ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2018, том 54, № 2, с. 1–9

РУБРИКА

РЕТРОСПЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ СТРУКТУРНЫХ СДВИГОВ В МОДЕЛЯХ СОУ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ. ЧАСТЬ 1*

© 2018 г. С. А. Айвазян[i], Б. Е. Бродский[ii]

Аннотация. Работа посвящена ретроспективному анализу структурных сдвигов в моделях систем одновременных уравнений (СОУ) с переменной структурой. Приведен обзор литературы в данной области и постановка задачи ретроспективного обнаружения структурных сдвигов, рассмотрены основные предположения о зависимости наблюдений: модели сильного перемешивания и Ψ-слабой зависимости, а также главные критерии эффективности метода ретроспективного анализа. Предложен новый метод ретроспективного обнаружения структурных сдвигов и исследованы его свойства. Сформулированы теоремы о сходимости к нулю вероятности ошибки 1 и 2-го рода для предложенного метода с ростом объема выборки наблюдений. Представлены результаты имитационного моделирования предложенного метода. В отличие от ранее опубликованных работ в статье основное внимание уделено специфике построения макроэконометрических моделей с учетом множественных структурных сдвигов. Рассмотрено обоснование метода ретроспективного обнаружения множественных структурных сдвигов, имитационное моделирование предложенного метода, а также эконометрические приложения к задачам макроэконометрического моделирования экономик США и России. В частности, исследована модель экономики США Клейна (обнаружен структурный сдвиг 1929 г.), а также дезагрегированная модель российской экономики (обнаружены структурные сдвиги в 2002 и 2010 г.). Полученные результаты имитационных экспериментов показывают, что предложенный метод по своим статистическим характеристикам не уступает известным методам и позволяет эффективно обнаруживать моменты структурных сдвигов в системах одновременных уравнений. я

Ключевые слова: модель СОУ, эконометрический анализ, ретроспективное обнаружение, структурный сдвиг, множественные структурные сдвиги, ошибка 1 рода, ошибка 2 рода, имитационное моделирование, макроэконометрические модели.

Классификация JEL: C30, C51.

DOI:

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача ретроспективного обнаружения структурных сдвигов подробно исследована в одномерном случае: в 1980–2010-х годах было предложено много методов ее решения в реализациях случайных последовательностей и временных рядов (см., например, (Page, 1955; Girshick, Rubin, 1952; Aivazian, 1959; Ширяев, 1961, 1963а, 1963б, 1963в, 1965; Hinkley, 1969; Zacks, 1983; Csörgö, Horváth, 1988, 1997; Brodsky, Darkhovsky, 2000; Tartakovsky, Nikiforov, Basseville, 2014)). Намного меньше известно о подобных тестах в многомерном контексте, т.е. для обнаружения структурных сдвигов в линейных и нелинейных стохастических моделях. Это связано со следующими обстоятельствами:

1) в многомерных моделях разладка обычно происходит в некоторых коэффициентах;

2) все выходные координаты модели статистически взаимосвязаны через модель;

3) широко используемые модели временных рядов не работают в многомерном случае.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-03359).

[i] **Сергей Артемьевич Айвазян** – д.ф-м.н., зам. директора ЦЭМИ РАН по научной работе, 117418, Москва, Нахимовский проспект, д. 47; aivazian@cemi.rssi.ru.

[ii] **Борис Ефимович Бродский** – д.ф-м.н., зав.лаб. ЦЭМИ РАН, 117418, Москва, Нахимовский проспект, д. 47; bbrodsky@yandex.ru.

Литература по методам обнаружения структурных сдвигов в линейных и нелинейных многомерных моделях крайне немногочисленна (см, например, (Bai, Lumsdaine, Stock, 1998; Chu, Stinchcombe, White, 1996; Zeileis et al., 2005)). Цель данной работы – предложить работоспособный метод обнаружения структурных сдвигов в многомерном случае и исследовать его статистичесаие характеристики.

Вначале кратко опишем основные группы переменных в моделях СОУ. Эти переменные подразделяются на группы: *экзогенные* (определенные вне рассматриваемой стохастической системы); *эндогенные* (определенные внутри системы); *предетерминированные* (определяемые на предыдущих этапах функционирования этой системы).

