

Свойство синтезирования критерия Вальда–Сэвиджа и его экономическое приложение

© 2019 г. Л.Г. Лабскер

Финансовый университет при правительстве Российской Федерации, Москва
E-mail: llabsker@mail.ru

Поступила в редакцию 6.11.2018 г.

Автор благодарит члена-корреспондента РАН, доктора экономических наук, профессора Г.Б. Клейнера за предоставленную возможность выступить с докладом на его научном семинаре в Финансовом университете при Правительстве Российской Федерации, за обсуждение полученных результатов и конструктивные замечания, способствующие углублению анализа рассмотренной в статье проблемы.

В игре с природой в качестве принципа оптимальности определяется синтетический критерий Вальда–Сэвиджа, дающий возможность оценивать оптимальность стратегий с синтетической (совместной) точки зрения выигрышей и рисков. Дается определение синтезированной стратегии, т.е. стратегии, оптимальной по критерию Вальда–Сэвиджа и не оптимальной ни по критерию Вальда, ни по критерию Сэвиджа. Вводится в рассмотрение свойство синтезирования, заключающееся в существовании синтезированной стратегии. Научная новизна работы состоит в решении сформулированной проблемы синтезирования, состоящем в нахождении необходимых и достаточных условий отсутствия у критерия Вальда–Сэвиджа свойства синтезирования. Достаточные условия имеют и практическое значение при анализе задач по принятию оптимальных экономических решений, поскольку выполнение этих условий означает, что применять критерий Вальда–Сэвиджа для отыскания синтезированных стратегий не имеет смысла. Проверка достаточных условий не требует обращения к собственно критерию Вальда–Сэвиджа, а основывается лишь на составляющих критериях. Однако применение критерия Вальда–Сэвиджа в случае отсутствия у него свойства синтезирования не является абсолютно бесполезным, поскольку выявляет зависимость применения критериев Вальда и Сэвиджа от определяемого выигрыш-показателя. Применение полученных результатов иллюстрируется на решении задачи экономического содержания об оптимальном выборе технологического способа производства продукции.

Ключевые слова: игра с природой, критерий Вальда, критерий Сэвиджа, выигрыш-показатель, критерий Вальда–Сэвиджа, синтезированная стратегия, проблема синтезирования критерием Вальда–Сэвиджа, решение проблемы синтезирования, двухкритериальная задача оптимизации, технологические способы производства продукции, потребность в продукции, оптимальный выбор способа производства.

Классификация JEL: D81.

DOI: 10.31857/S042473880006775-1

ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах финансово-экономического содержания принятие решений зависит не только от лица, принимающего решение (ЛПР), но и от объективной действительности, о которой у ЛПР в момент принятия решения недостаточно информации. Часто подходящей математической моделью для анализа таких задач служит “Игра с природой” (или, в другой терминологии, “Статистическая игра”), в которой участвуют два игрока: рациональный игрок A — ЛПР и P — природа, представляющая собой объективную действительность, определяющую при каждом решении игрока A появление конкретного исхода (результата). Природа не является ни противником, ни союзником игрока A . Она в любой момент случайным образом принимает то или иное свое состояние, не преследуя никакой конкретной цели, и абсолютно безразлична к результатам игры.

Таким образом, ЛПР принимает решение в условиях неопределенности, которая все же не будет абсолютной, поскольку ЛПР известны все возможные состояния природы, но при этом неиз-

вестны вероятности, с которыми природа может находиться в этих состояниях, и отсутствует всякая статистическая возможность их определения.

Для принятия решения, которое, как известно, является одной из главных составляющих любого управления, игрок A , будучи рациональным, стремится из возможных альтернативных стратегий выбрать стратегию, максимально отвечающую поставленным целям решения задачи. Для сравнения стратегий по их эффективности ЛПР необходимо подобрать подходящий принцип оптимальности.

Проблема выбора принципа оптимальности стратегий в играх с природой (Лабскер, 2014, с. 12—59) — одна из центральных в теории принятия решений. Существуют разнообразные критерии оптимальности с различными свойствами. Некоторые из них, *выигрыш-критерии*, определяют оптимальность выбираемых стратегий с точки зрения выигрышей, абстрагируясь от рисков, например критерий Вальда (Wald, 1950; Лабскер, 2014, с. 273—308), максимаксный критерий (Лабскер, 2014, с. 349—362) и др. *Риск-критерии* характеризуют оптимальность стратегий с позиций рисков, абстрагируясь от выигрышей. Например, критерий Сэвиджа (Savage, 1951; Лабскер, 2014, с. 308—349), миниминный критерий (Лабскер, 2014, с. 362—376) и др. Широко используются *комбинированные* критерии, составленные из двух выигрыш-критериев или двух риск-критериев. В каждой такой паре один из критериев является крайне пессимистическим, а другой — крайне оптимистическим, например классический выигрыш-критерий Гурвица (Hurwicz, 1951; Arrow, Hurwicz, 1972; Лабскер, 2014, с. 479—558) и риск-критерий Гурвица (Лабскер, 2014, с. 534—558).

