

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Black F., Litterman R.** (1992). Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, 48, 5, 28–43.
- Bodie Z., Kane A., Marcus A.** (2014). Investments. N.Y.: McGraw Hill.
- Bradshaw M., College B., Huang A.** (2013). Analyst Target Price Optimism around the World. Midwest Finance Association 2013 Annual Meeting Paper. Available at: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2137291 (accessed: April 2017).
- Cvitanic J., Lazrak A., Martellini L., Zapatero F.** (2006). Dynamic Portfolio Choice with Parameter Uncertainty and the Economic Value of Analysts' Recommendations. *The Review of Financial Studies*, 19, 4, 1113–1156.
- Damodaran A.** (2016). Investment Valuation. M.: Alpina (in Russian).
- Fama E.** (1965). The Behavior of Stock Market Prices. *Journal of Business*, 38, 34–105.
- Katok A., Hasselblatt B.** (2005). A First Course in Dynamics. M.: MCCME (in Russian).
- Kurochkin S.V.** (2014). If the Go Away. What Will Be Russian Stock Market in the Absence of Foreign Investors? *Rynok tsennyh bumag*, 8, 57–59 (in Russian).
- Moscow Exchange (2014). MICEXINDEXCF index. Available at: <http://www.moex.com/ru/index/MICEXINDEXCF/constituents/> (accessed: April 2017, in Russian).
- RIA Novosti (2016). CB Sees a Potential Threat in Robo-Advisors Spreading. Available at: <http://ria.ru/economy/20160217/1375957204.html> (accessed: February 2017, in Russian).
- Sberbank (2017). Dividends. Official Site. Available at: <http://www.sberbank.com/ru/investor-relations/share-profile/dividends> (accessed: April 2017, in Russian).
- Standard and Poors (2017). S&P 500. Available at: <http://us.spindices.com/indices/equity/sp-500> (accessed: April 2017).
- Stowe J., Robinson T., Pinto J., McLeavy D.** (2002). Analysis of Equity Investments: Valuation. N.Y.: Wiley and Sons.
- Treynor J., Black F.** (1973). How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection. *Journal of Business*, 46, 1, 66–86.
- US Treasury (2017). Interest Rate Statistics. Available at: <https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/default.aspx> (accessed: April 2017).
- Wikipedia (2017). S&P 500 Index. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/S%26P_500_Index (accessed: April 2017).
- Zhongzhi H.** (2007). Incorporating Alpha Uncertainty into Portfolio Decisions: A Bayesian Revisit of the Treynor – Black Model. *Journal of Asset Management*, 8, 3, 161–175.

Received 15.02.2017

DYNAMIC FEATURES OF THE TREYNOR – BLACK MODEL

S.V. Kurochkin¹

Abstract. The Treynor – Black (TB) model seems to be the first active portfolio management model to give the direct answer to the problem of how a portfolio manager should incorporate analysts' estimates in her/his portfolio structure. Concerning the assets' returns probabilities distributions W. Sharpe Diagonal Model was taken here as an assumption. In this article I analyze the qualitative dynamics of the stock market under the dynamic version of the TB model, assuming all the investors apply the TB model to their portfolios. A similar assumption is made in CAPM, where market stability and pricing relations are deduced supposing all investors have equal access to information and use Modern Portfolio Theory in their portfolio decisions. I also show, how one should recalculate analysts' target prices to alphas in TB model. The study of the related dynamic system reveals that the TB model produces stable pricing only for the big companies: about 10% market capitalization and more. These findings are then compared to the empirical data on market/target (the latter according to analysts' consensus forecasts) prices for the Russian Blue Chips. It turns out that actual price dynamics usually shows steady gaps between target and market price while the model price should increasingly oscillate around the target. The likely interpretation is: the market does not trust analysts' forecasts.

Keywords: portfolio management, Treynor – Black model, dynamic system, stability.

JEL Classification: G11.

¹ **Sergey V. Kurochkin** – Cand. Sc. (Mathematics), Associate professor, Federal Research Centre “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Dorodnicyn Computing Centre, Russia, Senior researcher; National Research University – Higher School of Economics, Associate professor, Russia, Moscow; skurochkin@hse.ru, kuroch@ccas.ru.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ СВОЙСТВ ДИСКОНТИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ В СТАЦИОНАРНОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЭКОНОМИКАХ

© 2018 г. С.М. Курманова¹

Аннотация. Статья посвящена системному анализу методов дисконтирования в экономических и финансовых системах при различных макроэкономических окружениях. Даются соответствующие определения стационарности и нестационарности, впервые рассматриваются имманентные им свойства и соответствующие модели учета влияния фактора времени на финансовые потоки в стационарных и нестационарных условиях. Анализируются наиболее распространенные методы учета фактора времени по простым и сложным процентам, доказываются корректность сложного процентирувания и несоответствия метода простых процентов ряду необходимых свойств. Приводятся математические модели формализации свойств взвешивающих (дисконтирующих) функций. Доказываются теоремы об инвариантности, ранжировании стационарных финансовых систем относительно временной базы приведения операций дисконтирования. Формулируется ряд утверждений (теорем)? полезных для анализа динамики распределенных во времени финансовых потоков и используемых при оценке сравнительной эффективности альтернативных инвестиционных проектов с различной имманентной им динамикой финансовых потоков.

