

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОРТФЕЛЕЙ, НАЙДЕННЫХ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫМ МЕТОДОМ

© 2017 г. А.В. Сигал¹

Аннотация. В статье рассматриваются особенности, преимущества и недостатки использования концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр для поиска в поле различных информационных ситуаций структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономического риска. Особое внимание уделено вопросам обоснования корректности теоретико-игрового метода поиска структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономического риска, и вопросам обоснования эффективности портфелей, структура которых найдена теоретико-игровым методом. Суть комбинированного применения статистических и антагонистических игр заключается в отождествлении исходной статистической игры, моделирующей принятие управленческих решений, с антагонистической игрой, платежная матрица которой совпадает с платежной матрицей исходной статистической игры. В статье антагонистическими играми называются конечные матричные игры, т.е. игры двух лиц с нулевой суммой. Статистические и антагонистические игры имеют одну и ту же формальную структуру. Этот факт дает теоретическую и практическую возможность комбинировано применять статистические и антагонистические игры. При соблюдении определенных требований решение соответствующей антагонистической игры позволяет найти структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска (при определенных условиях для любого допустимого распределения вероятностей состояний экономической среды).

Ключевые слова: статистическая игра, антагонистическая игра, информационная ситуация, структура портфеля, экономический риск, эффективность портфеля.

Классификация JEL: C720.

ВВЕДЕНИЕ

Модель принятия управленческих решений в экономике почти всегда представляет собой задачу оптимального распределения ресурсов, т.е. диверсификацию того или иного типа. Научной основой диверсификации является современная теория портфеля, начавшаяся с работ Г. Марковица (Markowitz, 1952, 1959). Современная теория портфеля базируется на применении теории вероятностей и математической статистики для выбора среди эффективных такого портфеля, который обладает с точки зрения лица, принимающего решения (ЛПР), т.е. инвестора, оптимальным сочетанием значения доходности, измеряемой ожидаемой нормой прибыли со значением уровня экономического риска (ЭР), измеряемого дисперсией случайной величины (СВ), которая характеризует норму прибыли портфеля, или ее среднеквадратичное отклонение (СКО).

Теория игр в первом систематическом изложении в монографии (Neumann, Morgenstern, 1944) была представлена как средство математического изучения явлений конкурентной экономики. Теоретико-игровые модели нашли широкое применение при решении задач оптимального распределения ресурсов между разными активами. С экономической точки зрения, распределение ресурсов представляет собой диверсификацию. Этот факт позволяет предположить, что целесообразно применять теоретико-игровые методы и модели в современной теории портфеля. Действительно, возможен корректный поиск теоретико-игровым методом в поле различных информационных ситуаций (ИС) структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР в модели Марковица и/или в модели Блэка.

Цель статьи — обоснование корректности теоретико-игровых методов поиска эффективных портфелей. Применение теории игр позволяет построить обобщенные модели задачи выбора

¹ Анатолий Викторович Сигал — докт. экон. наук, доцент, профессор кафедры бизнес-информатики и математического моделирования Института экономики и управления (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского»; Симферополь, ksavo3@gmail.com.

эффективного портфеля в поле различных ИС, в том числе и для случаев, когда неизвестны значения вероятностей состояний экономической среды и поэтому неизвестны законы распределения СВ, характеризующих нормы прибылей активов, составляющих портфель. При соблюдении определенных требований решение соответствующей антагонистической игры (АИ) позволяет найти структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР (при определенных условиях для любого допустимого распределения вероятностей состояний экономической среды). В статье обосновывается эффективность портфелей, найденных теоретико-игровыми методами и обладающих наименьшим уровнем ЭР. В дальнейших рассуждениях ограничимся рассмотрением конечных игр, поэтому под АИ везде будем подразумевать матричную игру, т.е. конечную игру двух лиц с нулевой суммой.

Как правило, АИ позволяет моделировать ситуацию, в которой интересы участников противоположны. В экономике часто интересы разных сторон непротиворечивы, а порой и совпадают. По этой и некоторым другим причинам основной моделью принятия решений считается модель принятия статистических решений, которую будем называть статистической игрой (Блекуэлл, Гиршик, 1958). Основная заслуга в создании теории принятия статистических решений принадлежит А. Вальду (Wald, 1945, 1949, 1950).

Предлагаемые ниже теоретико-игровые методы поиска эффективного портфеля, а также обобщенные модели задачи поиска эффективного портфеля базируются на концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр. Основы концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр наиболее полно изложены в монографии (Сигал, 2014). Суть комбинированного применения статистических и антагонистических игр заключается в отождествлении исходной статистической игры, моделирующей принятие управленческих решений, с АИ, платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания исходной статистической игры. Для поиска оптимальной стратегии ЛПР, в частности для поиска эффективного портфеля, можно решить АИ, характеризующую ситуацию принятия управленческих решений, точнее, АИ, характеризующую принятие решений о формировании эффективного портфеля.

Определение 1. *АИ, характеризующей ситуацию принятия управленческих решений, будем называть АИ, платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания исходной статистической игры, моделирующей принятие управленческих решений.*

Управленческие решения в экономике, принятые на основе комбинированного применения статистических и антагонистических игр, обладают рядом достоинств, в том числе позволяют экономить средства, адекватно учитывать неполноту информации, неопределенность, конфликтность и обусловленный ими риск, а также оптимизировать уровень ЭР.

Управленческие решения в экономике, принятые на основе комбинированного применения статистических и антагонистических игр, имеют также и недостатки, например, они чрезмерно осторожны. Поэтому комбинированное применение статистических и антагонистических игр наиболее целесообразно в условиях, когда ЛПР (инвестор) считает, что ему не следует рисковать. В таких случаях он должен сформировать портфель, обладающий наименьшим уровнем ЭР. Это наиболее важно во время кризиса или предкризисной ситуации, при жесткой конкуренции и/или в случаях, когда отношение ЛПР к риску характеризуется существенной несклонностью к риску (в современной теории портфеля все инвесторы характеризуются несклонностью к риску). Именно в этих случаях поведение ЛПР характеризует предельная осторожность, при этом ЛПР стремится минимизировать уровень ЭР. Так как модель задачи выбора эффективного портфеля, предложенная Г. Марковицем (Markowitz, 1952, 1959), представляет собой задачу двухкритериальной оптимизации, то для поиска эффективных портфелей традиционно применяют методы решения задач многокритериальной оптимизации, т.е. методы поиска оптимальных по Парето решений соответствующей задачи многокритериальной оптимизации. В традиционной модели Марковица задачи выбора эффективного портфеля первым критерием выступает ожидаемая норма прибыли, которую требуется максимизировать, а вторым критерием – риск, измеренный дисперсией или среднеквадратичным отклонением, который требуется минимизировать. Как будет показано ниже, решение задачи выбора эффективного портфеля может быть основано и на решении

АИ. Именно теоретико-игровой подход позволяет построить обобщенные модели задачи выбора эффективного портфеля.

Предлагаемые обобщенные модели задачи выбора эффективного портфеля представляют собой задачи трехкритериальной оптимизации, при этом их вид зависит от имеющей место ИС относительно неопределенности поведения экономической среды. Например, в поле четвертой ИС, когда о возможных значениях вероятностей состояний экономической среды нет никакой математической информации, в качестве этого третьего критерия выступает энтропия Шеннона, значение которой требуется максимизировать. Некоторые аспекты применения энтропийного подхода к задаче выбора эффективного портфеля были рассмотрены в работах (Сигал, 1998а; Лившиц, Сигал, 2014).

К сожалению, в работах автора, например (Сигал, 1998а, 1998б, 2015), посвященных применению теории игр в современной теории портфеля, практически не исследовались вопросы обоснования эффективности портфелей, найденных теоретико-игровым методом. Ниже будут приведены условия, соблюдение которых позволяет в поле различных ИС утверждать, что портфель, найденный теоретико-игровым методом, является эффективным.

ТРАДИЦИОННАЯ МОДЕЛЬ МАРКОВИЦА

В современной теории портфеля принято считать, что нормы прибылей активов, составляющих портфель, и норма прибыли портфеля характеризуют соответствующие СВ, заданные своими полностью известными законами распределения.

Далее везде будем использовать следующие обозначения: k – число активов, составляющих портфель; x_i – доля актива вида i в портфеле; $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_k)$ – портфель (точнее, его структура); R_i – дискретная СВ, характеризующая норму прибыли актива вида i ; $R_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k R_i x_i$ – дискретная СВ, характеризующая норму прибыли портфеля $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_k)$; $m_i = \mathbf{M}(R_i)$ и $m_{\mathbf{x}} = \mathbf{M}(R_{\mathbf{x}})$ – ожидаемые нормы прибыли активов и портфеля, т.е. математические ожидания соответствующих СВ; $\sigma_i^2 = \mathbf{D}(R_i)$ и $\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{D}(R_{\mathbf{x}})$ – уровни ЭР активов и портфеля, измеренные значениями дисперсий соответствующих СВ; $\sigma_i, \sigma_{\mathbf{x}}$ – СКО соответствующих СВ; $c_{il} = \text{cov}(R_i; R_l)$ – ковариация между соответствующими СВ; $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{k \times k} = (c_{il})$ – ковариационная матрица СВ, характеризующих нормы прибыли активов.

