экономика $\mathcal{E}^m$ полиэдральная, $x = (x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$, выполнено предположение А и $\mathcal{P}_i(x_i)$ открыты в $X_i \quad \forall i \in \mathcal{I}$. Тогда x — нечетко договорное тогда и только тогда, когда это равновесие с нестандартными ценами.

Комбинируя этот результат с теоремой 1 (существование нестандартных равновесий), получаем следствие.

Следствие 4. Если в условиях теоремы 6 дополнительно $\mathcal{P}_i(\bullet)$ имеет открытый график в $X_i \times X_i$ и $e_i \in X_i \quad \forall i \in \mathcal{I}$, то $\mathcal{FC}(\mathcal{E}^m) \neq \emptyset$ — нечетко договорные распределения существуют.

Доказательство теоремы 6. В теореме 5 было установлено, что каждое нечетко договорное распределение является равновесием с нестандартными ценами. Установим обратное заключение. Пусть $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ — нестандартное равновесие. Требуется проверить свойства (8), (9), характеризующие нечетко договорные распределения. Так как $[x_i, e_i] \subset \text{st}\{y \in X_i \mid py \leq \max\{\langle p, e_i \rangle, \langle p, x_i \rangle\}\}$, истинность (8) непосредственно вытекает из определения равновесия. Условие (9) требует проверки, которая может быть осуществлена рассуждениями от противного.

Предположим, что (9) ложно, значит найдется $y = (y_i)_{i \in \mathcal{I}} \neq (e_i)_{i \in \mathcal{I}} = e$ из левой части пересечения (9). Образует коалицию $S = \{i \in \mathcal{I} \mid y_i \neq e_i\} \neq \emptyset$. По построению из (9) имеем

$y_i \in (\mathcal{P}_i(x_i) + [0, e_i - x_i]) \quad \forall i \in S$ & $\sum y_i = \sum e_i$. Отсюда заключаем $\forall i \in S \quad \exists \lambda_i \in [0, 1] : z_i = y_i + \lambda_i(x_i - e_i) \in \mathcal{P}_i(x_i)$. Из определения равновесия $pz_i > \max\{pe_i, px_i\} \quad \forall i \in S$ (так как другое невозможно). Однако

$$\begin{aligned} pz_i &= py_i + \lambda_i(x_i - e_i)p \quad \forall i \in S \Rightarrow \sum_S pz_i = \sum_S py_i + \\ &+ \sum_S \lambda_i p(x_i - e_i) = \sum_S pe_i + \sum_S \lambda_i p(x_i - e_i) \leq \sum_S \max\{pe_i, px_i\}, \end{aligned}$$

что противоречит предыдущему заключению. ■

В общем случае экономики $\mathcal{E}^m$ без условия Слейтера нечеткое ядро, а значит равновесия Эджурта характеризует следующая теорема.

Теорема 7. Пусть экономика $\mathcal{E}^m$ полиэдральная, $x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$, выполнено предположение A и $\mathcal{P}_i(x_i)$ открыты в $X_i \ \forall i \in \mathcal{I}$. Тогда $x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E}^m) = \mathcal{C}^e(\mathcal{E}^m)$ если и только если существуют нестандартные цены $p \in {}^*\mathbb{R}^I$:

$$\langle p, \mathcal{P}_i(x_i) \rangle > \langle p, e_i \rangle \Leftrightarrow \mathcal{P}_i(x_i) \cap \text{st}\{y \in {}^*X_i \mid py \leq \langle p, e_i \rangle\} = \emptyset \quad i \in \mathcal{I}. \quad (17)$$

Обратите внимание, что эквивалентность в (18) также требует доказательства.