Ключевые слова: стационарная и нестационарная экономики, финансовые системы, фактор времени, взвешивающая функция, дисконтирующая функция.

Классификация JEL: C02, G02, G11, G17.

ВВЕДЕНИЕ

При решении многих научных и практических экономических задач (оценке эффективности инвестиционных проектов, оценке стоимости фирм и другого имущества, выборе оптимальных сроков службы оборудования, жизненного цикла проектов и др.) возникает необходимость определять интегральную (суммарную) экономическую ценность различных активов, для которых характерны связанные с ними распределенные во времени (иногда довольно значительном) финансовые потоки (притоки и оттоки). При этом существует ряд подлежащих учету особенностей, в том числе как непосредственно связанных с самим оцениваемым активом (предприятием, проектом, процессом и др.), так и с макро-, мезо- и микроэкономическим окружением, его характером (является ли оно статическим/динамическим, стационарным/нестационарным и т.д.). В настоящей статье аспекту нестационарности будет уделено дополнительное внимание (в рамках основного сюжета – системного анализа содержания, моделей и методов дисконтирования) в силу его малой изученности.

Исходной базой анализа выберем установленные в экономической теории основные законы и положения, в частности изложенные в учебниках по курсу “Economics” (Самуэльсон, 2002; Самуэльсон, Нордхаус, 1997) и публикациях на эту тему (Лившиц, Лившиц, 2010; Лившиц, 2013). Так, согласно учебнику П. Самуэльсона основными задачами экономической рыночной деятельности фирм является установление на основе ее конъюнктурных законов (прежде всего спроса и предложения) рациональных ответов на вопросы “Что производить?”, “Как производить?”, “Для кого производить?”. При этом деятельность должна происходить без нарушения фундаментальных законов системы, к числу которых надо отнести:

1) ресурсы, которыми обладают принимающие и реализующие экономические решения субъекты (лица, менеджеры, госструктуры и др.), всегда ограничены;

¹ Сатаней Муаедовна Курманова – аспирант, Институт системного анализа ФИЦ ИУ РАН; Москва, satanei8989@mail.ru.

2) потребности экономических субъектов в ресурсах неограниченны.

Решения подготавливаются в зависимости от ситуации и особенностей экономического окружения на основе доступной системной информации, рациональных и иррациональных соображений при ее обработке. В рамках возможных классификаций макроэкономических окружений отметим следующие два.

1. Стационарная экономика, под которой согласно (Лившиц, Лившиц, 2010, с. 92) “будет пониматься далее хозяйственная система, имманентная функционирующим в некризисном периоде благополучным промышленно-развитым странам, важнейшие макроэкономические параметры и показатели деятельности которых остаются неизменными или относительно плавно меняются. Меняются либо монотонно, либо в рамках нормальных рыночных циклов, и динамика значений которых, находясь в определенных устойчивых границах, достаточно хорошо предсказуема, по крайней мере в краткосрочной, а нередко и среднесрочной перспективе”. Иными словами, имеется в виду некоторый эволюционный процесс, развитие которого происходит под влиянием либо рационального (полностью или частично – слабо рационального по Г. Саймону (Ньюэлл, Шоу, Саймон, 1964) несклонного к риску поведения соответствующего участника рынка или жестко управляемой хозяйственной системы), либо на основе относительно плавных естественных эволюционных закономерностей. Можно трактовать стационарность экономики и несколько иначе – по П. Самуэльсону (Самуэльсон, Нордхаус, 1997, с. 93; Самуэльсон, 2002, с. 316): “...термин “стационарный” является описательным и характеризует поведение экономической переменной во времени; обычно он подразумевает ее постоянство, но иногда его обобщают, чтобы включить периодически повторяющееся поведение”. При этом в (Лившиц, Лившиц, 2010; Лившиц, 2013) стационарность нередко понимается как синтез всех приведенных определений, включая статическое или динамическое устойчивое равновесие, обладающее относительно хорошими (в смысле постоянства, повторяемости или плавности динамики) возможностями успешного использования прогнозных механизмов и процедур. Полезно различать стационарные в широком смысле системы и элементы, в которых изменение потоков носит однофакторный характер, т.е. при переходе от одного момента времени к другому поток полностью и исключительно характеризуется значением сдвига во времени, и стационарные в узком смысле¹ системы и элементы, изменение потоков которых определяется не только величиной временного сдвига, но и рядом других факторов.