Пусть $Y_t = (y_t^1,\ldots,y_t^m)'$ – вектор эндогенных переменных модели; $Y_t^1 = (y_t^1,\ldots,y_t^{m_1})'$ – вектор эндогенных переменных для регрессионных уравнений модели; $Y_t^2 = (y_t^{(m_1+1)},\ldots,y_t^{(m_1+m_2)})'$ – вектор эндогенных переменных для балансовых тождеств; $X_t = (x_t^1,\ldots,x_t^k)'$ – вектор предетерминированных переменных, включая все экзогенные переменные и свободный член. Тогда структурная форма модели СОУ может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} &B_1Y_t^1 + B_2Y_t^2 + C_1X_t = \Delta_t;\\ &B_3Y_t^1 + B_4Y_t^2 + C_2X_t = 0_{m_2}, \quad t = 1,\ldots,n\tau, \end{aligned} \tag{1}$$

где B_1 – матрица размера $m_1 \times m_1$; B_2 – $m_1 \times m_2$-матрица; B_3 – $m_2 \times m_1$-матрица; B_4 – $m_2 \times m_2$-матрица; $\Delta_t = (\delta_t^1,\ldots,\delta_t^{m_1})'$ – вектор случайных шумов в регрессионных уравнениях рассматриваемой системы. Эта система может быть преобразована к виду:

$$Y_t = \Pi X_t + \varepsilon_t, \qquad t = 1,\ldots,N, \tag{2}$$

где Y_t – $m \times 1$- вектор эндогенных переменных модели; X_t – $k \times 1$- вектор предетерминированных переменных; Π – матрица размера $k \times m$, которая может измениться в неизвестные моменты структурных сдвигов $n_1 = [\theta_1 N],\ldots,n_p = [\theta_p N]$. Здесь $0 \le \theta_1 < \ldots < \theta_p \le 1$; ε_t – вектор случайных шумов; момент t может изменяться в диапазоне $1,\ldots,N$ (N – объем выборки).

Система (2) называется *редуцированной* (*приведенной*) формой модели СОУ с переменной структурой. Рассматриваемая задача состоит в оценивании неизвестных моментов структурных сдвигов $n_1 = [\theta_1 N],\ldots,n_p = [\theta_p N]$, где $0 \le \theta_1 < \ldots < \theta_p \le 1$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим более сложную задачу. Пусть задана спецификация многомерной СОУ со структурными сдвигами:

$$Y(n) = \Pi X(n) + \nu_n, \quad n = 1, 2,\ldots, \tag{3}$$

где $Y(n) = (y_{1n},\ldots,y_{Mn})'$ – вектор эндогенных переменных; $X(n) = (x_{1n},\ldots,x_{Kn})'$ – вектор предетерминированных переменных; $\nu_n = (\nu_{1n},\ldots,\nu_{Mn})'$ – вектор случайных шумов; «$'$» – символ матричного транспонирования.

Известно, что $M \times K$-матрица Π резко изменяется в некоторые моменты. Пусть $\vartheta = (\theta_1,\ldots,\theta_k)$, $k \ge 1$, – вектор неизвестных параметров структурных сдвигов такой, что $0 \equiv \theta_0 < \beta \le \theta_1 < \ldots < \theta_k \le \alpha < \theta_{k+1} \equiv 1$. Здесь $\Pi(\vartheta,n) = \sum_{i=1}^{k+1} a_i([\theta_{i-1}N] < n \le [\theta_i N])$, где $a_i \ne a_{i+1}$, $i = 1,\ldots,k$, – неизвестные векторы. Предположим, что $A(\theta_i,\theta_{i+1}) = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} V(s)ds$.

2.1. Предположения. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbf{P})$. Рассмотрим фильтрацию $\{\mathcal{F}_n\}$, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \mathcal{F}_n \subset \mathfrak{F}$, где $\mathcal{F}_n$ – объем информации, доступной к моменту n. Принятая здесь система предположений основана на двух правдоподобных посылках.

Посылка 1. Статистическая зависимость между прошлым и будущим наблюдаемых феноменов ослабевает с увеличением расстояния между ними.

Эта посылка может быть формализована в виде следующих предположений.

Предположение 1 (перемешивание). Пусть $\mathcal{H}_1$ м $\mathcal{H}_2$ – две σ-алгебры из $\mathfrak{F}$. Рассмотрим меру зависимости между $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$:

$$\psi(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2) = \sup_{A\in\mathcal{H}_1,\, B\in\mathcal{H}_2,\, \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\neq 0}\left|\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)} - 1\right|.$$

Предположим, что $\{y_n\},\ n\geq 1$ – последовательность случайных величин на $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbf{P})$. Обозначим через $\mathfrak{F}_s^t = \sigma\{y_i : s\leq i\leq t\},\ \ 1\leq s\leq t<\infty$ – минимальную σ-порожденную случайными величинами $y_i,\ \ s\leq i\leq t$. Определим $\psi(n) = \sup\limits_{t\geq 1}\ \psi(\mathfrak{F}_1^t, \mathfrak{F}_{t+n}^{\infty})$.

Определение 1. Говорят, что случайная последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет условию ψ *-перемешивания*, если функция $\psi(n)$ (которая также называется коэффициентом ψ -перемешивания) стремится к нулю при $n\to\infty$.