Доказательство теоремы 7. Общая логика доказательства необходимости (18) следует доказательству теоремы 5, но вместо D_i применяются множества $Y_i = \text{co}(A_i \cup \{e_i\})$, $A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i)$, $|A_i| < +\infty \ i \in \mathcal{I}$, которые в силу леммы 1 и (5) и, так как $\{e_i\}$ – вершина в Y_i ¹⁵, позволяют свести вопрос к применению теоремы отделимости из утверждения 1. Далее аналогично лемме 7 заключаем существование вектора $f = (f_1, \dots, f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathcal{I}} \neq 0$ такого, что $\langle f, \prod_{i \in \mathcal{I}} Y_i \setminus \{e_i\} \rangle > \langle f, e \rangle$ & $\langle f, A(L^{\mathcal{I}}) \rangle = \langle f, e \rangle$. Здесь последнее равенство влечет $f_i = f_j = p \neq 0 \ \forall i, j \in \mathcal{I}$. С учетом этого, первое неравенство дает $\forall i \in \mathcal{S} = \{i \in \mathcal{I} \mid \mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset\}$,

$$\langle p, Y_i \setminus \{e_i\} \rangle + \sum_{j \in \mathcal{I}, j \neq i} \langle p, Y_j \rangle > \sum_{j \in \mathcal{I}} \langle p, e_j \rangle \Rightarrow \langle p, Y_i \setminus \{e_i\} \rangle + \sum_{j \in \mathcal{I}, j \neq i} \langle p, e_j \rangle > \sum_{j \in \mathcal{I}} \langle p, e_j \rangle \Rightarrow$$

$$\langle p, \lambda \text{co } A_i + (1 - \lambda)e_i \rangle > \langle p, e_i \rangle \quad \forall \lambda \in (0, 1] \Leftrightarrow \langle p, \text{co } A_i \rangle > \langle p, e_i \rangle \quad \forall i \in \mathcal{S}.$$

Применяя теорему направленности также как это делалось в теореме 5, заключаем, что существует нестандартный $p' \in {}^*L'$ такой, что $\langle p', \mathcal{P}_i(x_i) \rangle > \langle p', e_i \rangle \ \forall i \in \mathcal{S}$. Так как при $\mathcal{P}(x_i) = \emptyset$ это соотношение выполнено автоматически, то можно считать его установленным для всех $i \in \mathcal{I}$. Доказательство эквивалентности в (18) в точности повторяет рассуждения теоремы 5.

Достаточность (18) устанавливается непосредственно. Действительно, если $t = (t_i)_{\mathcal{I}}$ – доминирующая нечеткая коалиция, то найдутся $y_i \in X_i$ такие, что $y_i \succ_i x_i \ \forall i \in \mathcal{I}$: $t_i > 0$ & $\sum t_i(y_i - e_i) = 0$. Умножая левую часть равенства скалярно на вектор цен $p \in {}^*\mathbb{R}^I$, удовлетворяющий (18), из $py_i > pe_i$ находим $\langle p, \sum_I t_i(y_i - e_i) \rangle > 0$, что невозможно. ■

Теоремы 6 и 7 выявляют различие между классической моделью совершенной конкуренции и договорной. Действительно, каждое нечетко договорное распределение является равновесием Эджуорта, однако когда договорной подход эквивалентен классическому? Это будет выполняться, если экономика нередуцируемая.

Определение 8. Экономика $\mathcal{E}^m$ называется *нередуцируемой*, если для любого допустимого $x = (x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ и любого нетривиального разбиения $\mathcal{I} = S \cup T$, $S \cap T = \emptyset$ найдется такое перераспределение ресурсов дополняющей коалиции $T \neq \emptyset$, $z = (z_i)_{\mathcal{I}} \in L^{\mathcal{I}}$, что

$$\sum_S z_i = \sum_T z_j \text{ \& } \forall j \in T : e_j - z_j \in X_j \text{ \& } \forall i \in S : x_i + z_i \in \text{cl } \mathcal{P}_i(x_i) \text{ \& } \exists i \in S : x_i + z_i \in \mathcal{P}_i(x_i) \text{ }^{16}.$$

Последняя формула говорит о том, что группа T способна не только предоставить ресурсы, в которых заинтересованы члены группы S , но и как-то при этом выжить: поставки продуктов возможно осуществить. Отметим также, что понятие нередуцируемой модели включает в себя *локальную ненасыщаемость* у каждого экономического агента.