Если закон распределения вероятностей СВ R_i , характеризующей норму прибыли актива вида i , известен полностью, это означает, что имеет место ИС I_1 (Трухаев, 1981, с. 13), когда имеются точные истинные значения r_{ij} , где r_{ij} – значение нормы прибыли актива вида i в условиях, когда экономическая среда (фондовый рынок) оказалась в возможном состоянии j , а также представлены точные истинные значения вероятностей q_j возможных состояний экономической среды. В этом случае значения числовых характеристик всех дискретных СВ R_i являются известными числами и могут быть вычислены по формулам из теории вероятностей:

$$m_i = \mathbf{M}(R_i) = \sum_{j=1}^n r_{ij} q_j, \quad i = 1, \dots, k, \quad (1)$$

$$\sigma_i^2 = \mathbf{D}(R_i) = c_{ii} = \sum_{j=1}^n r_{ij}^2 q_j - m_i^2, \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (2)$$

$$c_{li} = c_{il} = \text{cov}(R_i; R_l) = \sum_{j=1}^n r_{ij} r_{lj} q_j - m_i m_l, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad l = i, \dots, k. \quad (3)$$

Так как для реальных активов точные истинные значения r_{ij} и q_j неизвестны, то на практике вместо неизвестных значений r_{ij} берутся значения норм прибыли этих активов, наблюдавшиеся в прошлые периоды, а вместо значений числовых характеристик (1)–(3) – значения

соответствующих точечных оценок этих числовых характеристик, что, по сути, означает применение равномерного закона распределения: $q_1 = \dots = q_n = 1/n$.

Согласно современной теории портфеля, традиционная модель Марковица задачи выбора эффективного портфеля представляет собой задачу двухкритериальной оптимизации:

$$m_x = \sum_{i=1}^k m_i x_i \rightarrow \max_x, \quad (4)$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k c_{il} x_i x_l \rightarrow \min_x, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^k x_i = 1, \quad (6)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (7)$$

Модель Блэка аналогична модели Марковица, но в отличие от последней в ней отсутствуют условия неотрицательности значений долей активов в допустимых портфелях. Это означает, что инвестор имеет право осуществлять короткие продажи, т.е. продавать активы, предоставленные ему в заем.

Определение 2. *Эффективным портфелем в модели Марковица* называют портфель, структура которого является оптимальным по Парето решением задачи (4)–(7), а *эффективным портфелем в модели Блэка* – портфель, структура которого является оптимальным по Парето решением задачи (4)–(6).

Согласно определению 2, эффективность портфеля означает, что среди портфелей, допустимых в соответствующей модели, не существует портфеля, доминирующего эффективный портфель, т.е. не существует допустимого портфеля, обладающего не меньшим значением ожидаемой нормы прибыли, чем у этого портфеля, и одновременно с этим меньшим значением уровня ЭР, или обладающего не большим значением уровня ЭР, чем у этого портфеля, и одновременно с этим большим значением ожидаемой нормы прибыли.

Для поиска оптимальных по Парето решений задачи многокритериальной оптимизации ее, как правило, приводят к задаче однокритериальной оптимизации функции полезности, которая представляет собой некоторую свертку (выпуклую линейную комбинацию) всех критериев. Например, задачу с критериями (4), (5) можно привести к задаче максимизации функции полезности, имеющей вид $u(x) = am_x - (1-a)\sigma_x^2$, где a – параметр, удовлетворяющий неравенствам $0 \leq a \leq 1$. Конкретное числовое значение параметра a задает ЛПР (инвестор), при этом выбранное им значение параметра a характеризует его отношение к риску, точнее, степень его несклонности к риску.

В случаях, когда с точки зрения инвестора ему нецелесообразно рисковать, он должен формировать портфель, обладающий наименьшим уровнем ЭР. Если такой портфель единственный, то в соответствующей модели он всегда является эффективным. Отметим, если инвестор ищет структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР, это соответствует нулевому значению параметра ($a = 1$) в максимизируемой функции полезности $u(x)$ инвестора, т.е. означает абсолютную несклонность инвестора к риску.

С точки зрения анализа эффективности портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР и найденного теоретико-игровым методом, наиболее интересными и сложными являются следующие возможные случаи:

1) несовпадение структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР в модели Блэка, со структурой портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР в модели Марковица;

2) существование нескольких различных портфелей, обладающих наименьшим уровнем ЭР (разумеется, одним и тем же по своему значению) в соответствующей модели, при этом эффективным будет являться только один из них, а именно портфель, который обладает наибольшим значением ожидаемой нормы прибыли среди всех этих портфелей.

Чтобы найти структуру $\mathbf{x}^*$ портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР в модели Марковица, необходимо решить задачу (5)–(7), а для нахождения структуры $\mathbf{x}^*$ портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР в модели Блэка, необходимо решить задачу (5)–(6). Если все компоненты портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР в модели Блэка, окажутся неотрицательными числами, решение задачи (5)–(7) совпадет с решением задачи (5)–(6). Подчеркнем, что значение ожидаемой нормы прибыли портфеля $\mathbf{x}^*$, обладающего наименьшим уровнем ЭР, не является наихудшим (т.е. наименьшим) на множестве всех допустимых портфелей, т.е. в невырожденном случае выполняются соотношения:

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{*2} = \mathbf{D}(\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{x}^* \mathbf{C} \mathbf{x}^{*T} < \min_i \sigma_i^2, \quad m_{\mathbf{x}}^* = \mathbf{M}(\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^*) = \sum_{i=1}^k m_i x_i^* > \min_i m_i.$$

Отметим простейшие свойства числовых характеристик допустимых портфелей. Пусть $X = \left\{ \mathbf{x} = (x_1; \dots; x_k) \mid \sum_{i=1}^k x_i = 1 \right\}$ – множество портфелей, допустимых в модели Блэка, $X^+ = \left\{ \mathbf{x} = (x_1; \dots; x_k) \mid \sum_{i=1}^k x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, k \right\}$ – множество портфелей, допустимых в модели Марковица. Если $\mathbf{x} \in X^+$, то справедливы соотношения $\min_i m_i \leq m_{\mathbf{x}} \leq \max_i m_i$ и $\min_{\mathbf{x} \in X^+} \sigma_{\mathbf{x}}^2 \leq \sigma_{\mathbf{x}}^2 \leq \max_i \sigma_i^2$, а если $\mathbf{x} \in X$, то справедливы соотношения $0 \leq \min_{\mathbf{x} \in X} \sigma_{\mathbf{x}}^2 \leq \min_{\mathbf{x} \in X^+} \sigma_{\mathbf{x}}^2 \leq \sigma_{\mathbf{x}}^2$, при этом возможные значения $m_{\mathbf{x}}$ не ограничены (как снизу, так и сверху), а возможные значения $\sigma_{\mathbf{x}}^2$ не ограничены сверху.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ ТЕОРИИ ИГР И СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Определение 3. *Антагонистической игрой* будем называть матричную игру, т.е. конечную игру двух лиц (игроков) с нулевой суммой.

АИ представляет собой систему $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, где $\mathbf{I} = \{1; \dots; i; \dots; k\}$ – известное множество всех чистых стратегий первого игрока, $\mathbf{J} = \{1; \dots; j; \dots; n\}$ – известное множество всех чистых стратегий второго игрока, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ – полностью или частично известная платежная матрица АИ.

Значение элемента r_{ij} платежной матрицы задает выигрыш первого игрока в ситуации $(i; j)$, т.е. когда в партии игры он применил чистую стратегию i , а второй игрок – чистую стратегию j . В каждой партии АИ значение проигрыша второго игрока совпадает со значением выигрыша первого игрока.

Определение 4. *Статистической игрой (статистической моделью принятия решений)* будем называть систему $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, где $\mathbf{I} = \{1; \dots; i; \dots; k\}$ – известное множество всех решений ЛПР, которые он может применить при одноразовом принятии управленческого решения, $\mathbf{J} = \{1; \dots; j; \dots; n\}$ – известное множество всех возможных состояний природы (экономической среды), $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ – полностью или частично известная платежная матрица, еще называемая функционалом оценивания, статистической игры.

В теории принятия статистических решений ЛПР принято называть статистиком.

Будем считать (без ограничения общности), что в статистической игре первый игрок является ЛПР, второй – экономической средой (природой), при этом платежная матрица статистической игры обладает положительным ингридиентом, т.е. $\mathbf{R} = \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}_{k \times n}^+ = (r_{ij}^+)$, когда ЛПР стремится достичь наибольшего значения среди ее элементов.

Кратко перечислим основные особенности статистических игр, отличающие их от АИ:

1) природу нельзя рассматривать как разумного противника, интересы которого, например, противоположны интересам ЛПР;

2) множество критериев, применение которых возможно для принятия решений, определяется имеющей место ИС;

3) статистик имеет возможность проводить испытания с целью получения дополнительной информации о неизвестном ему состоянии природы;

4) статистик должен выбрать решающее правило, которое дает ему возможность выбрать оптимальное решение в зависимости от результата испытания.