Условие ψ -перемешивания выполняется во многих практических случаях. В частности, для цепи Маркова (не обязательно стационарной), если $\psi(n)<1$ для некоторого n, то $\psi(k)\to 0$ по меньшей мере экспоненциально при $k\to\infty$ (Bradley, 2005, theorem 3.3).

Для любого $\varepsilon>0$ определим число $\phi_0(\varepsilon)\geq 1$ из условия $\psi(l)\leq\varepsilon$ для $l\geq\phi_0(\varepsilon)$.

Предположение 2. На сегодняшний день чаще используется условие *слабой зависимости* наблюдений.

Определение 2 (Doukhan, Louhichi, 1999). Последовательность $\{X_i\}$ называется (θ, L, ψ)-слабозависимой (или ψ -слабозависимой), если существует последовательность чисел $\theta = (\theta_r)$, стремящаяся к нулю при возрастании аргумента r, и функция ψ с аргументом $(g,h,n,m)\in L_n\times L_m\times N^2$ такие, что для любых двух наборов чисел $(i_1,\ldots,i_n)$ и $(j_1,\ldots,j_m)$ с $i_1\leq\ldots\leq i_n < i_n + r < j_1 \leq\ldots\leq j_m :|\operatorname{Cov}(g(X_1,\ldots,X_{i_n}), h(X_{j_1}\ldots X_{j_m}))|\leq\psi(g,h,n,m)\theta_r$, где $\theta_r\to 0$ при возрастании r.

Часто предполагается, что $\theta_r = \mathrm{e}^{-\beta r},\ \ \beta>0$.

Условие слабой зависимости выполняется в большинстве практически важных случаев. В частности, авторы (Ango Nze, Doukhan, 2004) показали, что условие ψ -слабой зависимости обобщает условия перемешивания, ассоциированности и другие условия для гауссовских последовательностей и сдвигов Бернулли. Ими было установлено, что все ARMA-процессы, билинейные процессы и другие являются ψ -слабозависимыми, и можно ограничиться ψ -слабозависимыми процессами при рассмотрении всех практически важных случаев в статистике.

Посылка 2. Хвосты плотностей распределения случайных величин X_i, Y_i убывают достаточно быстро.

Эта посылка формализуется в виде условия Крамера.

Определение 3. Говорят, что последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет *равномерному условию Крамера*, если существует $T>0$ такое, что для каждого i, $\mathbf{E}\exp(ty_i)<\infty$ при $|t|<T$.

Для центрированной последовательности $\{y_n\}$ это условие эквивалентно тому, что существуют числа $g>0,\ H>0$ такие, что $\mathbf{E}\,\mathrm{e}^{ty_n}\leq \mathrm{e}^{gt^2/2},\ \ |t|\leq H$, для всех $n=1,2,\ldots$ (Петров, 1972).

Через $\mathbf{P}_0(\mathbf{E}_0),\ \mathbf{P}_\varepsilon(\mathbf{E}_\varepsilon)$ обозначим меру (математическое ожидание) для последовательности X^N при условии $\varepsilon=0$ и при условии $\varepsilon\neq 0$ существенно. Сформулируем теперь дополнительные предположения о предикторах $X(n)$ и шумах ν_n. Предполагаем, что эти последовательности строго стационарны и выполнены условия:

1) вектор предикторов $X(n) = (x_{1n},\ldots,x_{Kn})'$ является F_{n-1}-измеримым;

2) существует непрерывная матричная функция $V(t),\ \ t\in[0,\,1]$ такая, что для всех $0\leq t_1\leq t_2\leq 1$:

$$D_N(t_1,t_2) = \frac{1}{N}\sum_{j=[t_1N]}^{[t_2N]} X(j)X'(j) \to \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt,\ \ P-\text{п.н. при } N\to\infty,$$

где $\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$ – положительно определенная матрица;

3) векторная случайная последовательность $\{(X(n),\nu_n)\}$ удовлетворяет условию ψ -перемешивания (или ψ -слабой зависимости), а также равномерному условию Крамера;

4) последовательность шумов $\{\nu_n\}$ является мартингал-разностью относительно фильтрации $\{F_n\}$.