¹⁵ Распределение из ядра нельзя доминировать по одноэлементным коалициям, поэтому $\{e_i\} \notin \text{co } A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i)$.

¹⁶ Зачастую постулируется, что $z_j = 0 \ \forall j \neq i, j \in \mathcal{S}$.

Теорема 8. Пусть экономика $\mathcal{E}^m$ полиэдральная, $x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in \mathbb{X}$, выполнено предположение А и $\mathcal{P}_i(x_i)$ открыты в X_i , $\forall i \in \mathcal{I}$. Пусть также $\sum_{\mathcal{I}} e_i \in \text{int} \sum_{\mathcal{I}} X_i$ и $\mathcal{E}^m$ — неразложимая экономика. Тогда для $x = (x_i)_{\mathcal{I}}$ свойства (i) – (iv) эквивалентны:

- i) равновесие с нестандартными ценами,
- ii) нечетко договорное распределение,
- iii) элемент нечеткого ядра,
- iv) равновесие Эджурта.

Замечание 4. В части совпадения классического конкурентного равновесия и равновесий Эджурта — это известный в теории общего равновесия результат, восходящий к пионерской работе (Debreu, Scarf, 1963)¹⁷, который приводится здесь для полноты изложения. Стандартная логика состоит в том, чтобы сначала у элемента из нечеткого ядра установить свойства квазиравновесия и затем, используя неразложимость и внутреннюю точку, показать, что тогда каждое равновесие обращается в полноценное конкурентное равновесие. При этом предположение о полиэдральности можно снять и вместо теоремы 7 использовать соотношение (4) или (5) с тем, чтобы, применяя теорему отделимости, сразу найти цены квазиравновесия. Предположение $\sum_{\mathcal{I}} e_i \in \text{int} \sum_{\mathcal{I}} X_i$ можно интерпретировать как условие отсутствия в модели фиктивных продуктов.

Доказательство теоремы 8. Если для нестандартных цен $p \in {}^*\mathbb{R}^I$, фигурирующих в теоремах 6 и 7, положить $\bar{p} = \text{st}(p / \|p\|)$ ¹⁸, то для договорной модели будет: $\forall i \in \mathcal{I} \langle \bar{p}, \mathcal{P}_i(x_i) \rangle \geq \max\{\langle \bar{p}, x_i \rangle, \langle \bar{p}, e_i \rangle\}$, а для классической $\langle \bar{p}, \mathcal{P}_i(x_i) \rangle \geq \langle \bar{p}, e_i \rangle$.

Если $\mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset$, то в силу $x_i \in \text{cl} \mathcal{P}_i(x_i)$ (из предположения А) последнее неравенство дает $\langle \bar{p}, x_i \rangle \geq \langle \bar{p}, e_i \rangle$. Наконец, из $\sum_{\mathcal{I}} x_i = \sum_{\mathcal{I}} e_i$ заключаем $\langle \bar{p}, x_i \rangle = \langle \bar{p}, e_i \rangle \quad \forall i \in \mathcal{I}$. Таким образом, в ненасыщенной экономике при стандартизованных ценах выполнены бюджетные ограничения и распределение x является квазиравновесием. В силу теоремы 7 квазиравновесия становятся полноценными рыночными равновесиями, если для $\bar{p} = \text{st}(p) \neq 0$ выполняется $\text{st}\{z_i \in {}^*X_i \mid pz_i \leq pe_i\} = \{\bar{z}_i \in X_i \mid \bar{p}z_i \leq \bar{p}e_i\} \quad \forall i \in \mathcal{I}$, что обеспечивается условием Слейтера: $\inf_{\bar{z}_i \in X_i} \bar{p}z_i < \bar{p}e_i \quad i \in \mathcal{I}$. Чтобы убедиться в этом достаточно доказать $\supseteq$ (обратное включение следует из стандартизации неравенства $pz_i \leq pe_i$), сделаем это.