Очевидно, что статистические и антагонистические игры имеют одну и ту же формальную структуру. Этот факт отмечают, например, Д. Блекуэлл и М.А. Гиршик: «Игры против разумного противника и статистические игры имеют одну и ту же формальную структуру» (Блекуэлл, Гиршик, 1958, с. 116). Этот факт дает теоретическую и практическую возможность комбинировано применять статистические и антагонистические игры.

Стратегию поведения экономической среды характеризует имеющаяся информационная ситуация.

Определение 5. Информационной ситуацией I_s относительно стратегии поведения экономической среды будем называть определенную меру градации, характеризующую неопределенность выбора экономической средой своих состояний из заданного множества $J = \{1; \dots; n\}$.

Существуют разные классификаторы, характеризующие градации ИС, т.е. поведение экономической среды. Как отмечает Р.И. Трухачев: «Определение и классификация этих информационных ситуаций составляют, можно сказать, фундамент теории принятия решений в условиях неопределенности, поскольку частично позволяют решить известную проблему выбора критерия принятия решений путем разработки для каждой информационной ситуации множества критериев принятия решений» (Трухачев, 1981, с. 10). В классификации, предложенной Р.И. Трухачевым (там же, с. 13), выделяются семь ИС (q_j – априорные вероятности возможных состояний экономической среды): I_1 – заданы точные истинные значения q_j ; I_2 – значения q_j зависят от одного или нескольких параметров; I_3 – задана система линейных ограничений для значений q_j (по сути, неизвестные значения этих вероятностей принадлежат известным множествам); I_4 – о возможных значениях q_j нет никакой математической информации; I_5 – интересы и цели ЛПР антагонистичны интересам и целям экономической среды; I_6 – «промежуточная» ИС между I_1 и I_5 ; I_7 – множество состояний экономической среды задано как нечеткое множество, т.е. значения q_j принадлежат соответствующим известным нечетким множествам.

Семь выделенных Р.И. Трухачевым ИС представляют глобальные характеристики уровней неопределенности состояний экономической среды. Отдельно следует сказать о пятой ИС, в поле которой экономическая среда теряет характерное свойство пассивности природы и как бы начинает действовать осознанно – как злонамеренный противник ЛПР. Этот формальный антагонизм лишь отображает мнение ЛПР о нецелесообразности рисковать. Принятие управленческих решений в поле пятой ИС должно осуществляться согласно правилам решения АИ (собственно, ЛПР вынуждено применять принцип гарантированного результата). Пятая ИС дает возможность адекватно моделировать принятие решений в условиях, когда ЛПР считает нецелесообразным рисковать. Очевидно, в поле ИС I для принятия управленческого решения следует решать соответствующую АИ.

В АИ игроки придерживаются своим наиболее осторожным стратегиям, что формализовано в принципе гарантированного результата. Согласно *принципу гарантированного результата*, каждый игрок рассчитывает на наихудшее для него поведение противника, т.е. игроки придерживаются крайне пессимистической точки зрения: если перед началом партии игры противник узнал, какую именно чистую стратегию применит игрок, то противник в этой партии применит наиболее выгодную для себя чистую стратегию.

Д. Блекуэлл и М.А. Гиршик отмечают, что принцип гарантированного результата «определенно менее удовлетворителен в статистических играх, и в некоторых ситуациях он предписывает такой путь, который может быть признан неразумным всеми, за исключением разве самых неизлечимых пессимистов» (Блекуэлл, Гиршик, 1958, с. 127). Это замечание абсолютно справедливо. Но при принятии управленческих решений в экономике ЛПР часто вынуждено

придерживаться принципа гарантированного результата не только и не столько из-за собственного пессимизма и несклонности к риску.

Далее будем отождествлять исходную статистическую игру типа АИ, характеризующую ситуацию принятия управленческих решений (определение 1). Это позволяет расширить возможности применения как статистических, так и антагонистических игр в экономике и управлении. Если отсутствуют и антагонизм интересов, и антагонизм поведения игроков, то АИ, характеризующая ситуацию принятия управленческих решений, не является непосредственной моделью этой ситуации. Но, очевидно, в этом случае поведение ЛПР характеризуется предельной осторожностью.

Если стратегии игроков отождествлять с векторами, характеризующими эти стратегии, то множества стратегий игроков имеют вид:

$$S_1 = \left\{ \mathbf{p} = (p_1; \dots; p_k) \left| \sum_{i=1}^k p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, k \right. \right\} = X^+ \text{ — для первого игрока;}$$

$$S_2 = \left\{ \mathbf{q} = (q_1; \dots; q_n) \left| \sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right. \right\} \text{ — для второго игрока.}$$

Определение 6. *Платежной функцией АИ* называют функцию ожидаемого выигрыша первого игрока $V = V(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = \mathbf{p} \mathbf{R} \mathbf{q}^T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n r_{ij} p_i q_j$, где $\mathbf{q}^T$ — вектор, транспонированный к вектору $\mathbf{q}$.

В АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ первый игрок согласно принципу максимина может обеспечить себе максиминный выигрыш $\max_{\mathbf{p} \in S_1} \min_{\mathbf{q} \in S_2} V(\mathbf{p}; \mathbf{q})$, а второй игрок согласно принципу минимакса может обеспечить себе минимаксный проигрыш $\min_{\mathbf{q} \in S_2} \max_{\mathbf{p} \in S_1} V(\mathbf{p}; \mathbf{q})$. Для АИ максиминный (минимаксный) подход к понятию оптимальности равносильен стремлению игроков придерживаться равновесной по Нэшу ситуации (см., например, (Воробьев, 1985, с. 32–35)).

Определение 7. *Ситуацией равновесия* (по Нэшу) в АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ называют ситуацию $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$, где $\mathbf{p}^* \in S_1$, $\mathbf{q}^* \in S_2$, для которой справедливы неравенства:

$$V(\mathbf{p}; \mathbf{q}^*) \leq V(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*) \leq V(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{p} \in S_1, \quad \forall \mathbf{q} \in S_2.$$

В качестве синонимов термина ситуация равновесия часто используют словосочетания: равновесная ситуация, седловая точка платежной функции.

Определение 8. *Значением игры, или ценой игры* $\Gamma_{\mathbf{R}}$ называют число $V_{\mathbf{R}}^* = V(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$, которое равняется общему значению платежной функции на множестве всех ситуаций равновесия.

Если АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ имеет седловую точку, т.е. значения чистых цен совпадают между собой ($\alpha = \beta$, где $\alpha = \max_i \min_j r_{ij}$, $\beta = \min_j \max_i r_{ij}$), то она имеет решение в чистых стратегиях, при этом ее смешанное расширение $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle S_1, S_2, V \rangle$ имеет это же решение в чистых стратегиях. Если АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ не имеет седловой точки, т.е. значения чистых цен не совпадают между собой ($\alpha < \beta$), она не имеет решения в чистых стратегиях. Доказанная в (Neumann, 1928), теорема о минимаксе утверждает, что $\max_{\mathbf{p} \in S_1} \min_{\mathbf{q} \in S_2} V(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = \min_{\mathbf{q} \in S_2} \max_{\mathbf{p} \in S_1} V(\mathbf{p}; \mathbf{q})$.

Если ввести обозначения $V_{Ij} = \sum_{i=1}^k r_{ij} p_i$, $V_{IIj} = \sum_{j=1}^n r_{ij} q_j$, $V_{Ij}^* = \sum_{i=1}^k r_{ij} p_i^*$, $V_{IIj}^* = \sum_{j=1}^n r_{ij} q_j^*$, где $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$ — ситуация равновесия игры $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, то основные свойства оптимальных стратегий $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$ игроков и цены $V_{\mathbf{R}}^*$ АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ могут быть записаны следующим

образом: 1) $\alpha \leq V_R^* \leq \beta$; 2) $V_{\Pi i}^* \leq V_R^*$, $i = 1, \dots, k$; 3) $p_i^* = 0$, если $V_{\Pi i}^* < V_R^*$; 4) $V_{\Pi i}^* = V_R^*$, если $p_i^* > 0$; 5) $V_{Ij}^* \geq V_R^*$, $j = 1, \dots, n$; 6) $q_j^* = 0$, если $V_{Ij}^* > V_R^*$; 7) $V_{Ij}^* = V_R^*$, если $q_j^* > 0$.

Изложение основ теории АИ завершим формулировкой основополагающего (и для всей теории АИ, и для нижеприведенных теорем) *критерия оптимальности стратегий игроков* (см., например, (Воробьев, 1985, с. 57)): пусть $\mathbf{p} \in S_1$ и $\mathbf{q} \in S_2$ — стратегии первого и второго игроков соответственно; V — число, для которых выполняются неравенства $V_{\Pi i} \leq V \leq V_{Ij}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$; тогда $\mathbf{p}$ — оптимальная стратегия первого игрока; $\mathbf{q}$ — оптимальная стратегия второго игрока; $(\mathbf{p}; \mathbf{q})$ — ситуация равновесия в АИ $\Gamma_R = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, при этом $V = V_R^*$ — значение (цена) АИ $\Gamma_R = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$.