2.2. Метод. Предлагаемый метод для обнаружения и оценивания структурных сдвигов конструируется следующим образом. Вначале рассмотрим последовательность $K\times K$ -матриц:

$$\mathcal{T}(1,l) = \sum_{i=1}^{l} X(i)X'(i),\quad l = 1,\ldots,N, \tag{4}$$

затем определим последовательность $K\times M$ -матриц:

$$z(1,l) = \sum_{i=1}^{l} X(i)Y'(i),\quad l = 1,\ldots,N. \tag{5}$$

и решающую статистику:

$$Y_N(l) = \left(z(1,l) - \mathcal{T}(1,l)(\mathcal{T}(1,N))^{-1}z(1,N)\right)/N, \tag{6}$$

где $l = 1,\ldots,N;\ \ Y_N^n(N) = 0$ и согласно определению $Y_N^n(0) = 0.$ Отметим, что для существования обратной матрицы $(\mathcal{T}(1,N))^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы вектора $(x_{1n},\ldots,x_{Kn})'$ были линейно независимыми при $1\le n\le N$. Событие, состоящее в том, что они линейно зависимы, имеет вероятность, равную нулю. Поэтому эти вектора п.н. линейно независимы и матрица п.н. существует.

Теперь зафиксируем параметр $0<\beta<1/2$. Для обнаружения момента разладки m рассмотрим событие

$$\{n : \max_{[\beta N]\le l\le N} \| Y_N^n(l) \| > C\}, \tag{7}$$

где C – некоторый решающий порог; $\| A \|$ – норма матрицы A.

Через $P_0(E_0)$ обозначим меру (математическое ожидание), соответствующую случайной последовательности без разладки, а через $P_m(E_m)$ – последовательности с разладкой в момент m. Пусть H_0 – гипотеза статистической однородности наблюдений (т.е. нет структурных сдвигов).

Рассмотрим критерии эффективности для метода обнаружения разладки:

1) вероятность ошибки 1-го рода (ложная тревога):

$$\alpha_N = P_0\{\max_{[\beta N]\le l\le N} \| Y_N(l) \| > C\}, \tag{8}$$

2) вероятность ошибки 2-го рода (пропуск цели):

$$\delta_N = P_m\{\max_{[\beta N]\le l\le N} \| Y_N(l) \| \le C\}. \tag{9}$$

3. Основные результаты

В теореме 1 получена экспоненциальная оценка сверху для вероятности ошибки 1-го рода.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условие Крамера и* ψ *-перемешивания, а также условия* 1, 3, 4. *Тогда для всех* $C>0$ *и достаточно больших* N *справедлива экспоненциальная оценка сверху для вероятности ошибки 1-го рода:* $\alpha_N \le L_1\exp(-L_2(C)N)$, *где константы* L_1, L_2 *не зависят от* N. *Если выполнены условия* ψ *-слабой зависимости и Крамера, то справедлива оценка сверху:*

$\mathbf{P}_0\{\sup_{b\in\mathbb{B}}|\Psi_N(b)|>C\}\le L_1\exp(-L_2(C)\sqrt{N})$, *где константы* $L_1, L_2>0$ *не зависят от* N. *Таким образом, вероятность ошибки 1-го рода экспоненциально стремится к нулю для предложенного метода при широких предположениях о вероятностном законе распределения наблюдений.*

Доказательство теоремы 1 при условиях ψ -перемешивания и Крамера приведено в (Бродский, 2006). В общей ситуации оно основано на аналогичных идеях и здесь не приводится.

Изучим вероятность ошибки 2-го рода. Для этого рассмотрим матрицу размера $K\times K$:

$$A(t)=\int_0^t V(\tau)d\tau,\quad 0\le t\le 1.$$

Обозначим $I=A(1)$. Для каждого $0<t\le 1$ матрица $A(t)$ положительно определена. Для любого $0\le\theta\le 1$ определим функцию $g(\theta)=\|A(\theta)(E-I^{-1}A(\theta))(\mathbf{a}-\mathbf{b})'\|$, где E единичная матрица размера $K\times K$. Тогда $g(0)=g(1)=0$. Найдем точку глобального максимума $\tilde{\theta}$ функции $g(\theta)$ на отрезке [0, 1]: корень уравнения $E=I^{-1}A(\theta)+A(\theta)I^{-1}$, т.е. $A(\theta)=I/2$. В силу предположений этот корень существует и единствен.

Выберем порог принятия решений $0<C<g(\tilde{\theta})$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1–4 и* $\mathrm{rank}(D)=M$, где $D=(E-I^{-1}A(\theta))(\mathbf{a}-\mathbf{b})'$. *Определим* $d=(g(\tilde{\theta})-C)/(1+\sqrt{K})$. *Тогда при выполнении условий Крамера и* ψ *-перемешивания справедлива экспоненциальная оценка сверху для вероятности ошибки 2-го рода:*