2. Нестационарная экономика допускает довольно разные, в том числе и весьма немонотонные и негладкие, динамики компонентов финансовых элементов и систем, весьма трудно прогнозируемых.

1. СТАЦИОНАРНЫЕ ФИНАНСОВЫЕ СИСТЕМЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Под финансовой системой будем понимать упорядоченную последовательность простейших финансовых элементов. Простейший финансовый элемент – это двумерный вектор, первым компонентом которого является *время поступления финансового потока* (притока или оттока), а вторым – *итоговая величина денежного поступления* в указанный момент времени, задаваемый на дискретной или непрерывной шкале времени в пределах от нуля до окончания рассматриваемого расчетного периода в рамках стационарного экономического окружения. Таким образом, финансовые системы моделируются с помощью моделей финансовых потоков, которые могут различаться как структурами простейших финансовых элементов, так и их расположением на временной оси и, соответственно, величинами их денежных компонентов по каждой из рассматриваемых валют. Соответственно, финансовые системы в зависимости от валюты простейших финансовых элементов могут быть одновалютные и мультивалютные.

Финансовую систему будем считать стационарной, если последовательность величин потоков по каждой валюте имеет стационарный характер, в смысле данных выше определений, в том числе и в частном случае, когда изменений во времени нет.

¹ Данное определение вводится нами по аналогии с определением видов стационарности в работах по теории вероятностей и случайным процессам, например в (Прохоров, Розанов, 1973).

Фундаментальным законом теории финансов является денежная неравноценность несинхронных финансовых потоков даже в случае равенства их структуры и номинальных величин. Причем более ранние потоки имеют относительно большую ценность, так как: 1) происходит падение ценности денег в любой валюте из-за инфляции, которая по каждой валюте в разных странах может не совпадать; 2) существует возможность эффективного использования денежных средств и наличие такого феномена, как упущенная выгода (по терминологии Всемирного банка – *sunk cost*).

Взвешивающая функция (ВФ) – функция, умножение на которую придает при расчетах интегральной ценности распределенного во времени финансового потока определенные веса каждому элементу из некоторого их относительно однородного, но в чем-то неравноправного, множества. После умножения на ВФ эти элементы обычно уже можно суммировать, причем их взвешенная сумма характеризует интегральную (целостную) величину исходного множества элементов с учетом приданных им весов.

Дисконтирующая² функция (ДФ)³ – взвешивающая функция, элементы которой могут служить временными весами, учитывающими неравнозначность ценности денежных потоков во времени, и, как следствие, необходимость при сравнительном анализе ценности или суммировании этих разновременных потоков для оценки эффективности отдельные элементы потоков предварительно взвешивать по ДФ.

По некоторым сведениям, методы дисконтирования даже по типу сложного процента применялись еще в 1800–1600 гг. до н.э. в Месопотамии (Ендовицкий, 2001, с. 34). Исторические сведения о происхождении и распространении практики дисконтирования применительно к векселям содержатся в статье (Батурина, 2009)⁴: “Очевидно, на распространение практики дисконтирования векселей повлияло возникновение индоссамент, когда за досрочную уплату вексельной суммы взимался определенный процент. Начало этой практики, по мнению Л.Н. Ниселовича, было положено еще на ярмарках, а индоссамент способствовал ее распространению. Продолжительное время было распространено мнение, что первые формы дисконтирования векселей возникли в Англии в XVII в. В частности, Дж. Клэпхем отмечал, что хотя использование дисконта, в широком значении этого понятия, началось довольно давно, объединение в одних руках операций покупки векселя со скидкой, переписывания с одного счета на другой, а также операций с банковскими чеками, которыми можно было расплачиваться с кем угодно, возникло в Англии в 1630–1670 гг. Однако Х. Ван дер Вее в своих исследованиях показал, что дисконтирование векселей начало использоваться на денежных рынках Антверпена, где происходило не только усовершенствование техники индоссамент, но и становление методов дисконтирования. Так, в бухгалтерских книгах английского торговца тканями Китсона зафиксирован случай, когда в 1536 г. на одной из ярмарок в Антверпене его агенту потребовались наличные, для чего он продал третьему лицу долговую расписку на предъявителя (срок уплаты долга по которой еще не настал) за сумму, ниже номинальной стоимости. Эту операцию вполне можно считать одним из первых фактов дисконтирования. Но счета с антверпенских ярмарок свидетельствуют о том, что дисконтирование в то время все же использовалось довольно редко, а агент Китсона сохранял все другие долговые расписки и векселя до наступления срока их уплаты. <...>

После учреждения в 1531 г. специальной биржи важное значение приобретает особая группа финансистов, предметом торговли которых стали деньги. Это были так называемые кассиры, принимавшие деньги при осуществлении платежей на бирже, а потом осуществлявшие платежи от имени третьих лиц, отсутствовавших на данный момент в городе. <...> Истоками дисконтирования можно считать ситуации, когда при недостатке наличных средств кассиры целеустремленно и систематически скупали со скидкой ценные бумаги до наступления срока платежа по ним. О его распространении свидетельствуют примеры дисконта долговых расписок,

² Термин происходит от латинского корня *discount* (скидка).

