

ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МАТРИЦ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

© 2018 г. В.А. Балябин^I, А.А. Заславский^{II}

Аннотация. В традиционных постановках задач обработки парных сравнений ищется транзитивная матрица, ближайшая к данной. Однако требование транзитивности итоговой матрицы при анализе парных сравнений с ничьими представляется слишком сильным. В предыдущих работах авторов было предложено использовать вместо транзитивности более слабое условие правильности итоговой матрицы. Следует отметить, что, в отличие от задачи построения транзитивной матрицы, для задачи, рассмотренной в статье, отсутствуют теоретические результаты, на основании которых можно было бы разработать достаточно эффективные методы ее решения. Поэтому представляет интерес экспериментальное исследование эвристических алгоритмов ее решения. В работе предлагается несколько таких алгоритмов, основанных на введенной авторами количественной оценке неправильности матрицы и описываются результаты вычислительных экспериментов по исследованию их эффективности. Наилучший из предложенных алгоритмов позволяет решать задачу для матриц порядка 1000×1000 за 3 минуты, а значит, может эффективно применяться в задачах анализа парных сравнений.

Ключевые слова: парные сравнения, транзитивность, правильность, матрица расстояний.

Классификация JEL: C02.

1. ВВЕДЕНИЕ

Парные сравнения (Дэвид, 1978, с. 8) являются одним из видов экспертных оценок, и применялись они раньше остальных видов оценок. Поэтому в настоящее время разработано множество алгоритмов анализа парных сравнений (Пригарина, Чеботарев, 1989, с. 18), в том числе статистические методики, процедуры, использующие различные меры близости, подходы теории группового выбора и т.д.

Будем рассматривать парные сравнения n объектов с ничьими: эксперту предъявляются все пары объектов, он их попарно сравнивает и сообщает, какой из двух объектов предпочтительнее, или объявляет их равноценными. Результаты сравнений будем записывать в матрицу X (без диагональных элементов). Если эксперт предпочел объект i объекту j , то $x_{ij} = 1$ и $x_{ji} = 0$, а если объекты равноценны, то $x_{ij} = x_{ji} = 1/2$ ¹. Таким образом, для любых различных i и j имеем $x_{ij} + x_{ji} = 1$. Для каждого объекта найдем сумму набранных им очков: $s_i = \sum_{j=i} x_{ij}$. Будем считать объекты упорядоченными по возрастанию этих сумм, т.е. $s_1 \leq \dots \leq s_n$.

Вообще говоря, ответы эксперта могут содержать противоречия, т.е. для некоторых объектов $i_1, \dots, i_m$ может оказаться, что $x_{i_1 i_2} \geq 1/2, x_{i_2 i_3} \geq 1/2, \dots, x_{i_{m-1} i_m} \geq 1/2, x_{i_m i_1} \geq 1/2$, причем среди этих неравенств есть строгие. Можно показать (Заславский, Френкин, 2009, с. 8), что в матрице X обязательно найдется подматрица 3×3 одного из видов:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} - & 1 & 0 \\ 0 & - & 1 \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1/2 \\ 0 & - & 1 \\ 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

^I Виктор Андреевич Балябин – магистр, МЭИ, Москва; viktorbalyabin@mail.ru.

^{II} Алексей Александрович Заславский – к.т.н., с.н.с. ЦЭМИ РАН, Москва; zasl@cemi.rssi.ru.

¹ Можно рассмотреть более общую постановку, когда эксперт оценивает степень предпочтительности, т.е. величины x_{ij} могут принимать произвольные значения между 0 и 1, но в данной работе мы этого делать не будем.

Если X не содержит таких подматриц, то объекты можно разбить на несколько классов, причем эксперт объекты из одного класса считает равноценными, а объект из класса с большим номером предпочитает объекту из класса с меньшим номером. Такие матрицы будем называть *транзитивными*.