$$\delta_N\le L_1\exp(-L_2dN),\tag{10}$$

где константы $L_1>0,\quad L_2>0$ *не зависят от* N. *Если выполнены условия* ψ *-слабой зависимости и Крамера, то справедлива оценка сверху:* $\mathbf{P}_0\{\sup_{b\in\mathbb{B}}|\Psi_N(b)|>C\}\le L_1\exp(-L_2(C)d\sqrt{N})$, *где константы* $L_1, L_2>0$ *не зависят от* N. *Таким образом, вероятность ошибки 2-го рода экспоненциально стремится к нулю при возрастании объема выборки* N.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим матричный случайный процесс с непрерывным временем $\mathbb{Z}_N(t)=\mathbb{Z}_N([Nt]),\quad t\in[0,1]$. Математическое ожидание процесса $\mathbb{Z}_N(t)$ запишется в виде:

$$\mathbf{E}_\theta\mathbb{Z}_N(t)=N^{-1}\left(\sum_{n=1}^{[Nt]}V(n/N)\quad{}^*(\theta,n)-\mathcal{T}(1,[Nt])(\mathcal{T}(1,N)^{-1}\sum_{n=1}^{N}V(n/N)\quad{}^*(\theta,n)\right).$$

Обозначим $M(t)=\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}_\theta\mathbb{Z}_N(t)$, тогда после преобразований имеем:

$$M(t)=\begin{cases}\mathbb{R}(t)\mathbb{R}^{-1}\left(\mathbb{R}-\mathbb{R}(\theta)\right)(\mathbf{a}-\mathbf{b})^*,\ t\le\theta;\\ \left(\mathbb{R}-\mathbb{R}(t)\right)\mathbb{R}^{-1}\mathbb{R}(\theta)(\mathbf{a}-\mathbf{b})^*,\ t>\theta.\end{cases}\tag{11}$$

Из (11) (с использованием аргументов, аналогичных теореме 1) следует, что функция $\Phi(t)=\|M(t)\|^2=\mathrm{tr}\left(M(t)M^*(t)\right)$ имеет единственный глобальный максимум на отрезке [0, 1] в точке $t=\theta$ и существует число $\lambda_V>0$ такое, что выполнено неравенство

$$\Phi(\theta)-\Phi(t)\ge\lambda_V\mid\theta-t\mid\mathrm{tr}\left[(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})^*\right]\tag{12}$$

для любого $\beta\le t\le\alpha$. Константа λ_V зависит только от $V(t)$.

Рассмотрим последовательность $N^{-1}\mathcal{T}(N,1)$. В силу сделанных предположений эта последовательность $\mathbf{P}_\theta$ п.н. сходится к положительно определенной матрице $\mathbb{R}=\int_0^1 V(s)ds$, и скорость сходимости экспоненциальна. Отсюда заключаем, что существует число $N_1=N_1(\{\mathbf{X}(n)\})$ такое, что при $N>N_1$ получим:

$$\mathbf{P}_\theta\{\|N^{-1}\mathcal{T}(N,1)-\mathbb{R}\|>\varepsilon\}\le L(\varepsilon)\exp\left(-K(\varepsilon)N\right).\tag{13}$$

Процесс $\mathbb{Z}_N(t)$ может быть описан формулой $\mathbb{Z}_N(t) = M(t) + \Gamma_N(t) + \zeta_N(t)$, где $\Gamma_N(t) = \mathbf{E}_\theta \mathbb{Z}_N(t) - M(t)$ и $\zeta_N = \mathbb{Z}_N(t) - \mathbf{E}_\theta \mathbb{Z}_N(t)$.

Заметим, что $\max\limits_{0 \le t \le 1} \| \Gamma_N(t) \| \le L_V / N$ (как разность между частичной суммой и интегралом), и константа L_V может быть указана для каждой функции $V(t)$.

Зафиксируем число ε, $0 < \varepsilon < \min\big((\alpha - \beta), \| \mathbb{R} \| /2\big)$ и рассмотрим события:

1) $D_N = \{\| N^{-1}\mathcal{T}(N,1) - \mathbb{R} \| \le \| \mathbb{R} \| /2;$

2) $\max\limits_{0 \le t \le 1} \| N^{-1}\mathcal{T}(1,[Nt]) - \mathbb{R}(t) \| < \varepsilon, \ \| N(\mathcal{T}(1,N)^{-1} - \mathbb{R}^{-1} \| < \varepsilon\};$

3) $\bar{D}_N = \Omega \setminus D_N$.