Достаточно полное изложение основных разделов теории игр и статистических решений приведено в (Блекуэлл, Гиршик, 1958; Воробьев, 1985; Neumann, Morgenstern, 1944; Wald, 1950; Вальд, 1960).

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ МЕТОД ПОИСКА СТРУКТУРЫ ПОРТФЕЛЯ, ОБЛАДАЮЩЕГО НАИМЕНЬШИМ УРОВНЕМ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РИСКА

Очевидно, соответствующая оптимальная стратегия в АИ, характеризующей принятие решений о формировании эффективного портфеля, не обязательно задает эффективный портфель (отметим, что эффективность портфеля везде понимается в смысле определения 2). В связи с этим возникает принципиально важный вопрос, который можно назвать вопросом корректности применения теоретико-игрового метода поиска эффективного портфеля. При соблюдении каких требований (условий) соответствующая оптимальная стратегия в АИ, характеризующей ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля, будет задавать структуру эффективного портфеля? Для ответа на этот вопрос сформулируем теорему об АИ $\Gamma_C = \langle \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{C} \rangle$, т.е. АИ, заданной ковариационной матрицей $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{k \times k} = (c_{il})$ СВ, характеризующих нормы прибылей активов. Доказательства теорем, обосновывающих корректность применения теоретико-игрового метода поиска эффективного портфеля, основываются на свойствах вполне смешанных стратегий и вполне смешанных игр (см., например, (Воробьев, 1985, с. 79–83)), поэтому нам необходимо уточнить значения некоторых терминов.

Определение 9. *Вполне смешанной стратегией* игрока называют такую стратегию, для которой значения всех компонент соответствующего вектора $\mathbf{p} \in S_1$ или $\mathbf{q} \in S_2$ являются положительными числами. *Вполне смешанной ситуацией равновесия* в АИ $\Gamma_R = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ называют ситуацию равновесия $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$, состоящую из вполне смешанных стратегий игроков $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$. *Вполне смешанной игрой* называют АИ, в которой любая ситуация равновесия — это вполне смешанная ситуация равновесия.

Пусть $\mathbf{J}_k = (1; \dots; 1)$ — k -мерный вектор (точнее, вектор-строка), все компоненты которого равняются числу 1, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть ковариационная матрица $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{k \times k} = (c_{il})$ СВ, характеризующих нормы прибылей активов, положительно определена¹, а в АИ $\Gamma_C = \langle \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{C} \rangle$ существует вполне смешанная ситуация равновесия $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$. Тогда АИ Γ_C — вполне смешанная игра, оптимальные стратегии $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$ в АИ Γ_C — единственные и совпадают, при этом совпавшие оптимальные стратегии задают эффективный портфель: положительный вектор $\mathbf{x}^* = \mathbf{q}^* = \mathbf{p}^* = \mathbf{J}_k \mathbf{C}^{-1} / (\mathbf{J}_k \mathbf{C}^{-1} \mathbf{J}_k^T)$ является оптимальным решением задачи (5)–(6), а число $\min_x \sigma_x^2 = \sigma_{\mathbf{x}^*}^2 = \mathbf{x}^* \mathbf{C} \mathbf{x}^{*T} = V_C^*$ — минимальным значением критерия (5), где $V_C^* = 1 / (\mathbf{J}_k \mathbf{C}^{-1} \mathbf{J}_k^T)$ — цена АИ Γ_C , $\sigma_{\mathbf{x}^*}^2 = \mathbf{D}(\mathbf{R}_{\mathbf{x}^*})$ — дисперсия СВ $R_{\mathbf{x}^*} = \sum_{i=1}^k R_i x_i^*$, характеризующая норму прибыли портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР.*

Теорема 1 уточняет (в части утверждения об эффективности портфеля) формулировку (Сигал, 2014, с. 216, теорема 5.6). В основе доказательства теоремы 1 лежит теорема о решении вполне

¹ См., например, (Сюдсетер, Стрем, Берк, 2000, с. 155).

смешанной игры (см., например, (Воробьев, 1985, с. 79–80)). Оптимальное решение $\mathbf{x}^*$ задачи (5)–(6) совпадает с вектором $\mathbf{q}^* = \mathbf{p}^*$, так как достаточные условия Куна – Таккера (Сюдсетер, Стрем, Берк, 2000, с. 111) для оптимального решения задачи (5)–(6) приводят к той же системе линейных алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять единственные (вполне смешанные) стратегии игроков.

Итак, при соблюдении всех требований теоремы 1 задачи (5)–(6) и (5)–(7) имеют единственные решения, которые совпадают между собой и с портфелем, обладающим наименьшим уровнем ЭР и в модели Блэка, и в модели Марковица, при этом выполняются соотношения $\sigma_{\mathbf{x}}^{*2} = \min_{\mathbf{x} \in X^+} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \min_{\mathbf{x} \in Y} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = V_{\mathbf{C}}^* > 0$, $\sigma_{\mathbf{x}}^{*2} = V_{\mathbf{C}}^* < \min \sigma_i^2$. Эффективность портфеля $\mathbf{x}^* = \mathbf{q}^* = \mathbf{p}^*$ следует из единственности портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР.

Для традиционной модели Марковица, т.е. для задачи выбора эффективного портфеля в поле ИС I_1 , имеются и другие теоретико-игровые методы поиска эффективного портфеля. Решение задачи выбора эффективного портфеля может быть основано на применении АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, т.е. АИ, заданной матрицей $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$, элементы r_{ij} которой представляют собой значения норм прибыли активов. В игре $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ первый игрок – это ЛПР, (инвестор), второй игрок – экономическая среда (фондовый рынок), чистые стратегии первого игрока – активы, составляющие портфель инвестора, а стратегия $\mathbf{p}$ первого игрока – портфель (точнее, структура портфеля). В такой ситуации справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть в АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, где r_{ij} – значения норм прибыли активов, отсутствует седловая точка, а второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию. Тогда оптимальная стратегия $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_k^*)$ первого игрока задает эффективный портфель в модели Марковица, а именно портфель $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ без риска.

Отметим важную особенность теоремы 2: если справедливы все требования теоремы 2, оптимальная стратегия $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_k^*)$ первого игрока задает эффективный портфель в модели Марковица не только для заданного распределения вероятностей состояний экономической среды, но и для любого допустимого распределения вероятностей состояний экономической среды.

Теорема 2 уточняет формулировку (Сигал, 2014, с. 216, теорема 5.7) и аналогичной теоремы из (Сигал, 2015), в которых ошибочно утверждалась эффективность портфеля $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ в модели Блэка. Если все требования теоремы 2 оказались справедливыми, в этом случае портфель $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ действительно будет портфелем без риска (собственно, портфель с нулевым уровнем несистематического риска). При этом портфель без риска будет найден теоретико-игровым методом, обоснованным теоремой 2, в ситуации, когда все активы, составляющие этот портфель, являются рискованными. Дело в том, что если все требования теоремы 2 справедливы, то согласно свойствам полноты смешанных оптимальных стратегий справедливо равенство $R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^k R_i x_i^* \equiv V_{\mathbf{R}}^* = \text{const}$, откуда для значения дисперсии СВ $R_{\mathbf{x}}^*$ получаем $\min_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sigma_{\mathbf{x}^*}^{*2} = \mathbf{D}(R_{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{D}(V_{\mathbf{R}}^*) = \mathbf{D}(\text{const}) = 0$, поэтому портфель $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ одновременно является портфелем без риска в моделях Марковица и Блэка.

Перейдем к обоснованию эффективности такого портфеля $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ без риска. В этом случае невозможно улучшить (уменьшить) значение уровня ЭР портфеля. Портфель $\mathbf{x} \in X^+$, для которого справедливо соотношение $R_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k R_i x_i \neq \text{const}$, не может доминировать портфель $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$, обладающий нулевым уровнем ЭР. Однако нельзя исключить возможность улучшения (увеличения) значения ожидаемой нормы прибыли портфеля при сохранении не улучшаемого (нулевого) уровня его ЭР. Покажем, что это невозможно, если ограничиваться портфелями, допустимыми в модели Марковица.

Пусть $\mathbf{x} \in X^+ = S_1$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}^*$, причем справедливо равенство $R_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k R_i x_i \equiv c = \text{const}$, т.е. для стратегии $\mathbf{p} = \mathbf{x}$ справедливы равенства $V_{1j} = c$, $j = 1, \dots, n$. Рассмотрим ситуацию $(\mathbf{x}; \mathbf{q}^*)$ в игре $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, где $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$ – ситуация равновесия в игре $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$.

Если ситуация $(\mathbf{x}; \mathbf{q}^*)$, для которой $V_{1j} = c$, $j = 1, \dots, n$, является ситуацией равновесия в игре $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, то согласно свойствам оптимальных стратегий игроков должно выполняться равенство $c = V_{\mathbf{R}}^*$.