Пусть $\bar{z}_i \in X_i$ удовлетворяет бюджетному равенству $\bar{p}z_i = \bar{p}e_i$ (для строгого неравенства нечего доказывать). Возьмем $z_i \in X_i$ из условия $\bar{p}z_i < \bar{p}e_i$ и найдем $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon > 0$ такой, что $p(\varepsilon z_i + (1 - \varepsilon)\bar{z}_i) \leq pe_i$. Положим $\Delta p = p - \bar{p} \approx 0$ и раскроем нужное неравенство: после преобразований и сокращений находим

$$(\bar{p} + \Delta p)(\varepsilon z_i + (1 - \varepsilon)\bar{z}_i) \leq (\bar{p} + \Delta p)e_i \Rightarrow \varepsilon(\bar{p}z_i - \bar{p}e_i) \leq \Delta pe_i - \Delta p(\varepsilon z_i + (1 - \varepsilon)\bar{z}_i).$$

Здесь величину справа можно оценить как

$$0 \approx -\|\Delta p\|(\|e_i\| + \|z_i\| + \|\bar{z}_i\|) \leq \Delta pe_i - \Delta p(\varepsilon z_i + (1 - \varepsilon)\bar{z}_i)$$

и, так как $\bar{p}z_i - \bar{p}e_i < 0$ — стандартная величина, то найдется $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon > 0$ такой, что $\varepsilon(\bar{p}z_i - \bar{p}e_i) < -\|\Delta p\|(\|e_i\| + \|z_i\| + \|\bar{z}_i\|)$. Для этого ε вектор $z_i = \varepsilon z_i + (1 - \varepsilon)\bar{z}_i \in {}^*X_i$: $\text{st}(z_i) = \bar{z}_i$ и z_i удовлетворяет нестандартному бюджетному ограничению.

Покажем, что при $\bar{p} = \text{st}(p) \neq 0$ в неразложимой экономике бюджетное ограничение каждого индивида удовлетворяет условию Слейтера. Предполагая противное образуем (непустую) группу $S \subset \mathcal{I}$ всех индивидов, удовлетворяющих $\langle \bar{p}, e_i \rangle > \inf_{X_i} \langle \bar{p}, X_i \rangle$ и пусть $T \neq \emptyset$ — ее

¹⁷ Здесь установлен при существенно более слабых предположениях.

¹⁸ Случай $p = 0$ рассматривается самостоятельно (тривиально), а $\text{st}(p/\|p\|)$ существует всегда в силу компактности сферы единичного радиуса и по нестандартному критерию компактности.

дополнение. Далее рассмотрим поток $z = (z_i)_T \in L^T$ ресурсов для коалиции S , заданный по определению нередуцируемой модели, и найдем

$$\begin{aligned} \forall i \in S \quad \langle \bar{p}, x_i + z_i \rangle &\geq \langle \bar{p}, x_i \rangle \ \& \ \exists i \in S : \langle \bar{p}, x_i + z_i \rangle > \langle \bar{p}, x_i \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \bar{p}, \sum_S z_i \rangle &> 0 \Rightarrow \langle \bar{p}, \sum_S z_i \rangle = \langle \bar{p}, \sum_T z_j \rangle > 0. \end{aligned}$$

Однако по построению $\langle \bar{p}, e_j \rangle = \inf_{X_j} \langle \bar{p}, X_j \rangle$ для $j \in T$ и в силу нередуцируемости $\langle \bar{p}, e_j - z_j \rangle \geq \inf_{X_j} \langle \bar{p}, X_j \rangle \Rightarrow \langle \bar{p}, z_j \rangle \leq 0 \quad \forall j \in T$. Суммируя по $j \in T$, получаем $\langle \bar{p}, \sum_T z_j \rangle \leq 0$, что противоречит предыдущему заключению. Следовательно, $T = \emptyset$ и квазиравновесие является равновесием. ■

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследуется моделирование условий совершенной конкуренции в моделях экономики, где условие выживаемости экономических агентов (условие Слейтера) нарушается. В таких моделях корректной концепцией равновесия является понятие равновесия с нестандартными ценами и трансферабельными стоимостями. В соответствии с классическими представлениями совершенная конкуренция это условия, в которых ядро совпадает с равновесием, однако как это осуществить для нестандартных равновесий в случае когда они отличаются от обычных (нет Слейтера)?