В практических экспертизах, как правило, ответ на поставленный вопрос дают несколько экспертов, после чего их мнения агрегируются. Получение агрегированного мнения является достаточно сложной математической задачей, для решения которой разработано множество методов. Большинство из этих методов основаны на введении некоторой меры близости d между ответами экспертов и нахождении матрицы $\tilde{X}$, минимизирующей сумму $\sum_{l=1}^N d(\tilde{X}, X^l)$, где $X^1, \dots, X^N$ – матрицы, полученные от различных экспертов. В частности, в методе парных сравнений часто применяется метрика Хемминга (Кемени, Снелл, 1972, с. 21). При ее использовании матрица $\tilde{X}$ определяется по правилу большинства:

$$\tilde{x}_{ij} = \begin{cases} 1, & \sum_{l=1}^N x_{ij}^l > \sum_{l=1}^N x_{ji}^l, \\ 1/2 & \sum_{l=1}^N x_{ij}^l = \sum_{l=1}^N x_{ji}^l, \\ 0, & \sum_{l=1}^N x_{ij}^l < \sum_{l=1}^N x_{ji}^l. \end{cases}$$

Известно, что матрица $\tilde{X}$ может оказаться нетранзитивной даже при транзитивных $X^1, \dots, X^N$. Поэтому если результат экспертизы должен быть транзитивным, возникает задача определения транзитивной матрицы, ближайшей к $\tilde{X}$. В случае использования в качестве меры близости метрики Хемминга эта задача оказывается в вычислительном отношении весьма сложной. Один из алгоритмов ее решения приведен в (Гильбурд, 1988). Альтернативный геометрический подход описан в работе (Заславский, 2007).

Требование транзитивности матрицы парных сравнений представляется слишком жестким. Действительно, представим, что у нас есть n предметов различной массы и чашечные весы с некоторым порогом чувствительности, т.е. их чашки остаются в равновесии, если массы положенных на них предметов отличаются меньше чем на критическое значение ε . Если взвесить каждую пару предметов и составить из результатов взвешиваний матрицу, в ней вполне могут оказаться подматрицы, равные Y_3 (если разности весов первого и второго, а также второго и третьего предметов меньше порога, но разность весов первого и третьего больше). Очевидно, что полученная матрица обладает свойством: если $s_i \geq s_j$, то для любого k , отличного от i, j $x_{ik} \geq x_{jk}$. Назовем такую матрицу *правильной*. В (Заславский, Френкин, с. 9) доказана следующая теорема.

Теорема 1. Матрица X является правильной тогда и только тогда, когда она не содержит подматриц, равных Y_1, Y_2 , а также подматриц 4×4 вида

$$Z_1 = \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & - & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

Другое условие, равносильное правильности матрицы, сформулировано в работе (Заславский, 2014).

Построим по данной матрице X матрицу D расстояний между ее строками, элементы которой вычисляются по формуле $d_{ij} = \sum_{k=1}^n |x_{ik} - x_{jk}|$ (диагональные элементы матрицы X предполагаются равными $1/2$). Нетрудно убедиться, что верна следующая теорема.

Теорема 2. Для любой матрицы X и любых i, j имеет место неравенство

$$d_{ij} \geq |s_i - s_j|. \quad (1)$$

Матрица X является правильной тогда и только тогда, когда все неравенства (1) обращаются в равенства.

Из теоремы 2 следует, что правильность матрицы равносильна условию $NP = \sum_{i < j} (d_{ij} - s_j + s_i) = 0$ (напоминаем, что мы считаем объекты упорядоченными по возрастанию s_i).

В данной работе рассматривается задача построения по данной матрице ближайшей к ней в некоторой метрике матрицы, удовлетворяющей условию $NP = 0$. В отличие от задачи поиска транзитивной матрицы теоретическое обоснование эффективности предложенных для решения рассматриваемой задачи алгоритмов отсутствует. Поэтому будут приведены только результаты вычислительных экспериментов.

2. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМОВ

Пусть дана некоторая матрица парных сравнений $\tilde{X}$. Будем искать правильную матрицу X , минимизирующую величину $d(X, \tilde{X})$, где d — некоторая метрика, например $d(X, Y) = \sum_{i, j} |x_{ij} - y_{ij}|$. Для этого возьмем некоторую правильную матрицу X_0 и найдем в ней пару элементов x_{ij}, x_{ji} , $i < j$, которые можно изменить, сохранив правильность матрицы и уменьшив расстояние $d(X_0, \tilde{X})$. Этот поиск можно осуществлять либо проверяя возможность изменения для произвольной пары элементов, либо определив заранее список элементов, изменение которых не нарушает условия правильности. Нетрудно убедиться, что для матрицы, строки которой упорядочены по возрастанию s_j , такие элементы должны удовлетворять одному из условий:

- $x_{ij} = 1/2$, $x_{i-1, j} = x_{i, j+1} = 0$; новые значения $x_{ij} = 0$, $x_{ji} = 1$;
- $x_{ij} = 0$, $x_{i, j-1} = x_{i+1, j} = 1/2$; новые значения $x_{ij} = x_{ji} = 1/2$.

Описанная операция применяется до тех пор, пока возможно уменьшить расстояние до $\tilde{X}$ либо пока это расстояние не станет меньше заданного порогового значения. В качестве начальной правильной матрицы можно брать матрицу, все элементы которой равны $1/2$, транзитивную матрицу без ничьих или транзитивную матрицу, ближайшую к $\tilde{X}$, построенную алгоритмом, описанным в (Заславский, Шевлякова, 2010).

3. ОПИСАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для исходных матриц $\tilde{X}$ использовался следующий алгоритм генерации. Для каждой пары (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$ дважды генерируется случайное число t , принимающее значение 0 или 1, причем $P(t = 1) = \Phi((i - j) / n)$, где Φ — функция нормального распределения. Если оба раза $t = 1$ ($t = 0$), то полагаем $\tilde{x}_{ij} = 1$ ($\tilde{x}_{ji} = 1$), в противном случае $\tilde{x}_{ij} = \tilde{x}_{ji} = 1/2$.

Для аппроксимации матрицы $\tilde{X}$ правильной матрицей X мы воспользовались алгоритмом, описанным в (Заславский, Шевлякова, 2010). Согласно ему строилась транзитивная матрица X_0 , ближайшая к $\tilde{X}$. Затем искался элемент матрицы, который можно изменить, сохраняя правильность и уменьшая расстояние до $\tilde{X}$. При этом тестировались две группы алгоритмов: в первой группе возможность изменения проверялась для произвольного элемента матрицы, во второй — с помощью описанной в предыдущем разделе процедуры предварительно определялся список элементов, изменение которых не нарушает правильности матрицы.

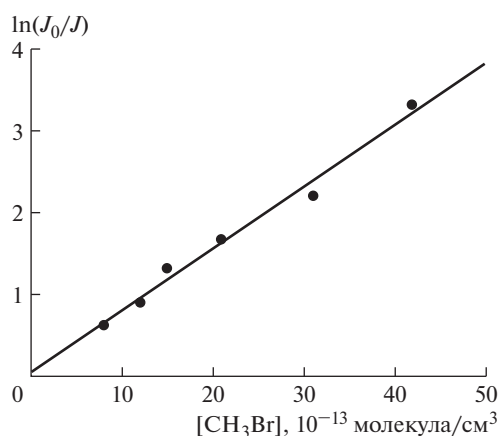


Рис.

Работа алгоритмов завершалась либо в случае отсутствия элементов, которые можно изменить, либо если доля элементов полученной на очередной итерации правильной матрицы X_k , отличающихся от соответствующих элементов $\tilde{X}$, составляла меньше 0,001.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