Если ситуация $(\mathbf{x}; \mathbf{q}^*)$, для которой $V_{1j} = c$, $j = 1, \dots, n$, не является ситуацией равновесия в игре $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, то, предположив, что $c \geq V_{\mathbf{R}}^*$, получим противоречие, состоящее в том, что для ситуации $(\mathbf{x}; \mathbf{q}^*)$ и числа $V_{\mathbf{R}}^*$ окажутся справедливыми все условия критерия оптимальности стратегий игроков. Полученное противоречие позволяет утверждать, что если существует портфель $\mathbf{x} \in X^+ = S_1$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}^*$, для которого $R_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k R_i x_i \equiv c = \text{const}$, то всегда выполняется неравенство $c < V_{\mathbf{R}}^*$.

Итак, для произвольного $\mathbf{x} \in X^+ = S_1$ справедливы соотношения $\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{D}(R_{\mathbf{x}}) > 0 = \sigma_{\mathbf{x}^*}^{*2}$ или одновременно выполняются соотношения $R_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k R_i x_i \equiv c = \text{const}$, $\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{D}(R_{\mathbf{x}}) = 0 = \sigma_{\mathbf{x}^*}^{*2}$ и $m_{\mathbf{x}} = \mathbf{M}(R_{\mathbf{x}}) = c \leq \mathbf{M}(R_{\mathbf{x}^*}^*) = m_{\mathbf{x}^*}^* = V_{\mathbf{R}}^*$. Если все требования теоремы 2 оказались справедливыми, произвольный портфель, допустимый в модели Марковица, не может доминировать портфель $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$, а вектор $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ является оптимальным по Парето решением задачи (4)–(7), поэтому вектор $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ задает эффективный портфель в модели Марковица (вообще говоря, для произвольного допустимого распределения $\mathbf{q}$).

Вопрос об эффективности портфеля $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ в модели Блэка остается открытым: справедливости всех требований теоремы 2 недостаточно для обоснования отсутствия безрискового портфеля, допустимого в модели Блэка, доминирующего портфель $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$. Даже в случае выполнения всех требований теоремы 2, ЛПР обязано убедиться в экономической целесообразности формирования портфеля $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ без риска: формирование портфеля $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ без риска следует признать экономически корректным, экономически целесообразным и экономически эффективным в том и только в том случае, когда значение цены $V_{\mathbf{R}}^*$ АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ превышает значение доходности любого из безрисковых активов, обращающихся на фондовом рынке.

Теоретико-игровой поиск структуры портфеля, являющегося портфелем без риска в модели Блэка, может оказаться возможным даже в случае нарушения требований теоремы 2.

Для теоретико-игрового поиска структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР в модели Блэка, можно поступить следующим образом. Сначала от исходной матрицы $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ следует перейти к расширенной матрице $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2k) \times n} = (r'_{ij})$, в которой для элементов, расположенных в нечетных строках, выполняются равенства $r'_{2i-1j} = r_{ij}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$, а для элементов, расположенных в четных строках, — $r'_{2ij} = -r_{ij}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$. Возможность теоретико-игрового метода решения задачи (5)–(6), т.е. теоретико-игрового метода оптимизации уровня ЭР портфелей, допустимых в модели Блэка, обосновывает следующее утверждение (Сигал, 2015).

Теорема 3. Пусть в АИ, заданной матрицей $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2k) \times n} = (r'_{ij})$, где $r'_{2i-1j} = r_{ij}$, $r'_{2ij} = -r_{ij}$, r_{ij} — значения норм прибыли активов, отсутствует седловая точка, а второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию. Тогда оптимальная стратегия $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_{2k}^*)$ первого игрока позволяет найти структуру портфеля $\mathbf{x}^* = (x_1^*; \dots; x_k^*)$, где $x_i^* = (p_{2i-1}^* - p_{2i}^*) / \sum_{l=1}^k (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*)$, $i = 1, \dots, k$, обладающего наименьшим уровнем ЭР в модели Блэка.

Как и в случае теоремы 2, при выполнении всех требований теоремы 3 вектор $\mathbf{x}^*$, построенный согласно приведенной в теореме 3 формуле, представляет собой портфель без риска: если в АИ, заданной матрицей $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2k) \times n} = (r'_{ij})$, второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то справедливо равенство $R_{\mathbf{x}^*}^* = \sum_{i=1}^k R_i \cdot x_i^* \equiv V_{\mathbf{R}^*}^* / \sum_{l=1}^k (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*) = \text{const}$, где $V_{\mathbf{R}^*}^*$ — цена АИ, заданной матрицей $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2k) \times n} = (r'_{ij})$, поэтому справедливо равенство

$\min_x \sigma_x^2 = \sigma_x^{*2} = D(R_x^*) = D(\text{const}) = 0$, где σ_x^{*2} – дисперсия СВ $R_x^* = \sum_{i=1}^k R_i x_i^*$, характеризующей нор-

му прибыли портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР. Если число $V_{\mathbf{R}}^{*f} / \sum_{l=1}^k (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*)$ превышает значение доходности любого безрискового актива, обращающегося на фондовом рынке, в этом случае формирование портфеля $\mathbf{x}^*$ по формуле, приведенной в теореме 3, следует признать экономически корректным, экономически целесообразным и экономически эффективным.

R_x в сумме не больше $V_{\mathbf{R}}^{*f} / \sum_{l=1}^k (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*)$, допустимого в модели Блэка, для которого $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$, или отсутствие такой возможности зависит от особенностей матрицы. Сформулируем теорему об эффективности портфеля, найденного методом, обоснованным теоремой 3.

Теорема 4. Пусть в АИ, заданной матрицей $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2k) \times n} = (r'_{ij})$, где $r'_{2i-1j} = r_{ij}$, $r'_{2ij} = -r_{ij}$, r_{ij} – значения норм прибыли активов, отсутствует седловая точка, а второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, а задача линейного программирования $g = u_{k+1} \rightarrow \max$,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k r_{ij} u_i - u_{k+1} = 0, & j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^k u_i = 1, \end{cases}$$

разрешима. Тогда если $\mathbf{u}^* = (u_1^*; \dots; u_{k+1}^*)$ – оптимальное решение этой задачи линейного программирования и выполняется равенство $u_{k+1}^* = V_{\mathbf{R}}^{*f} / \sum_{l=1}^k (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*)$, то оптимальная стратегия $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_{2 \cdot k}^*)$ первого игрока в АИ с матрицей $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2k) \times n} = (r'_{ij})$ позволяет найти эффективный портфель в модели Блэка, а именно портфель $\mathbf{x}^* = (x_1^*; \dots; x_k^*)$ без риска, где $x_i^* = (p_{2i-1}^* - p_{2i}^*) / \sum_{l=1}^k (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*)$, $i = 1, \dots, k$.

Область допустимых решений задачи линейного программирования, участвующей в формулировке теоремы 4, содержит вектор $\mathbf{u}' = (u'_1; \dots; u'_{k+1})$, где $u'_i = (p_{2i-1}^* - p_{2i}^*) / \sum_{l=1}^k (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*)$,

$i = 1, \dots, k$, $u'_{k+1} = V_{\mathbf{R}}^{*f} / \sum_{l=1}^k (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*)$. Если эта задача разрешима, всегда выполняется нера-

венство $u_{k+1}^* \geq V_{\mathbf{R}}^{*f} / \sum_{l=1}^k (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*)$. А если АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ является вполне смешанной игрой и имеет единственную ситуацию равновесия, то при положительности цены игры $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ ($V_{\mathbf{R}}^* > 0$) решение задачи линейного программирования, участвующей в формулировке теоремы 4, задается оптимальной стратегией $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_k^*)$ первого игрока в АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ и $u_{k+1}^* = V_{\mathbf{R}}^*$, а так как при этом окажутся справедливыми все требования теоремы 2, в этом случае оптимальная стратегия $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_k^*)$ позволяет для любого допустимого распределения вероятностей состояний экономической среды найти структуру эффективного портфеля в моделях Марковица и Блэка.

Заметим, что суть теоремы 2 сводится к следующему утверждению: если в АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, где r_{ij} – значения норм прибыли активов, отсутствует седловая точка, а второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, оптимальная стратегия $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_k^*)$ первого игрока задает решение задачи линейного программирования, участвующей в формулировке теоремы 4, с дополнительными требованиями неотрицательности $u_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$, при этом $u_{k+1}^* = V_{\mathbf{R}}^*$.

ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ МАРКОВИЦА ЗАДАЧИ ВЫБОРА ЭФФЕКТИВНОГО ПОРТФЕЛЯ

Применение теоремы 2 не требует знания точных истинных законов распределений всех СВ, характеризующих нормы прибыли активов. По этой причине теорема 2 позволяет обобщить традиционную модель Марковица на случай, когда неизвестны значения вероятностей состояний экономической среды (фондового рынка).

Обобщенные модели задачи выбора эффективного портфеля представляют собой задачи трехкритериальной оптимизации, при этом их вид зависит от имеющей место информационной ситуации относительно неопределенности поведения экономической среды. Например, в поле четвертой ИС добавляется третий критерий: энтропия Шеннона, значение которой, согласно принципу максимума Гиббса – Джейнса (см., например, (Трухаев, 1981, с. 99)), требуется максимизировать. Как и в случае традиционной модели Марковица, для достижения своих целей ЛПР управляет значениями долей. Но все усложняется тем, что в обобщенной модели неизвестны значения вероятностей состояний экономической среды.