Заметим, что матрица $N^{-1}\mathcal{T}(1,N)$ не вырождается на множестве D_N. Поэтому из (13) следует

$$\delta_N(\varepsilon) - \mathbf{P}_\theta(\bar{D}_N) \le 3L(\varepsilon)\exp\big(-K(\varepsilon)N\big). \tag{14}$$

Как и в теореме 1, на множестве D_N запишем

$$\begin{gathered}\sup_{\beta \le t \le \alpha} \| \zeta_N(t) \| \le R\Big[\sqrt{K} + \| \mathbb{R} \| \times \| \mathbb{R}^{-1} \| + \varepsilon(\| \mathbb{R} \| + \| \mathbb{R}^{-1} \| + \varepsilon)\Big] \times \\ \times\left(\max_{1 \le i \le K} \max_{1 \le l \le M} \max_{[\beta N] \le n \le N} N^{-1}\left|\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\nu_{lj}\right|\right) = \mathbf{R}\left(\max_{1 \le i \le K} \max_{1 \le l \le M} \max_{[\beta N] \le n \le N} N^{-1}\left|\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\nu_{lj}\right|\right),\end{gathered} \tag{15}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{R}(V,\varepsilon)$. Отсюда при условии Крамера и ψ-перемешивания, как в теореме 1, из (15) на множестве D_N получим

$$\mathbf{P}_\theta\left\{\sup_{\beta \le t \le \alpha} \| \zeta_N(t) \| > \varepsilon, \mathbb{I}(D_N)\right\} \le m_0(\varepsilon / \mathbf{R})\begin{cases}\exp\big(-(\varepsilon / \mathbf{R})^2 N\beta / 4gm_0(\varepsilon / \mathbf{R})\big), \varepsilon \le \mathbf{R}gT; \\ \exp\big(-T(\varepsilon / \mathbf{R})N\beta / 4m_0(\varepsilon / \mathbf{R})\big), \varepsilon > \mathbf{R}gT.\end{cases} \tag{16}$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\sup\nolimits_{\beta \le \theta \le \alpha} \mathbf{P}_\theta\{| \theta_N - \theta | > \epsilon\} \le \delta_N(\epsilon) + \\ + m_0(\mathbb{C}(\epsilon,N) / \mathbf{R})\begin{cases}\exp\Big(-N\beta\big(\mathbb{C}(\epsilon,N) / \mathbf{R}\big)^2 / \big[4gm_0(\mathbb{C}(\epsilon,N) / \mathbf{R})\big]\Big), \text{ если } \mathbb{C}(\epsilon,N) \le \mathbf{R}gT; \\ \exp\Big(-N\beta\big(\mathbb{C}(\epsilon,N) / \mathbf{R}\big)^2 / \big[4gm_0(\mathbb{C}(\epsilon,N) / \mathbf{R})\big]\Big), \text{ если } \mathbb{C}(\epsilon,N) \le \mathbf{R}gT,\end{cases}\end{gathered}$$

где $\mathbb{C}(\varepsilon,N) = \left[\dfrac{\varepsilon\lambda_V}{4\mathbb{M}} \| \mathbf{a} - \mathbf{b} \|^2 - \dfrac{L_V}{N}\right]$, $\mathbb{M} = \max\limits_{\beta \le t \le \alpha} \| M(t) \|$.

В случае ψ-слабой зависимости наблюдений мы немного видоизменяем доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бродский Б.Е. (2006). Ретроспективный анализ структурных сдвигов на основе эконометрических моделей // *Экономика и математические методы.* Т. 46. № 4.

Петров В.В. (1972). Суммы независимых случайных величин. М.: Наука.

Ширяев А.Н. (1961). Обнаружение спонтанных возникающих эффектов // *Доклады АН СССР.* Т. 138. С. 799–801.

Ширяев А.Н. (1963a). Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения // *Теория вероятностей и ее применения*. Т. 8. С. 26–51.

Ширяев А.Н. (1963б). Обнаружение разладки технологического процесса, I // *Теория вероятностей и ее применения*. Т. 8. Вып. 3. С. 264–281.

Ширяев А.Н. (1963в). Обнаружение разладки технологического процесса, II // *Теория вероятностей и ее применения*. Т. 8. Вып. 4. С. 431–443.

Ширяев А.Н. (1965). Некоторые точные формулы в задаче о разладке // *Теория вероятностей и ее применения*. Т. 10. Вып. 2. С. 380–385.

Aivazian S.A. (1959). A Comparison of Optimal Properties of the Neuman-Pearson and the Wald Sequential Probability Ratio Test // *Theory of Probability and Its Applications*. Vol. 4. P. 86–93.

Andrews D.W.K. (1993). Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point // *Econometrica*. Vol. 61. P. 821–856.

Andrews D.W.K., Ploberger W. (1994) Optimal Tests When a Nuisanse Parameter Is Present Only under the Alternative // *Econometrica*. Vol. 62. P. 1383–1414.

Ango Nze P., Doukhan P. (2004). Weak Dependence. Models and Applications in Econometrics // *Economic Theory*. Vol. 20. P. 995–1045.

Bai J., Lumsdaine R., Stock J. (1998). Testing for and Dating Common Breaks in Multivariate Time Series // *Review of Economic Studies*. Vol. 65. P. 395–432.