³ Системному анализу динамики финансовых потоков, включая математическую теорию их дисконтирования, посвящен ряд работ, включая фундаментальные монографии (Смоляк, 2002, 2006; Жевняк, 2010). Содержащиеся в них идеи по дисконтированию финансовых потоков, учета риска и неопределенности и т.д. требуют, по нашему мнению, специального самостоятельного рассмотрения.

⁴ А также на сайте mybusinesshelper.ru.

приведенные в учебниках Менхера “*Практическое пособие по расчетам и ведению бухгалтерских книг*”, изданном в Антверпене около 1560 г., и Меллемы “*Арифметика*”, опубликованном в 1582 г.” Впрочем, есть мнение⁵, что “понятие “дисконтирование” (от итал. *sconto*) появилось в конце XIII в. в Италии (по мнению Дж. Кэпхема, даже в XII в.), однако оно тогда еще не приобрело того значения, в котором употребляется сегодня, и не использовалось для вексельных операций. Первые упоминания о скидках, предоставлявшихся при досрочной уплате денег в торговых операциях, действительно датируются концом XIII в. Они содержатся в бухгалтерских книгах компании Толомеи из Сиены. Распространение этой практики относится к началу XIV в., о чем свидетельствуют записи в бухгалтерских книгах компании Франческо дель Бене, а также семьи Медичи”.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ ФИНАНСОВЫЕ СИСТЕМЫ И ПОТОКИ. ВАЖНЕЙШИЕ ИХ СВОЙСТВА

К важнейшим свойствам стационарных финансовых систем, по нашему мнению, следует отнести следующие.

1. *Измеримость*. Каждый отдельный элемент и система в целом допускают достаточно строгое количественное описание структуры и величины в отдельности (в том числе по каждому виду валюты), а также системно, т.е. в целом.

2. *Аддитивность*. Суммарная (интегральная) оценка, или ценность финансовой системы, в целом равна сумме денежных оценок всех ее элементов, причем сумма рассчитывается не номинальная, а дисконтированная, с учетом фундаментального закона, т.е. с учетом экономической неравноценности несинхронных денежных потоков. Приведение разновременных потоков к виду, сопоставимому по ценности и, следовательно, допускающему для определения интегральной оценки алгебраическое суммирование, удобно производить по алгоритму: сначала из содержательных соображений (или соображений удобства проведения расчетов) выбирается некоторая временная база, т.е. некоторый конкретный год в пределах рассматриваемого временного периода (часто нулевой или последний), и к этому году дисконтируются, а затем алгебраически складываются все имманентные потоковым элементам стоимостные величины.

3. *Сравнимость*. Различные финансовые системы A и B допускают однозначную системную (интегральную) сравнительную экономическую оценку (ценность): либо $O_A < O_B$, либо $O_A > O_B$, либо $O_A = O_B$.

4. *Определенность*. Однозначность величин интегральной экономической оценки финансовой системы, которые идентифицируются как дисконтированная сумма экономических оценок всех простейших финансовых элементов рассматриваемой финансовой системы. Дисконтирование понимается как процедура введения финансовой скидки, т.е. уменьшения номинальной величины эквивалентного по ценности стоимостного потока по мере уменьшения значения временного компонента.

5. *Непрерывность* значения интегральной ценности простейшего финансового элемента по обоим его компонентам. Ценность нулевого потока и финансовой системы со всеми нулями равна нулю.

6. *Потенциальная эквивалентность по интегральной ценности* различных несинхронных простейших финансовых элементов. Это означает, что для любого значения определяющего его двумерного вектора $(t, \theta(t))$ при изменении величины первого временного компонента t , скажем, до t_1 существует и может быть найдена такая величина стоимостного потока $\theta(t_1)$, что простейший элемент с вектором $(t_1, \theta(t_1))$ будет иметь ту же интегральную ценность, что и исходный элемент $(t, \theta(t))$.

7. *Полная линейная упорядоченность* — ранжированность по интегральной ценности любого конечного множества финансовых систем.

⁵ См. <http://mybusinesshelper.ru/stati-publikacii/proisxozhdenie-diskontirovaniya-vekselej>.

Различные типы взвешивающих функций могут классифицироваться по разным признакам, например по числу шагов.

Под взвешивающей – одношаговой $Q(t_1, t_2)$ или многошаговой $Q(t_1, \dots, t_n)$ – функцией будем понимать такую математическую конструкцию, умножение на которую приводит финансовый поток, осуществляемый в момент времени t_1 , к эквивалентному по ценности стоимостному потоку, осуществляемому в момент t_2 при одношаговом процессе или в момент t_n при многошаговом.