Предположим, что значения всех чисел r_{ij} известны, а точные истинные значения вероятностей q_j неизвестны. В этом случае математические ожидания m_i , дисперсии σ_i^2 СВ, характеризующих нормы прибыли активов, и ковариации c_{ij} – не числа, а функции (1), (2) и (3), соответственно, нескольких переменных, аргументами которых являются неизвестные вероятности $q_1, \dots, q_n$ состояний экономической среды. Следовательно, числовые характеристики $m_x = \sum_{i=1}^k m_i x_i$, $\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k c_{il} x_i x_l$ СВ $R_x = \sum_{i=1}^k R_i x_i$, характеризующей норму прибыли портфеля x , – также не числа, а функции нескольких переменных, аргументами которых являются неизвестные вероятности $q_1, \dots, q_n$ состояний экономической среды и значения долей $x_1, \dots, x_k$ активов.

Если имеет место ИС I_4 , можно применить энтропийный подход, при этом обобщенная модель Марковица задачи выбора эффективного портфеля в поле четвертой ИС представляет собой следующую задачу трехкритериальной оптимизации (Сигал, 1998а, с. 35):

$$H(\mathbf{q}) = H(q_1; \dots; q_n) = - \sum_{j=1}^n q_j \ln q_j \rightarrow \max_{\mathbf{q}}, \quad (8)$$

$$m_x = \sum_{i=1}^k m_i x_i \rightarrow \max_x, \quad (9)$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k c_{il} x_i x_l \rightarrow \min_x, \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^k x_i = 1, \quad (12)$$

$$q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (13)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (14)$$

Заметим, что задача (8)–(14) естественным образом может быть приведена к задаче (4)–(7) двухкритериальной оптимизации, т.е. к традиционной модели Марковица. При выполнении ограничений (11) и (13) энтропия Шеннона (8) достигает своего наибольшего значения при равномерном распределении вероятностей, т.е. $\max_{\mathbf{q}} H(\mathbf{q}) = H(\mathbf{q}) = \ln n$, где $\mathbf{q}$

$\mathbf{q} = \left(\frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \mathbf{J}_n$ — n -мерный вектор. Поэтому, подставляя в формулы для характеристик m_i , σ_i^2 , c_{ij} , оценки $q_1 = \dots = q_n = 1/n$, задачу (8)—(14) можно привести к соответствующей задаче (4)—(7). Собственно, такой подход означает замену неизвестных значений соответствующих числовых характеристик СВ R_i и R_x их точечными статистическими оценками.

Определение 10. Эффективным портфелем в обобщенной модели Марковица в поле четвертой ИС для заданного распределения $\mathbf{q}$ вероятностей состояний будем называть портфель $\mathbf{x}$, являющийся оптимальным по Парето решением задачи (4)—(7), полученной из задачи (8)—(14) подстановкой значений всех числовых характеристик m_i , σ_i^2 , c_{ij} , вычисленных для заданного распределения $\mathbf{q}$.

Определение 11. Эффективным портфелем в обобщенной модели Марковица в поле четвертой ИС для любого распределения $\mathbf{q}$ вероятностей состояний будем называть портфель с такой структурой $\mathbf{x}$, что любой вектор $(\mathbf{q}; \mathbf{x})$ для всех допустимых распределений $\mathbf{q}$ является оптимальным по Парето решением задачи (8)—(14).

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть в игре $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, где r_{ij} — значения норм прибыли активов, отсутствует седловая точка, а второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию. Тогда оптимальная стратегия $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_k^*)$ первого игрока задает эффективный портфель в обобщенной модели Марковица в поле четвертой ИС для любого распределения $\mathbf{q}$ вероятностей состояний, а именно структуру портфеля $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ без риска.

С учетом определения 11, можно утверждать: если справедливы все требования теоремы 5, то структура портфеля без риска всегда будет одной и той же и будет совпадать с оптимальной стратегией первого игрока в соответствующей АИ; при этом этот портфель без риска будет эффективным портфелем в модели Марковица для всех допустимых распределений вероятностей состояний экономической среды.

Обобщенные модели Марковица задачи выбора эффективного портфеля в поле третьей ИС (Сигал, 2015) представляют собой задачи (8)—(14) трехкритериальной оптимизации с дополнительными ограничениями для возможных значений вероятностей $q_1, \dots, q_n$. Подобно задаче (8)—(14) обобщенная модель Марковица задачи выбора эффективного портфеля в поле третьей ИС может быть приведена к задаче (4)—(7) двухкритериальной оптимизации, т.е. к традиционной модели Марковица. Однако в случае обобщенной модели Марковица задачи выбора эффективного портфеля в поле третьей ИС для оценки неизвестных значений вероятностей состояний экономической среды целесообразно применять формулы Фишберна (Лившиц, Сигал, 2014).

Рассмотрим обобщенную модель Марковица задачи выбора эффективного портфеля в поле ИС I_5 (Сигал, 1998а, с. 40):

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k c_{il} x_i x_l \rightarrow \min_{\mathbf{x}}, \quad (15)$$

$$m_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k m_i x_i \rightarrow \max_{\mathbf{x}}, \quad (16)$$

$$m_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k m_i x_i \rightarrow \min_{\mathbf{q}}, \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1, \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^k x_i = 1, \quad (19)$$

$$q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (20)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (21)$$

Очевидно, что задача (16)–(21) представляет собой АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$. В этом случае процесс принятия решений осуществляется по правилам решения АИ. Этот факт приводит к следующему определению эффективности портфеля для полученной обобщенной модели Марковица.

Определение 12. *Эффективным портфелем в обобщенной модели Марковица в поле пятой ИС будем называть портфель с такой структурой $\mathbf{x}$, что вектор $\mathbf{p} = \mathbf{x}$ характеризует оптимальную стратегию первого игрока в АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, где r_{ij} – значения норм прибыли активов.*

Если АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ имеет седловую точку, для этой игры существует решение в чистых стратегиях, а оптимальной стратегией первого игрока будет его максиминная чистая стратегия, при этом эффективный портфель в обобщенной модели Марковица в поле пятой ИС будет однородным портфелем, а именно портфелем, составленным из актива i^* , соответствующего максиминной чистой стратегии первого игрока. Ситуация несколько усложняется в случае наличия в платежной матрице $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ нескольких седловых элементов.

Если АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ не имеет седловой точки и при этом в ней ситуация равновесия $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$ является единственной, то оптимальная стратегия $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ первого игрока задает единственный эффективный портфель. Очевидно, при этом портфель $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ не обязательно окажется портфелем без риска. Если в АИ $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то оптимальная стратегия $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_k^*)$ первого игрока задает эффективный портфель без риска.

Если игра $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ не имеет седловой точки и при этом в ней несколько различных ситуаций равновесия, то для окончательного выбора структуры эффективного портфеля следует оптимизировать значение критерия (15) на множестве оптимальных стратегий первого игрока для некоторой оптимальной стратегии второго игрока.

Если в поле четвертой ИС наиболее типичную точечную оценку распределения вероятностей состояний экономической среды задает вектор $\mathbf{q} = \left(\frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \mathbf{J}_n$, то в поле пятой ИС это будет оптимальная стратегия $\mathbf{q}^*$ второго игрока.

В поле пятой ИС игра $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ является моделью задачи поиска эффективного портфеля, тогда как в поле других ИС игру $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ нельзя считать моделью этой задачи: в поле других ИС игра $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ лишь характеризует ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля. В поле других ИС теоретико-игровой метод поиска эффективного портфеля может применяться лишь как инструмент: решение соответствующей АИ при соблюдении соответствующих требований позволяет найти (для любого распределения вероятностей состояний экономической среды) эффективный портфель (всегда являющийся портфелем, обладающим наименьшим уровнем ЭР), что и обосновывает корректность применения теоретико-игрового подхода в этих случаях.

ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОРТФЕЛЕЙ, НАЙДЕННЫХ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫМ МЕТОДОМ

Пример 1. Имеются результаты наблюдений норм прибылей активов $k = 3$ видов за $n = 3$ периода:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{3 \times 3} = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 5 \\ 70 & 12 & -50 \\ 26 & 30 & -30 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Найти эффективный портфель.

Ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля характеризует АИ с матрицей (22), которая содержит седловой элемент, так как $\alpha = \beta$, где $\alpha = \max_i \alpha_i = \max \{5; -50; -30\} = 5$, $\beta = \min_j \beta_j = \min \{70; 30; 5\} = 5$. Требования теоремы 2 нарушены. Но для расширенной матрицы

могут выполняться все требования теоремы 3. По матрице (22) построим матрицу $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{6 \times 3} = (r'_{ij})$, в которой $r'_{2,i-1j} = r_{ij}$, $r'_{2,ij} = -r_{ij}$:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{6 \times 3} = (r'_{ij}) = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 5 \\ -15 & -12 & -5 \\ 70 & 12 & -50 \\ -70 & -12 & 50 \\ 26 & 30 & -30 \\ -26 & -30 & 30 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Так как $\alpha = 5 < 30 = \beta$, то АИ с матрицей (23) не содержит седловой точки и не имеет решения в чистых стратегиях. В (Сигал, 2015) приведено решение АИ, заданной матрицей (23): $\mathbf{p}^* \approx (0,8970; 0; 0; 0,0501; 0; 0,0529)$, $\mathbf{q}^* \approx (0,3104; 0,0674; 0,6222)$, $V_{\mathbf{R}}^* \approx 8,58$. Очевидно, что для АИ с матрицей (23) все требования теоремы 3 справедливы, поэтому можно найти портфель, обладающий наименьшим уровнем ЭР в модели Блэка, а именно портфель $\mathbf{x}^*$ без риска:

$$\sum_{l=1}^3 (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*) \approx (0,8970 - 0) + (0 - 0,0501) + (0 - 0,0529) = 0,794,$$

$$x_i^* = \frac{p_{2i-1}^* - p_{2i}^*}{\sum_{l=1}^3 (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*)} \approx \frac{p_{2i-1}^* - p_{2i}^*}{0,794}, \quad i = 1, 2, 3,$$

откуда $\mathbf{x}^* \approx (1,1297; -0,0630; -0,0667)$, при этом $V_{\mathbf{R}}^* / \sum_{l=1}^3 (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*) \approx 8,58 / 0,794 = 10,8$,

Согласно теореме 3 портфель $\mathbf{x}^* \approx (1,1297; -0,0630; -0,0667)$ задает структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР в модели Блэка.

Исследуем найденный портфель на эффективность в модели Блэка. Составим задачу линейного программирования:

$$g = u_4 \rightarrow \max, \quad \begin{cases} 15u_1 + 12u_2 + 5u_3 - u_4 = 0, \\ 70u_1 + 12u_2 - 50u_3 - u_4 = 0, \\ 26u_1 + 30u_2 - 30u_3 - u_4 = 0, \\ u_1 + u_2 + u_3 = 1. \end{cases}$$

Решение этой задачи линейного программирования имеет вид:

$$\mathbf{u}^* \approx (1,1297; -0,0630; -0,0667; 10,8), \quad g^* = u_4^* = 10,8, \quad \text{при этом} \quad g^* = V_{\mathbf{R}}^* / \sum_{l=1}^3 (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*).$$

Согласно теореме 4 можно утверждать, что портфель $\mathbf{x}^* \approx (1,1297; -0,0630; -0,0667)$ без риска будет эффективным портфелем в модели Блэка.

Таким образом, портфель $\mathbf{x}^* \approx (1,1297; -0,0630; -0,0667)$ без риска, найденный теоретико-игровым методом, является эффективным портфелем в модели Блэка, при этом этот вектор задает эффективный портфель в модели Блэка для любого допустимого распределения вероятностей состояний экономической среды.

Пример 2. Имеются результаты наблюдений норм прибылей активов $k = 6$ видов за $n = 4$ периода:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{6 \times 4} = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 16,88 & 45,56 & 13,74 & 18,79 \\ 40,19 & 7,33 & 42,86 & -8,70 \\ 27,56 & -4,29 & 13,81 & 22,95 \\ -16,67 & 50,00 & -6,67 & 28,57 \\ 2,00 & 17,65 & 11,67 & 31,34 \\ 6,67 & -5,00 & 7,89 & -2,44 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Найти эффективный портфель.

Ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля характеризует АИ с матрицей (24), которая не содержит седлового элемента. В (Сигал, 2015) найдено решение АИ, заданной матрицей (24): $\mathbf{p}^* \approx (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$, $\mathbf{q}^* \approx (0,1671; 0,0707; 0,3491; 0,4131)$, $V_{\mathbf{R}}^* \approx 18,60$.

Очевидно, что для АИ с матрицей (24) все требования теоремы 2 (как и теоремы 5) справедливы, поэтому оптимальная стратегия $\mathbf{p}^* \approx (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$ первого игрока задает эффективный портфель в модели Марковица, а именно портфель $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ без риска. При этом для любого допустимого распределения вероятностей состояний экономической среды для возможных

значений дискретной СВ $R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^k R_i x_i^*$ справедливы равенства $r_j^* = V_{1j}^* = \sum_{i=1}^6 (r_{ij} p_i^*) = V_{\mathbf{R}}^* \approx 18,60$,

$j = 1, \dots, 4$, т.е. $R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^6 R_i x_i^* = \sum_{i=1}^6 R_i p_i^* \equiv V_{\mathbf{R}}^* = \text{const}$, поэтому $\sigma_{\mathbf{x}}^{*2} = \mathbf{D}(R_{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{D}(V_{\mathbf{R}}^*) = \mathbf{D}(\text{const}) = 0$.

Согласно теореме 5 можно утверждать, что оптимальная стратегия $\mathbf{p}^* \approx (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$ первого игрока задает эффективный портфель в обобщенной модели Марковица в поле четвертой ИС для любого распределения $\mathbf{q}$ вероятностей состояний, а именно портфеля $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ без риска.

От исходной матрицы (24) перейдем к расширенной матрице: по матрице (24) построим матрицу $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{12 \times 4} = (r'_{ij})$, в которой $r'_{2i-1j} = r_{ij}$, $r'_{2ij} = -r_{ij}$. В АИ с матрицей $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{12 \times 4} = (r'_{ij})$ седловая точка отсутствует, а ее решение имеет вид $\mathbf{p}^* \approx (0,2687; 0; 0,1901; 0; 0,2091; 0; 0; 0; 0,3321; 0; 0; 0)$, $\mathbf{q}^* \approx (0,1671; 0,0707; 0,3491; 0,4131)$, $V_{\mathbf{R}'}^* \approx 18,60$. Для АИ с матрицей $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{12 \times 4} = (r'_{ij})$ все требования теоремы 3 справедливы, поэтому можно найти структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР в модели Блэка, а именно портфеля $\mathbf{x}^*$ без риска:

$$\sum_{l=1}^6 (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*) = 1,$$

$$x_i^* = (p_{2i-1}^* - p_{2i}^*) / \sum_{l=1}^6 (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*) = (p_{2i-1}^* - p_{2i}^*) / 1 = p_{2i-1}^* - p_{2i}^*, \quad i = 1, \dots, 6,$$

откуда $\mathbf{x}^* \approx (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$, при этом $V_{\mathbf{R}'}^* / \sum_{l=1}^6 (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*) \approx 18,60 / 1 = 18,60$.

Согласно теореме 3 портфель $\mathbf{x}^* \approx (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$ задает структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР в модели Блэка.

Исследуем найденный портфель на эффективность в модели Блэка. Составим задачу линейного программирования:

$$g = u_7 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 16,88u_1 + 40,19u_2 + 27,56u_3 - 16,67u_4 + 2,00u_5 + 6,67u_6 - u_7 = 0, \\ 45,56u_1 + 7,33u_2 - 4,29u_3 + 50,00u_4 + 17,65u_5 - 5,00u_6 - u_7 = 0, \\ 13,74u_1 + 42,86u_2 + 13,81u_3 - 6,67u_4 + 11,67u_5 + 7,89u_6 - u_7 = 0, \\ 18,79u_1 - 8,70u_2 + 22,95u_3 + 28,57u_4 + 31,34u_5 - 2,44u_6 - u_7 = 0, \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 1. \end{cases}$$

Решение этой задачи линейного программирования имеет вид:

$$\mathbf{u}^* \approx (-0,443; 1388620,837; 838095,174; 245905,832; 990973,749; -3463594,148; 53687091,252),$$

$$g^* = u_7^* \approx 53687091,252.$$

Справедливость соотношения $u_7^* \approx 53687091,252 > V_{\mathbf{R}}^* / \sum_{l=1}^6 (p_{2,l-1}^* - p_{2,l}^*) \approx 18,60$ означает, что не все требования теоремы 4 оказались справедливыми.

Таким образом, портфель $\mathbf{x}^* \approx (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$ без риска, найденный теоретико-игровым методом, представляет собой эффективный портфель в модели Марковица, при этом этот вектор определяет эффективный портфель в модели Марковица для любого допустимого распределения вероятностей состояний экономической среды, но вектор $\mathbf{x}^* \approx (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$ без риска не является эффективным портфелем в модели Блэка, при этом этот вектор не будет эффективным портфелем в модели Блэка для любого допустимого распределения вероятностей состояний экономической среды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены два теоретико-игровых метода поиска структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономического риска в модели Марковица и один теоретико-игровой метод поиска структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономического риска в модели Блэка. Суть этих методов сводится к следующим утверждениям.

1. Если игра $\Gamma_{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{C} \rangle$ задана положительно определенной ковариационной матрицей $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{k \times k} = (c_{il})$ СВ, характеризующих нормы прибылей активов, и в этой игре существует вполне смешанная ситуация равновесия $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$, то игра $\Gamma_{\mathbf{C}}$ является вполне смешанной, оптимальные стратегии $\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*$ в игре $\Gamma_{\mathbf{C}}$ — единственные, при этом портфель $\mathbf{x}^* = \mathbf{q}^* = \mathbf{p}^* = \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{C}^{-1} / \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{J}_k^T$ будет эффективным портфелем, как в модели Блэка, так и в модели Марковица. В этом случае существует единственный портфель, обладающий наименьшим уровнем экономического риска.