Bradley R. (2005). Basic Properties of Strong Mixing Conditions. A Survey and Some Open Questions // *Probability Surveys*. Vol. 2. P. 107–144.

Brodsky B.E., Darkhovsky B.S. (1993). Non-Parametric Methods in Change-Point Problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brodsky B.E., Darkhovsky B.S. (2000). Non-Parametric Statistical Diagnosis. Problems and Methods. Dordreht: Kluwer Academic Publishers.

Brown R.L., Durbin J., Evans J.M. (1975). Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time // *Journal of Royal Statistical Society*, *Series B*. Vol. 37. P. 149–192.

Chu C., Stinchcombe M., White H. (1996). Monitoring Structural Change // *Econometrica*. Vol. 64. P. 1045–1065.

Csörgö M., Horváth L. (1988). Invariance Principles for Change-Point Problems // *J. of Multivar. Analysis*. Vol. 27. P. 151–168.

Csörgö M., Horváth L. (1997). Limit Theorems in Change-Point Analysis. Chichester: Wiley.

Doukhan P., Louhichi S. (1999). A New Weak Dependence Condition and Applications to Moment Inequalities // *Stochastic proceses and their Applications*. Vol. 84. P. 313–342.

Girshick M.A., Rubin H. (1952). A Bayes Approach to a Quality Control Model // *Ann. Math. Statist*. Vol. 23 (1). P. 114–125.

Hinkley D.V. (1969). Inference about the Intersection in Two-Phase Regression // *Biometrika*. Vol. 56 (3). P. 495–504.

Klein L. (1950). Economic Fluctuations in the United States 1921–1941. Cowles Foundation. New York: John Wiley.

Maddala G., Kim I. (1998*).* Unit Roots, Cointegration, and Structural Change. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Page E.S. (1955). A Test for a Change in a Parameter Occuring at an Unknown Point // *Biometrika*. Vol. 42. P. 523–526.

Ploberger W., Kramer W. (1992). The CUSUM Test with OLS Residuals // *Econometrica*. Vol. 60. P. 271–285.

Ploberger W., Kramer W., Kontrus K. (1989). A New Test for Structural Stability in the Linear Regression Model // *Journal of Econometrics*. Vol. 40. P. 307–318.

Tartakovsky A.G., Nikiforov I., Basseville M. (2014). Sequential Analysis: Hypothesis Testing and Change-Point Detection. N.Y.: CRC Press.

Zacks S. (1983). Survey of Classical and Bayesian Approaches to the Change-Point Problem. Recent Advances in Statistics. N.Y. P. 245–269.

Zeileis A., Leisch F., Kleiber C., Hornik F. (2005). Monitoring Structural Change in Dynamic Econometric Models // *Journal of Applied Econometrics*. Vol. 20. P. 99–121.

Поступила в редакцию
29.06.2017 г.

REFERENCES (WITH ENGLISH TRANSLATION OR TRANSLITERATION)

Aivazian S.A. (1959). A Comparison of Optimal Properties of the Neuman-Pearson and the Wald Sequential Probability Ratio Test. *Theory of Probability and Its Applications*, 4, 86–93 (in Russian).

Andrews D.W.K. (1993). Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point. *Econometrica*, 61, 821–856.

Andrews D.W.K., Ploberger W. (1994) Optimal Tests When a Nuisanse Parameter Is Present Only under the Alternative. *Econometrica*, 62, 1383–1414.

Ango Nze P., Doukhan P. (2004). Weak Dependence. Models and Applications in Econometrics. *Economic Theory*, 20, 995–1045.

Bai J., Lumsdaine R., Stock J. (1998). Testing for and Dating Common Breaks in Multivariate Time Series. *Review of Economic Studies*, 65, 395–432.

Bradley R. (2005). Basic Properties of Strong Mixing Conditions. A Survey and Some Open Questions. *Probability Surveys*, 2, 107–144.

Brodsky B.E. (2006). Retrospective Analysis of Structural Changes in Econometric Models. *Economics and Mathematical Methods*, 46, 4 (in Russian).

Brodsky B.E., Darkhovsky B.S. (2000). Non-Parametric Statistical Diagnosis. Problems and Methods. Dordreht: Kluwer Academic Publishers.

Brodsky, B.E., Darkhovsky B.S. (1993). Non-Parametric Methods in Change-Point Problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brown R.L., Durbin J., Evans J.M. (1975). Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time. *Journal of Royal Statistical Society*, *Series B,* 37, 149–192.

Chu C., Stinchcombe M., White H. (1996). Monitoring Structural Change. *Econometrica*, 64, 1045–1065.

Csörgö M., Horváth L. (1988). Invariance Principles for Change-Point Problems. *J. of Multivar. Analysis*, 27, 151–168.