Типовые модели взвешивающих функций (ВФ). Нередко модели ВФ формируются на процентной основе. Рассмотрим различные часто применяемые случаи.

Случай 1. Простые проценты, стационарная в широком смысле экономика. Типовая модель ВФ $Q(t, t_\delta)$ (t – текущее время, t_δ – временная база приведения или дисконтирования) зависит от одного параметра – временного сдвига, т.е.

$$Q(t, t_\delta) = \begin{cases} 1 / (1 + E(t - t_\delta)) & \text{при } t \geq t_\delta; \\ 1 + E(t_\delta - t) & \text{при } t < t_\delta. \end{cases}$$

Такое представление взвешивающей функции по простым процентам обычно используется при моделировании в экономиках стационарных в широком смысле и на короткий срок, т.е. при малых значениях величины $\Delta t = |t - t_\delta|$ (обычно не больше 1 года), хотя иногда применяется и при значительно большей величине. В приведенной формуле предполагается *одношаговость* дисконтирования (взвешивания), хотя бывает и *многошаговость* вида

$$Q(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} (1 + E(t_2 - t_1)) \dots (1 + E(t_n - t_{n-1})) & \text{при } t_1 \leq t_n; \\ (1 + E(t_2 - t_1))^{-1} \dots (1 + E(t_n - t_{n-1}))^{-1} & \text{при } t_1 > t_n, \end{cases}$$

при этом $Q(t_1, t_2) \geq 0, \dots, Q(t_1, \dots, t_n) \geq 0$.

Величина E обычно называется **нормой**, или **ставкой эффективности** или **дисконтирования**, и представляет альтернативную стоимость денег, или максимальную упущенную выгоду по капиталу за 1 год.

Случай 2. Сложные проценты, стационарная экономика (экспоненциальный рост взвешивающей функции, сложное процентирование):

$$Q(t, t_\delta) = (1 + E)^{t_\delta - t} = e^{-E_1(t_\delta - t)}, \quad E_1 = \ln(1 + E).$$

Случай 3. Сложные проценты, нестационарная экономика (переменная ставка дисконта и длина шага, мультипликативная взвешивающая функция):

$$Q(t, 0) = \frac{1}{(1 + E_1)^{\Delta_1} \dots (1 + E_t)^{\Delta_t}} = \prod_{s=1}^{s=t} (1 + E_s)^{-\Delta_s},$$

где E_s – среднегодовая ставка дисконтирования для шага s в нестационарных условиях; Δ_s – продолжительность шага s в годах.

Теперь можно, следуя принятой в (Лившиц, 1984) схеме анализа, кратко сформулировать ряд свойств, которыми должна обладать взвешивающая функция.

Свойство I. В общем (включая нестационарный) случае взвешивающая функция для приведения стоимостного потока в момент времени t_2 к виду, сопоставимому и, следовательно, суммируемому с величинами в момент времени t_1 , должна быть функцией двух аргументов, т.е. $Q(t_2, t_1)$.

Свойство II. $Q(t_2, t_1) > 0$, причем

$$Q(t_2, t_1) = \begin{cases} < 1 & \text{при } t_2 > t_1; \\ > 1 & \text{при } t_2 < t_1; \\ \rightarrow 0 & \text{при } t_2 - t_1 \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Свойство III. $\int_0^\infty Q(t_2, t_1) dt_2 < \infty$.

В работе (Лившиц, 1984) показано, что содержательно свойство III означает, что в ранний момент времени (например, при $t=0$) нецелесообразно тратить определенную сумму денег, если потом ежегодная величина прибыли будет относительно малой, сколь бы долго это получение прибыли ни длилось (даже бесконечно долго).

Кроме того, желательно, чтобы ВФ обладала еще и свойством IV.

Свойство IV. $\forall t_3 \quad Q(t_2, t_1) = Q(t_2, t_3) Q(t_3, t_1)$. (1)

Наиболее интересным из указанных свойств является последнее. Смысл его в том, что ВФ должна обладать полугрупповым свойством по умножению, обеспечивающим независимость результата оптимизации от базы приведения. С этим условием можно столкнуться и в теории индексов⁶. Именно ему и не удовлетворял метод расчета по простым процентам.

Из (1) нетрудно вывести также ряд полезных, хотя и очевидных следствий:

а) $Q(t_2, t_2) = 1$ – собственный коэффициент приведения равен 1;

б) $Q(t_2, t_1) Q(t_1, t_2) = 1$ – взаимные коэффициенты приведения обратны;

в) только в случае если ВФ показательная, она может быть представлена как функция лишь одной переменной – величины сдвига по времени $t = t_2 - t_1$. (Действительно, среди обычных (необобщенных) функций только $Q(t_2, t_1) = e^{-\alpha(t_2 - t_1)}$ при $\alpha > 0$ удовлетворяет свойствам I – IV; любая же другая функция не годится. В частности, подходят и сложные проценты как частный случай показательной функции ($\alpha = \ln(1 + E)$);

г) всегда возможно представление ВФ в виде $Q(t_2, t_1) = Q(t_2, t_6) / Q(t_1, t_6)$, где t_6 – базовый момент. В частности, если за базовый момент принять $t_6 = 0$, то $Q(t_2, t_1) = Q(t_2, 0) / Q(t_1, 0)$.