Анализ основывается на договорном подходе: мы доказываем, что корректной моделью совершенной конкуренции является понятие нечетко договорного распределения — это распределения такие, что нет такой коалиции, для членов которой при частичном и потенциально асимметричном разрыве договоров было бы выгодно заключить новый взаимовыгодный контракт.

При минимально слабых предположениях доказана теорема о совпадении множества всех нестандартных равновесий и нечетко договорных — теорема 6 в тексте работы. В качестве следствия этой теоремы установлен (новый) факт существования нечетко договорных распределений — это предположения, обеспечивающие существование нестандартных равновесий.

Исследован классический метод моделирования совершенной конкуренции, основанный на представлении о равновесиях Эджуорта и развивающий подход Дебре и Скарфа. Получено их описание в терминах нестандартных цен из которого следует, что это модель менее квалифицированная чем договорная — теорема 7. Дополнительно представлены и обоснованы условия (известные ранее), при которых равновесия Эджуорта совпадают с конкурентными равновесиями. При этих условиях все изученные понятия эквивалентны — теорема 8.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сводка некоторых результатов нестандартного анализа. В приложениях нестандартного анализа бывает весьма важно уметь показать, что то или иное множество является внутренним.

Теорема 9. Пусть A — внутреннее и $B \subseteq^* U$ — определимое множества. Тогда $A \cap B$ внутреннее множество.

Гиперконечные множества. Предположим, что $A \in U$ является множеством. Пусть $F(A)$ обозначает совокупность всех конечных подмножеств A . Говорят, что множество $B \in^* U$ гиперконечно (гиперфинитно), если $B \in^* F(A)$ для некоторого $A \in U$. В этом случае, конечно, имеем $B \subseteq^* A$.

Теорема 10. Пусть $A \in U$ и $n \in^* \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ любое бесконечное натуральное число. Тогда существует гиперконечное множество D такое, что $|D| < n$ и $x \in A \Rightarrow^* x \in D$.

Важно, что каждое внутреннее подмножество гиперконечного множества само является гиперконечным (доказательство несложно).

Гипердействительные числа и стандартные части. Так как $\mathbb{R}$ — упорядоченное поле, то (по принципу переноса) ${}^*\mathbb{R}$ также является упорядоченным полем относительно операций $+$, $\bullet$ и отношения $<$. Говорят, что нестандартное число $r \in {}^*\mathbb{R}$ *конечное*, если $|r| < n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Если $r \in {}^*\mathbb{R}$ конечное, то существует единственное действительное число, бесконечно близкое к r . Это число называется *стандартной частью* числа r и обозначается как ${}^\circ r$ (иногда $\text{st}(r) = \text{st } r$). Верно и обратное: если стандартная часть r существует, то r конечно.

Монады и топология. Предположим, что (X, T) топологическое пространство, где T обозначает совокупность всех открытых множеств. Если $x \in X$, то *монада* элемента x — это множество $\mu(x) = \bigcap_{x \in T \in T} {}^*T$. Для *внутреннего* подмножества $A \subset {}^*X$ определены стандартная часть и стандартная внутренность, соответственно

$$\text{st } A = \{y \in L \mid \mu(y) \cap A \neq \emptyset\}, \text{ si } A = \{y \in L \mid \mu(y) \subset A \neq \emptyset\}.$$

Известно, что $\text{st } A$ — замкнутое и $\text{si } A$ — открытое множества. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Тогда для $x \in {}^*X$ *метрическая монада* x — это множество $\mu_m(x) = \{y \in {}^*X \mid d(x, y) \approx 0\}$.

Теорема 11. Предположим (X, d) — метрическое пространство и $x \in X$. Тогда монада x совпадает с метрической монадой x .