Csörgö M., Horváth L. (1997). Limit Theorems in Change-Point Analysis. Chichester: Wiley.

Doukhan P., Louhichi S. (1999). A New Weak Dependence Condition and Applications to Moment Inequalities. *Stochastic proceses and their Applications*, 84, 313–342.

Girshick M.A., Rubin H. (1952). A Bayes Approach to a Quality Control Model. *Ann. Math. Statist*, 23 (1), 114–125.

Hinkley D.V. (1969). Inference about the Intersection in Two-Phase Regression. *Biometrika*, 56 (3), 495–504.

Klein L. (1950). Economic Fluctuations in the United States 1921–1941. Cowles Foundation. New York: John Wiley.

Maddala G., Kim I. (1998*)*. Unit Roots, Cointegration, and Structural Change. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Page E.S. (1955). A Test for a Change in a Parameter Occuring at an Unknown Point. *Biometrika*, 42, 523–526.

Petrov V.V. (1972). Sums of Independent Random Variables. Moscow: Nauka (in Russian).

Ploberger W., Kramer W. (1992). The CUSUM Test with OLS Residuals. *Econometrica*, 60, 271–285.

Ploberger W., Kramer W., Kontrus K. (1989). A New Test for Structural Stability in the Linear Regression Model. *Journal of Econometrics*, 40, 307–318.

Shiriayev A.N. (1963a). On Optimal Methods in Sequental Detection Problems. *Theory of probability and its applications (TPA)*, 8, 26–51 (in Russian).

Shiryaev A.N. (1961). Detection of Spontaneous Effects. *Doklady USSR*, 135, 799–201 (in Russian).

Shiryaev A.N. (1963b). Detection of Change-Points in Technological Process, I. *Theory of probability and its applications (TPA)*, 8, 3, 264–381 (in Russian).

Shiryaev A.N. (1963c). Detection of Change-Points in Technological Process, II. *Theory of probability and its applications (TPA)*, 8, 4, 431–443 (in Russian).

Shiryaev A.N. (1965). Some Precise Formulas in Change-Point Problems. *Theory of probability and its applications (TPA)*, 10, 2, 380–385 (in Russian).

Tartakovsky A.G., Nikiforov I., Basseville M. (2014). Sequential Analysis: Hypothesis Testing and Change-Point Detection. N.Y.: CRC Press.

Zacks S. (1983). Survey of Classical and Bayesian Approaches to the Change-Point Problem. Recent Advances in Statistics. N.Y, 245–269.

Zeileis A., Leisch F., Kleiber C., Hornik F. (2005). Monitoring Structural Change in Dynamic Econometric Models. *Journal of Applied Econometrics*, 20, 99–121.

Received 29.06.2017

Retrospective analysis of structural changes in SEM (simultaneous equation) models with varying structure. Part 1*

S.A. Aivazian[i], B.E. Brodsky[ii]

Abstract. This article is devoted to the study of the problem of retrospective analysis of structural changes in SEM (simultaneous equation) models with varying structure. We consider main assumptions about statistical dependence of observations: strong mixing and Ψ-weak dependence conditions, as well as the main criteris for effectiveness of a method of retrospective analysis. A new nonparametric method of retrospective detection of structural changes is proposed which does nor require knowledge about distributuinal laws of data and its statistical properties are studied. We formulate theorems about convergence to zero of type 1 and type 3 error probabuilities for the proposed method with an increasing sample size. Results of the simulation sudy of the proposed method are given in the second part of the paper. Unlike earlier published papers, this article considers the problem of macroeconometric modeling with account of structural changes in data. Here we consider the method for the retrospective detection of multiple structural changes in data, simulation study of this method, as well as applications to the problems of macroeconometric modeling with account of structural changes in data. In particular, we consider the macromodel of the USA economy proposed by L. Klein (the structural change in the year 1929 is detected) and the disaggregated model of the Russian economy (quarterly data in 1995–2016s). Here we detect two instants of structural changes in 2002 and 2010. Results of the simulation study wittness about the fact that the proposed method can effectively detect structural chsnges in SEM models.

Keywords: SEM model, econometric analysis, retropective method, structural change, type 1 error, type 2 error.

Classification JEL: C30, C51.

* This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 15-01-03359).

[i] **Sergei A. Aivazian** – Doctor of Science Physics-Mathematics, Deputy Director Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Nakhimovskii prospekt, B. 47; Moscow, 117418, Russia; aivazian@cemi.rssi.ru.

[ii] **Boris E. Brodsky** – Doctor of Science Physics-Mathematics, Head of Lab. Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Nakhimovskii prospekt, B. 47, Moscow, 117418, Russia; bbrodsky@yandex.ru.