Если в этом случае за функцию приведения к нулю принять любую неотрицательную монотонно убывающую интегрируемую функцию $\phi(t)$, равную 1 при $t = 0$, то $Q(t_2, t_1) = \phi(t_2) / \phi(t_1)$ будет удовлетворять свойствам I – IV. В частности, можно построить и правильный в этом смысле аналог метода простых процентов, приняв, например:

$$\phi(t) = \begin{cases} (1 + Et)^{-1} & \text{при } t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T, \end{cases}$$

тогда для $0 \leq t_2 \leq T$ имеем

$$Q(t_2, t_1) = (1 + Et_1) / (1 + Et_2). \quad (2)$$

Действительно, если (2) выполняется, то функция удовлетворяет свойствам I – IV.

Следуя (Лившиц, 1984), рассмотрим связь между ВФ и нормой эффективности использования каждой единицы вложений. При непрерывном времени для стационарных цен, пропорциональных оценкам оптимального плана, определяемым согласно (Канторович, 1959), относительная значимость рубля вложений при переходе от момента t к $t + dt$ изменяется на величину

⁶ Согласно (Ершов, 2011, с. 12): “В 1890 году Вестергаард (Westergaard) предложил требовать от индексов цен IP выполнения так называемого “теста круговой сходимости” (circular test), или “теста циркулярности”: ... $IP(0; 1)IP(1; 2) = IP(0; 2)$...”. Там же, на с. 296, приведена аксиома транзитивности (циркулярности): $IP(p^0, q^0; p^1, q^1) \times IP(p^1, q^1; p^2, q^2) \times IP(p^2, q^2; p^0, q^0)$, – в которой фигурирует три периода (0, 1, 2) и индекс цен.

$-E_t dt$ (E_t – соответствующая норма эффективности). Также это изменение равно $[Q(t+dt, t_6) - Q(t, t_6)] / Q(t+dt, t_6)$. Следовательно, при $t_6=0$ получаем⁷

$$E_t = -\frac{Q(t+dt, 0) - Q(t, 0)}{Q(t+dt, 0)dt} = -\frac{d}{dt}[\ln \phi(t)], \text{ или } \phi(t) = \exp\left\{-\int_0^t E_k dk\right\}. \quad (3)$$

Иными словами, норма эффективности есть логарифмическая производная от взвешивающей функции и она не зависит от базы приведения. Нетрудно убедиться, что, согласно (3), E_t постоянно (процесс развития в этом смысле стационарен) лишь в том случае, когда ВФ показательная и зависит, таким образом, лишь от одного временного аргумента – разности $t_2 - t_1$.

Так как t может изменяться непрерывно ($0 \leq t \leq t_n$) или дискретно (например, с шагом в 1 год), то величина ставки, или нормы эффективности, в момент времени t равна:

- в дискретном случае $E_t = -(Q(t, t_\delta) - Q(t-1, t_\delta)) / Q(t, t_\delta)$, где t_δ – база приведения;
- в непрерывном случае предполагается дифференцируемость ВФ и непрерывное изменение времени на малую величину dt :

$$E_t = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{Q(t+dt, t_\delta) - Q(t-1, t_\delta)}{Q(t+dt, t_\delta)dt} = -\frac{d}{dt} \ln \phi(t).$$

Проанализируем с помощью вышеприведенных соотношений метод простых процентов для выяснения характера изменения при этом нормы эффективности.

Пусть $t_6 = 0$, тогда

$$\phi(t) = (1 + Et)^{-1}, \quad E_t = -\frac{d}{dt}[\ln(1 + Et)^{-1}] = \frac{E}{1 + Et}.$$

Таким образом, для простых процентов характерно непрерывное падение по гиперболической зависимости нормы эффективности использования вложений. Такого рода взвешивающие функции более или менее правдоподобно описывают процессы расширенного воспроизводства при отсутствии технического прогресса. В реальных же условиях, когда появляются все новые и новые способы эффективного использования ресурсов, $E(t)$ будут выше.

Если время t принимает лишь дискретные значения (например, по годам $t = 1, 2, \dots$), то аналогично норма эффективности в году t

$$E_t = -(Q(t + t_6) - Q(t - 1, t_6)) / Q(t, t_6), \quad \phi(t) = \prod_{v=1}^{v=t} (1 + E_v)^{-1}.$$

А обратная величина равна $Q(0, t) = \prod_{v=1}^{v=t} (1 + E_v)$.