На рисунке показана зависимость среднего времени работы алгоритмов первой и второй групп от размера матрицы. Из графика видно, что при небольших размерах матрицы оба алгоритма работают примерно одинаково, но при увеличении размеров алгоритмы второй группы становятся более эффективными. Эксперименты показывают, что время работы этих алгоритмов пропорционально n^3 , причем для матриц порядка 1000 они решают задачу примерно за 3 минуты (алгоритмы первой группы вдвое дольше). Таким образом, можно сделать вывод о достаточной эффективности предложенных алгоритмов в задаче аппроксимации матриц парных сравнений правильными матрицами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гильбурд М.М. (1988). Об эвристических методах построения медианы в задачах группового выбора // *Автоматика и телемеханика*. № 7. С. 131–136.
- Дэвид Г. (1978). Метод парных сравнений. М.: Статистика.
- Заславский А.А. (2007). Геометрия парных сравнений // *Автоматика и телемеханика*. № 3. С. 181–186.
- Заславский А.А. (2014). Новые подходы к анализу парных сравнений // *Экономика и математические методы*. Т. 50. № 3. С. 130–133.
- Заславский А.А., Френкин Б.Р. (2009). Математика турниров. М.: МЦНМО.
- Заславский А.А., Шевлякова А.Н. (2010). Геометрический метод анализа парных сравнений. Результаты вычислительного эксперимента // *Вестник МЭИ*. № 6. С. 5–12.
- Кемени Дж., Снелл Дж. (1972). Кибернетическое моделирование. М.: Советское радио.
- Пригарина Т.А., Чеботарев П.Ю. (1989). Методы экспертных оценок на примере определения предпочтительности оценок. Препринт. М.: ЦЭМИ.

Поступила в редакцию
20.06.2017 г.

REFERENCES (WITH ENGLISH TRANSLATION OR TRANSLITERATION)

- David H.A (1949). The Method of Paired Comparisons. Chapel Hill: Univ. of North Carolina.
- Gil'burd M. M. (1988). On Heuristic Methods of Obtaining the Median in Group Choice Problem. *Automation and Remote Control*, 7, 131–136 (in Russian).

- Kemeny J.G., Snell J.L. (1963). *Mathematical Method in the Social Sciences*. New York: Blaisdell.
- Prigarina T.A., Chebotarev P.Yu. (1989). *Methods of Expert Estimations by the Example of the Preference Detecting Problem*. Working paper. M.: CEMI (in Russian).
- Zaslavskii A.A. (2007). Geometry of Paired Comparisons. *Automation and Remote Control*, 3, 181–186 (in Russian).
- Zaslavskii A.A. (2014). New Approaches for Analysis of Paired Comparisons. *Economics and mathematical methods*, 50, 3, 130–133 (in Russian).
- Zaslavskii A.A., Frenkin B.R. (2009). *Mathematics of Tournavents*. Moscow: MCCME (in Russian).
- Zaslavskiy A.A., Shevlyakova A.N. (2010). Geometric Method for Analysis of Paired Comparisons. *Computational Experiment. MPEI Bulletin*, 6, 5–12 (in Russian).

Received 3.07.2017

CONSTRUCTION OF REGULAR PAIRED COMPARISONS MATRIX. RESULTS OF CALCULATING EXPERIMENTS

V.A.Baljabin^I, A.A.Zaslavsky^{II}

Abstract. The construction of transitive matrix closest to the given one is a traditional problem of paired comparisons analysis. But the condition of transitivity seems to be too strong for paired comparisons with draws. Earlier the authors proposed to use the condition of regularity, which is the weakening of the transitivity. Note that, in contrast to the traditional problem, any theoretical results allowing to find a regular matrix closest to the given one are not known. Hence the research and the analysis of heuristic algorithms for this problem are of interest. Several algorithms based on quantitative assessment of non-regularity proposed by the authors and the results of calculating experiments are discussed in the paper. The most effective of proposed algorithms solves the problem for matrices 1000×1000 by 3 minutes, and so can be used in the paired comparisons analysis.

Keywords: paired comparisons, transitivity, regularity, distances matrix.

JEL Classification: C02.

^IVictor A. Baljabin – magister, MPEI(?перевод?), Russia, Moscow; viktorbalyabin@mail.ru.

^{II}Alexey A. Zaslavsky – Ph.D (Techn.), senior researcher, Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Russia, Moscow; zasl@cemi.rssi.ru.