2. Если в игре $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, заданной матрицей $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$, где r_{ij} — значение нормы прибыли актива вида i в условиях, когда экономическая среда оказалась в своем возможном состоянии j , отсутствует седловая точка, а второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то портфель $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$, структура которого совпадает с оптимальной стратегией первого игрока, является портфелем без риска и задает эффективный портфель в модели Марковица, при этом портфель $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ будет эффективным портфелем в модели Марковица для любого допустимого распределения вероятностей состояний экономической среды.

3. Если в игре, заданной матрицей $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2,k) \times n} = (r'_{ij})$, где $r'_{2,i-1j} = r_{ij}$, $r'_{2,ij} = -r_{ij}$, r_{ij} — значение нормы прибыли актива вида i в условиях, когда экономическая среда оказалась в своем возможном состоянии j , отсутствует седловая точка, а второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то $\mathbf{x}^* = (x_1^*; \dots; x_k^*)$ ($x_i^* = (p_{2,i-1}^* - p_{2,i}^*) / \sum_{l=1}^6 (p_{2,l-1}^* - p_{2,l}^*)$, $i = 1, \dots, k$) будет портфелем без риска, при этом для обоснования эффективности этого портфеля в модели Блэка необходимо решить задачу линейного программирования, система ограничений которой состоит из $k + 1$ линейного равенства. Если построенная задача линейного программирования

разрешима и экстремальное значение ее целевой функции совпадет с постоянным значением нормы прибыли портфеля $\mathbf{x}^* = (x_1^*; \dots; x_k^*)$ без риска, то этот портфель будет эффективным портфелем в модели Блэка для любого допустимого распределения вероятностей состояний экономической среды.

Применение теоретико-игровых методов (за исключением метода, основанного на решении игры, заданной ковариационной матрицей) поиска эффективного портфеля не требует знания точных истинных законов распределений всех СВ, характеризующих нормы прибыли активов. Это позволяет обобщить традиционную модель Марковица на случай, когда неизвестны значения вероятностей состояний экономической среды (фондового рынка). Вид обобщенной модели Марковица задачи выбора эффективного портфеля зависит от имеющей место информационной ситуации. Как правило, обобщенные модели Марковица задачи выбора эффективного портфеля представляют собой задачи трехкритериальной оптимизации. Для обобщенных моделей Марковица возможен корректный теоретико-игровой метод поиска эффективного портфеля. В поле пятой информационной ситуации, когда интересы инвестора и экономической среды антагонистичны (что отражает представление ЛПР о нецелесообразности рисковать), игра $\Gamma_R = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ не только характеризует ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля, но и моделирует ее.

Корректный теоретико-игровой метод поиска эффективного портфеля основан на концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр. Суть комбинированного применения статистических и антагонистических игр заключается в отождествлении исходной статистической игры, моделирующей ситуацию принятия управленческих решений, с антагонистической игрой, платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания исходной статистической игры.

В случае, когда портфель, найденный теоретико-игровым методом, оказался эффективным портфелем в соответствующей модели (например, оказались справедливыми все условия теоремы 5), и формирование этого портфеля можно признать экономически корректным, экономически целесообразным и экономически эффективным, то при принятии решений о формировании эффективного портфеля инвестор может ориентироваться на соответствующую оптимальную стратегию в антагонистической игре, характеризующей процесс принятия управленческих решений. Однако согласно предпочтениям инвестора, имеющейся у него информации, его профессиональной квалификации, компетентности, опыта и интуиции структура эффективного портфеля, который он решит сформировать, может отличаться от структуры портфеля, найденного теоретико-игровым методом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Блекуэлл Д., Гиршик М.А. (1958). Теория игр и статистических решений. М.: Иностранная литература.
- Вальд А. (1960). Последовательный анализ. М.: Физматгиз.
- Воробьев Н.Н. (1985). Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука.
- Лившиц В.Н., Сигал А.В. (2014). Об энтропийном анализе переходной экономики // *Экономика и математические методы*. Т. 50. № 3. С. 86–104.
- Сигал А.В. (2015). Комбинированное применение статистических и антагонистических игр в теории портфеля // *Аудит и финансовый анализ*. № 6. С. 91–112.
- Сигал А.В. (1998а). Основы современной теории портфеля ценных бумаг. Симферополь: КЭИ КНЭУ.
- Сигал А.В. (1998б). Применение теории игр в теории портфеля // *Машинная обработка информации: межвед. научн. сборн.* Вып. 61. Киев: КНЭУ. С. 154–160 (на укр. яз.).
- Сигал А.В. (2014). Теория игр для принятия решений в экономике: монография. Симферополь: ДИАЙПИ.
- Сюдсетер К., Стрем А., Берк П. (2000). Справочник по математике для экономистов. СПб.: Экономическая школа.
- Трухаев Р.И. (1981). Модели принятия решений в условиях неопределенности. М.: Наука.
- Markowitz H.M. (1952). Portfolio Selection // *Journal of Finance*. March. Vol. 7. No. 1. P. 77–91.

- Markowitz H.M.** (1959). Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. N.Y.: John Wiley & Sons.
- Neumann J. von** (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele // *Mathematische Annalen*. Vol. 100. S. 295–320.
- Neumann J. von, Morgenstern O.** (1944). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton Univ. Press.
- Wald A.** (1949). Statistical Decision Functions // *Ann. Math. Statist.* Vol. 20. No. 2. P. 165–205.
- Wald A.** (1950). Statistical Decision Functions. N.Y.: John Wiley & Sons.
- Wald A.** (1945). Statistical Decision Functions which Minimize the Maximum Risk // *Ann. of Math.* Vol. 46. P. 265–280.

Поступила в редакцию
12.05.2016 г.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Blackwell D., Girshick M.A.** (1958). Theory of Game and Statistical Decisions. Moscow: Inostrannaja literature (in Russian).
- Livchits V.N., Sigal A.V.** (2014). On Entropy Analysis of Transitional Economy. *Economics and Mathematical Methods*, 50, 3, 86–104 (in Russian).
- Markowitz H.M.** (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, March, 7, 1, 77–91.
- Markowitz H.M.** (1959). Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. N.Y.: John Wiley & Sons.
- Neumann J. von, Morgenstern O.** (1944). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton Univ. Press.
- Neumann J. von** (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100, 295–320.
- Sigal A.V.** (1998a). Fundamentals of the Modern Portfolio Theory of the Securities. Simferopol: Crimean Economic Institute of the Kyiv National Economic University (in Russian).
- Sigal A.V.** (1998b). The Application of the Theory of Games in the Portfolio Theory. *Machine Information Processing* 61. Kiev: Kiev National Economic University, 154–160 (in Ukrainian).
- Sigal A.V.** (2014). Theory of Games for Decision-Making in Economics. Simferopol: DIAPI (in Russian).
- Sigal A.V.** (2015). Combined Application of Statistical and Antagonistic Games in Portfolio Theory. *Audit and Financial Analysis*, 6, 91–112 (in Russian).
- Syudseter K., Strem A., Berck P.** (2000). Mathematical Handbook for Economists. St.-Petersburg: Economic School (in Russian).
- Trukhaev R.I.** (1981). Models of Decision-Making in Conditions of Uncertainty. Moscow: Nauka (in Russian).
- Vorobyov N.N.** (1985). Theory of Games for Economists-Cybernetics. Moscow: Nauka (in Russian).
- Wald A.** (1945). Statistical Decision Functions which Minimize the Maximum Risk. *Ann. of Math.*, 46, 265–280.
- Wald A.** (1949). Statistical Decision Functions. *Ann. Math. Statist.*, 20, 2, 165–205.
- Wald A.** (1950). Statistical Decision Functions. N.Y.: John Wiley & Sons.
- Wald A.** (1960). Sequential Analysis. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).

Received 12.05.2016

About the effectiveness of portfolios found using the game-theoretic method

A. V. Sigal

Abstract. The article discusses the features, advantages and disadvantages of using the concept of the combined application of statistical and antagonistic games to determine the portfolio structure in different information situations that has the lowest level of economic risk. Special attention is given to substantiation of the appropriateness of game-theoretic methods for finding the portfolio structure, which has the lowest level of economic risk, and to the substantiation of the effectiveness of portfolios, the structure of which is found using the game-theoretic method. The essence of the combined application of statistical and antagonistic games lies in identification of the initial statistical game modeling a management decisions with an antagonistic game, whose payoff matrix coincides with the payoff matrix of the initial statistical game. In the article, antagonistic games are defined as finite matrix games, i.e. games of two persons with zero-sum. Statistical and antagonistic games have the same formal structure. This fact gives the theoretical and practical options to apply combinations of statistical and antagonistic games. Under certain circumstances, solving the corresponding antagonistic game leads to finding the structure of the portfolio that has the lowest level of risk (under certain conditions, for any valid probability distribution of the economic environment states).

Keywords: statistical game, antagonistic game, information situation, portfolio structure, economic risk, portfolio effectiveness.

JEL Classification: C720.

ⁱAnatoliy V. Sigal – Doct. Sc. (Economic), Associate Professor, Professor at Department of Business-Informatics and Math Modeling, V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Institute of Economics and Management; Russia, Simferopol, ksavo3@gmail.com.