Если $x, y \in {}^*X$ и y элемент (метрической) монады x , то пишут $x \approx y$ (читается как y бесконечно близок к x). Это определение согласуется с предыдущим обозначением, введенным для элементов ${}^*\mathbb{R}$. Обозначение $x \approx y$ используется и для произвольных топологических пространств, но только если $x \in X$; в таком случае $x \approx y \Leftrightarrow y \in \mu(x)$. Пример $\mathbb{R}$ показывает, что монады, вообще говоря, не являются внутренними множествами. Однако каждая монада содержит в себе некоторое внутреннее множество, подобное открытой окрестности точки. Более точно, истинна следующая теорема.

Теорема 12. Для каждого $x \in X$ существует внутреннее множество $D \in {}^*T$, такое, что $D \subseteq \mu(x)$.

Теорема 13. Множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $\mu(x) \subset {}^*A$ для каждого $x \in A$.

Теорема 14. Множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ условие $\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$ влечет $x \in A$.

Теорема 15. Множество $K \subset X$ компактно тогда и только тогда, когда для каждого $y \in {}^*K$ существует такой $x \in K$, что $y \in \mu(x)$.

Для топологического пространства X точка $y \in {}^*X$ называется *околостандартной*, если $y \approx x$ для некоторого $x \in X$; иначе y называется *отдаленной* точкой.

Теорема 16. Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждая точка $y \in {}^*X$ околостандартна.

Теорема 17. Пусть f отображение из топологического пространства X в топологическое пространство Y и предположим, что $x \in X$. Тогда f непрерывно в точке x тогда и только тогда, когда $x' \approx x \Rightarrow {}^*f(x') \approx f(x)$.

Последнее условие может быть записано в эквивалентном виде ${}^*f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Алиприантис К., Браун Д., Беркеншо О. (1995). Существование и оптимальность конкурентного равновесия. М.: Мир.
- Гильдебрант В. (1986). Ядро и равновесие в большой экономике. М.: Наука.

- Девис М. (1980). Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир.
- Маракулин В.М. (1988). Равновесие с нестандартными ценами и его свойства в математических моделях экономики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. Препринт № 18 (1988).
- Маракулин В.М. (2011). Контракты и доминирование в моделях конкурентной экономики // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 9. С. 10–32.
- Маракулин В.М. (2012). Абстрактный равновесный анализ математических моделей экономики. Новосибирск: Изд-во СО РАН.
- Маракулин В.М. (2014). О договорном подходе в моделях экономики типа Эрроу – Дебре – Маккензи // *Экономика и математические методы*. Т. 50. № 1. С. 61–79.
- Anderson R.M. (1992). Non-Standard Analysis with Applications to Economics. In: Hildenbrand W., Sonnenschein H. (eds.) “*Handbook of Mathematical Economics*”. Vol. IV. Amsterdam: North-Holland. P. 2145–2208.
- Aumann R.J. (1964). Markets with a Continuum of Traders // *Econometrica*. Vol. 32. No. 1–2. P. 39–50.
- Brown D.J., Robinson A. (1975). Nonstandard Exchange Economies // *Econometrica*. Vol. 43. P. 41–55.
- Debreu G., Scarf H.E. (1963). A Limit Theorem on the Core of an Economy // *International Economic Review*. Vol. 4. P. 235–246.
- Kononov A.V., Marakulin V.M. (2006). Equilibria without the Survival Assumption // *Journal of Mathematical Economics*. Vol. 42. P. 198–215.
- Loeb P.A. (2000). An Introduction to Non-Standard Analysis. In: Loeb P.A., Wolff M. (eds.) “*Nonstandard Analysis for the Working Mathematician*”. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Marakulin V.M. (2013). On the Edgeworth Conjecture for Production Economies with Public Goods: A Contract-Based Approach // *Journal of Mathematical Economics*. Vol. 49. No. 3. P. 189–200.
- Rashid S. (1987). Economies with Many Agents: an Approach Using Nonstandard Analysis. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Поступила в редакцию
29.03.2017 г.