Можно достаточно элементарно доказать, что в итоге имеют место следующие утверждения (часто полезные для анализа динамики активов распределенных во времени финансовых систем).

Теорема 1. Ранжирование по интегральной ценности множества стационарных в узком смысле стационарных финансовых систем инвариантно относительно принятой временной базы приведения несинхронных стоимостных элементов.

Доказательство. Пусть есть две финансовые системы A и B , стационарные в узком смысле, т.е. со взвешивающими функциями:

- 1) удовлетворяющими свойствам I – IV;

⁷ Формула впервые выведена в (Пугачев, 1968).

2) при $t_6 = \tau$ соответственно $NPV_A(\tau) > NPV_B(\tau)$ ⁸, т.е. система A более эффективна, чем B . Нетрудно убедиться, что если изменить базу, т.е., например, принять $t_6 = \theta \neq \tau$, то ранжирование систем по эффективности сохранится. Действительно, если финансовые потоки соответственно равны $\Phi_A(t)$ и $\Phi_B(t)$, то при $t_6 = \theta$ в силу свойства IV:

$$NPV_A(\theta) = \sum_{t=0}^{t=T} \Phi_A(t)Q(t, \theta) = \sum_{t=0}^{t=T} \Phi_A(t)Q(t, \tau)Q(\tau, \theta);$$

$$NPV_B(\theta) = \sum_{t=0}^{t=T} \Phi_B(t)Q(t, \theta) = \sum_{t=0}^{t=T} \Phi_B(t)Q(t, \tau)Q(\tau, \theta),$$

где T — длина периода времени.

Вычитаем из первого второе, чтобы проверить, что ранжирование сохранилось:

$$NPV_A(\theta) - NPV_B(\theta) = \sum_{t=0}^{t=T} Q(\tau, \theta)[\Phi_A(t)Q(t, \tau) - \Phi_B(t)Q(t, \tau)] =$$

$$= \sum_{t=0}^{t=T} Q(\tau, \theta)[NPV_A(\tau) - NPV_B(\tau)].$$

Так как оба множителя положительны ($Q(\tau, \theta) > 0$ в силу свойства II, $[NPV_A(\tau) - NPV_B(\tau)] > 0$ в силу предположения из пункта 2, то величина $NPV_A(\theta) - NPV_B(\theta)$ также положительна, т.е. $NPV_A(\theta) > NPV_B(\theta)$. ■

Также нетрудно доказать теоремы 2–4 (теоремы 3–4 доказаны в (Виленский, Лившиц, Смоляк, 2015)).

Теорема 2. При использовании для дисконтирования несинхронных стоимостных потоков производственных функций, адекватных многошаговым процессам в стационарных в широком смысле финансовых системах, итоговое ранжирование альтернативных вариантов по их интегральной ценности может оказаться зависящим от числа шагов, базы приведения и других факторов.

Теорема 3. Использование допущения о стационарности в широком смысле и соответствующих производственных функций корректно не всегда, а только тогда когда при адекватном моделировании производственная функция описывается дисконтирующей экспоненциальной зависимостью или, что эквивалентно, фактор времени учитывается по формуле сложных процентов.

Теорема 4. В нестационарной экономике при единичной продолжительности финансовых шагов взвешивающая функция должна удовлетворять свойствам I–IV, причем при $t_6 = 0$ целесообразно мультипликативное представление:

$$Q(t, 0) = \frac{1}{(1 + E_1) \dots (1 + E_t)}, \quad Q(t, 0) = \prod_{i=1}^{i=t} (1 + E_i)^{-1},$$

где E_i — ставка дисконтирования в момент времени t

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Батурина Н.А. (2009). Исторические аспекты возникновения ставки дисконтирования // *Справочник экономиста*. № 9. С. 127–136.
- Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. (2015). Оценка эффективности инвестиционных проектов: Теория и практика. М.: ПолиПринтСервис.

⁸ NPV — аббревиатура стандартного показателя интегрального эффекта Net Present Value, или ЧДД — чистый дисконтированный доход.