REFERENCES (WITH ENGLISH TRANSLATION OR TRANSLITERATION)

- Aliprantis C.D., Brown D.J., Burkinshaw O. (1989). Existence and Optimality of Competitive Equilibria. Berlin, New York: Springer-Verlag.
- Anderson R.M. (1992). Non-Standard Analysis with Applications to Economics. In: Hildenbrand W., Sonnenschein H. (eds.). “*Handbook of Mathematical Economics*”. Vol. IV. Amsterdam: North-Holland, 2145–2208.
- Aumann R.J. (1964). Markets with a Continuum of Traders. *Econometrica*, 32, 1–2, 39–50.
- Brown D.J., Robinson A. (1975). Nonstandard Exchange Economies. *Econometrica*, 43, 41–55.
- Davis M. (1977). Applied Nonstandard Analysis. New York: Wiley.
- Debreu G., Scarf H.E. (1963). A Limit Theorem on the Core of an Economy. *International Economic Review*, 4, 235–246.
- Hildenbrand W. (1974). Core and Equilibria of a Large Economy. Princeton/New Jersey: Princeton University Press.
- Kononov A.V., Marakulin V.M. (2006). Equilibria without the Survival Assumption. *Journal of Mathematical Economics*, 42, 198–215.
- Loeb P.A. (2000). An Introduction to Non-Standard Analysis. In: Loeb P.A., Wolff M. (eds.) “*Nonstandard Analysis for the Working Mathematician*”. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Marakulin V.M. (1988). An Equilibrium with Nonstandard Prices and Its Properties in Mathematical Models of Economy. Preprint No. 18. Novosibirsk: IM SB of USSR Academy of Sciences (in Russian).
- Marakulin V.M. (2011). Contracts and Domination in Competitive Economies. *Journal of the New Economic Association*, 9, 10–32 (in Russian).
- Marakulin, V.M. (2012). An Abstract Equilibrium Analysis of Economic-Mathematical Models. Novosibirsk: SB Russian Academy of Science Publisher (in Russian).
- Marakulin V.M. (2013). On the Edgeworth Conjecture for Production Economies with Public Goods: A Contract-Based Approach. *Journal of Mathematical Economics*, 49, 3, 189–200.

Marakulin V.M. (2014). On Contractual Approach for Arrow – Debreu – McKenzie Economies. *Economics and Mathematical Methods*, 50 (1), 61–79 (in Russian).

Rashid S. (1987). *Economies with Many Agents: An Approach Using Nonstandard Analysis*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Received 29.03.2017

PERFECT COMPETITION WITHOUT SLATER CONDITION: THE EQUIVALENCE OF NON-STANDARD AND CONTRACTUAL APPROACH

V.M. Marakulin¹

Abstract. In the neoclassical Arrow–Debreu model under the conditions of perfect competition every allocation from the core allows price decentralization, i.e. it is an equilibrium allocation. Moreover, especially in the conditions, under which the core and equilibria coincide and are called perfect competition. However, in all the known models of perfect competition the theorem of the core coincidence and equilibria is proved exclusively under the survival assumption, which implies that Slater’s condition for consumer’s problem is fulfilled. How important is this additional requirement and what will happen if it is discarded? The paper is addressing this problem. The classical Debreu – Scarf approach is analyzed and is compared with the contractual model of perfect competition developed early by the author. It is shown that the most accurate model of this is provided by the contractual approach; namely, this is a concept of fuzzy contractual allocation which provides stability with respect to the signing of a new contract and an asymmetric partial break of already existing ones. Under weak assumptions, it is proved that these allocations coincide with those with nonstandard prices. In this case implemented allocations generally are different from the elements of the classical core in perfect competition conditions (Edgeworth equilibria). However, in the case when model assumptions (indecomposability) provide the survival assumption for non-standard equilibria, the contractual approach coincides with the classical one.

Keywords: equilibrium with random prices, survival assumption (Slater condition), perfect competition, fuzzy core, fuzzy contractual allocations, Edgeworth equilibria.

JEL Classification: C62, D51.

¹**Valeriy M. Marakulin** – Doctor Sc. (Physics & Maths.), Assistant professor, Institute of Mathematics named after Sobolev, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; marakulv@gmail.com.