- Ендовицкий Д.А.** (2001). Комплексный анализ и контроль инвестиционной деятельности. М.: Финансы и статистика.
- Ершов Э.Б.** (2011). Ситуационная теория индексов цен и количеств. М.: РНОР.
- Жевняк А.В.** (2010). Математическая теория дисконтирования денежных потоков. Математическая теория кредита. Рязань: Ринфо.
- Канторович Л.В.** (1959). Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР.
- Лившиц В.Н.** (1984). Оптимизация при перспективном планировании и проектировании. М.: Экономика.
- Лившиц В.Н.** (2013). Системный анализ нестационарной экономики России (1992–2013). М.: ЛЕНАНД.
- Лившиц В.Н., Лившиц С.В.** (2010). Системный анализ нестационарной экономики России (1992–2009): рыночные реформы, кризис, инвестиционная политика. М.: ПолиПринтСервис.
- Ньюэлл А., Шоу Дж., Саймон Г.** (1964). Разновидности интеллектуального обучения “вычислителя для решения задач общего типа”. В кн.: “*Самообучающиеся системы*”. М.: Мир.
- Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.** (1973). Теория вероятностей. М.: Наука, Физматлит.
- Пугачев В.Ф.** (1968). Оптимизация планирования (теоретические проблемы). М.: Экономика.
- Самуэльсон П.А.** (2002). Основания экономического анализа. СПб.: Экономическая школа.
- Самуэльсон П.А., Нордхаус В.Д.** (1997). Экономика. М.: Бином-Кио-Рус.
- Смоляк С.А.** (2002). Оценка эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности (теория ожидаемого эффекта). М.: Наука.
- Смоляк С.А.** (2006). Дисконтирование денежных потоков в задачах оценки эффективности инвестиционных проектов и стоимости имущества. М.: Наука.

Поступила в редакцию
11.03.2017 г.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Baturina N.A.** (2009). Historical Aspects of the Discount Rate Genesis. *Economist's guide*, 9, 127–136 (in Russian).
- Endovitsliy D.A.** (2001). Complex Analysis and Control of Investment Activities. Moscow: Finansy i statistika (in Russian).
- Ershov E.B.** (2011). Situational Theory of Price Index and Quantity. Moscow: RNOR (in Russian).
- Kantorovich L.V.** (1959). Economic Calculation of the Best Use of Resources. Moscow: AS USSR edition (in Russian).
- Livchits V.N.** (1984). Optimization in Planning and Design. Moscow: Ekonomika (in Russian).
- Livchits V.N.** (2013). System Analysis of the Non-Stationary Economy of Russia (1992–2013). Moscow: LENAND (in Russian).
- Livchits V.N., Livchits S.V.** (2010). System Analysis of the Non-Stationary Economy of Russia (1992–2009): Market Reforms, Crisis, Investment Policy. Moscow: PoliPrintServis (in Russian).
- Newell A., Shaw J.C., Simon H.A.** (1964). A Variety of Intelligent Learning in a General Problem Solver. In: “*Self-Organizing Systems*”. Moscow: Mir (in Russian).
- Prokhorov Y.V., Rosanov Y.A.** (1973). Calculus of Probabilities. Moscow: Nauka, Fizmatlit (in Russian).
- Pugachev V.F.** (1968). Optimization of Planning (Theoretical Problems). Moscow: Ekonomika (in Russian).
- Samuelson P.A., Nordhaus W.D.** (1997). Economics. Moscow: Binom-Kio-Rus (in Russian).
- Samuelson Paul A.** (2002). Foundations of Economic Analysis. St. Petersburg: Economic School (in Russian).
- Smolyak S.A.** (2002). Evaluation of the Investment Projects Effectiveness under Risk and Uncertainty (the Theory of the Expected Effect). Moscow: Nauka (in Russian).
- Smolyak S.A.** (2006). Discounting Cash Flows in the Tasks of Evaluation of the Investment Projects Effectiveness and the Value of the Property. Moscow: Nauka.

Vilenskiy P.L., Livchits V.N., Smolyak S.A. (2015). Evaluation of the Investment Projects Effectiveness: Theory and Practice: Work book. M.: PoliPrintServis (in Russian).

Zhevnyak A.V. (2010). Mathematical Theory of Discounting Cash Flows. Mathematical Theory of Credit. Ryazan': Rinfo (in Russian).

Received 11.03.2017

SYSTEM ANALYSIS OF DISCOUNTING FUNCTION PROPERTIES IN STATIONARY AND NON-STATIONARY ECONOMIES

S.M. Kurmanova¹

Abstract. The article is devoted to the system analysis of discounting methods in economic and financial systems under various macroeconomic environments. Appropriate definitions of stationarity and non-stationarity are given. For the first time the immanent properties and corresponding models of the time factor influence on financial flows in stationary and non-stationary conditions are considered. The most common methods of time factor accounting for simple and complex percentages are analyzed; the correctness of the compound interest and the mismatch of the simple percentage method to a number of specified required properties is proved. Mathematical formalization models of the indicated properties of weighting (discounting) functions are given. Theorems on the invariance, ranking of stationary financial systems on a discounting time base are proved. A number of statements (theorems) are developed; they are useful for analyzing the dynamics of financial flows distributed over time and may be used in assessing the comparative effectiveness of alternative investment projects with different immanent dynamics of financial flows.

Keywords: stationary and non-stationary economies, financial systems, time factor, weighting function, discounting function.

JEL Classification: C02, G02, G11, G17.

¹Sataney M. Kurmanova – post-graduate student, Federal Research Center “Computer science and Control” of RAS, Institute of System Analysis; Russia, Moscow, satanei8989@mail.ru.