Заслуживает внимания подход выбора стратегии, оптимальной с синтетической (совместной) точки зрения выигрышей и игровых рисков. Такие критерии будем называть *синтетическими*. В (Лабскер, 2014, с. 652—655) предложен общий подход к конструированию синтетических критериев и приведены формулы показателей эффективности стратегий по различным синтетическим критериям. В работах (Лабскер, Яценко, Амелина, 2011, 2012) был введен в рассмотрение конкретный синтетический критерий Вальда—Сэвиджа, проведен его детальный математический анализ и дано приложение к решению задачи об установлении приоритетного порядка кредитования потенциальных корпоративных заемщиков банка. Для описания критерия Вальда—Сэвиджа кратко напомним необходимые определения.

КРИТЕРИЙ ВАЛЬДА—СЭВИДЖА

Пусть в игре с природой игрок A обладает множеством альтернативных стратегий $S = \{A_1, \dots, A_m\}$, $m \geq 2$; $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ — состояния природы, $n \geq 2$. Пусть действительные числа a_{ij} , $i \in I = \{1, \dots, m\}$, $j \in J = \{1, \dots, n\}$ — это выигрыши игрока A в игровой ситуации (A_i, Π_j) , когда игрок A выбирает стратегию A_i , а природа находится в состоянии Π_j . Величину $\beta_j = \max\{a_{ij} : i \in I\}$, $j \in J$, назовем показателем *благоприятности* состояния Π_j . Выбор игроком A стратегии A_i , когда природа находится в состоянии Π_j , сопровождается риском $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, $i \in I, j \in J$, неполучения игроком A наибольшего при состоянии природы Π_j выигрыша β_j (Лабскер, 2014, с. 18—25). Таким образом, риск r_{ij} количественно характеризует упущенную игроком A возможность (при выборе им стратегии A_i) получения максимального выигрыша β_j при нахождении природы в состоянии Π_j и может интерпретироваться как своеобразная плата за отсутствие у игрока A информации о состоянии природы при выборе им стратегии A_i .

Критерий Вальда (W -критерий) определяется следующими компонентами (Wald, 1950; Лабскер, 2014, с. 273—308): $W_i = \min\{a_{ij} : j \in J\}$ — показатель эффективности стратегии A_i , $i \in I$; $W_S = \max\{W_i : i \in I\}$ — цена игры (W -цена); стратегия A_k называется оптимальной (W -оптимальной), если $W_k = W_S$; $S^{O(W)}$ — множество W -оптимальных стратегий.

Критерий Сэвиджа (Sav -критерий) описывается следующими составляющими (Savage, 1951; Лабскер, 2014, с. 308—349): $Sav_i = \max\{r_{ij} : j \in J\}$ — показатель неэффективности стратегии A_i , $i \in I$; $Sav_S = \min\{Sav_i : i \in I\}$ — цена игры (Sav -цена); стратегия A_k называется оптимальной (Sav -оптимальной), если $Sav_k = Sav_S$; $S^{O(Sav)}$ — множество Sav -оптимальных стратегий.

Далее нам понадобится критерий $(-Sav)$, *противоположный* критерию Сэвиджа, который определяется следующим образом: $(-Sav)_i = -Sav_i$ — показатель эффективности стратегии A_i , $i \in I$; $(-Sav)_S = -Sav_S$ — цена игры ($-Sav$ -цена); стратегия A_k называется оптимальной ($-Sav$ -оптимальной), если $(-Sav)_k = (-Sav)_S$; $S^{O((-Sav))}$ — множество $-Sav$ -оптимальных стратегий.

Два критерия будем называть *эквивалентными*, если множества оптимальных стратегий по этим критериям совпадают. Нетрудно показать, что *критерий Сэвиджа и противоположный ему критерий эквивалентны*.

В определении критерия Вальда–Сэвиджа важную роль играют *выигрыш-показатель* $\alpha \in [0, 1]$ и *риск-показатель* $(1 - \alpha) \in [0, 1]$, количественно выражающие степень предпочтения, отдаваемого игроком A соответственно выигрышам и рискам. Выбор игроком A значения выигрыш-показателя α является субъективным и связан с его психологическими особенностями, определяющими его отношение к выигрышам и рискам.

При $\alpha = 0$ и, следовательно, $1 - \alpha = 1$ игрок A при выборе стратегии абстрагируется от выигрышей, сконцентрировав свое внимание только на рисках. И, наоборот, при $\alpha = 1$ и, следовательно, $1 - \alpha = 0$, игрок A во главу угла ставит выигрыши, абстрагируясь от рисков.

Критерий Вальда–Сэвиджа с выигрыш-показателем $\alpha \in [0, 1]$ (далее — $(WSav)(\alpha)$ -критерий) определяется следующим образом:

$(WSav)_i(\alpha) = \alpha W_i - (1 - \alpha)Sav_i = (W_i + Sav_i)\alpha - Sav_i$ — $(WSav)(\alpha)$ -показатель эффективности стратегии A_i , $i \in I$; $(WSav)_S = \max\{(WSav)_i(\alpha) : i \in I\}$ — $(WSav)(\alpha)$ -цена игры; стратегию A_k назовем $(WSav)(\alpha)$ -оптимальной, если $(WSav)_k(\alpha) = (WSav)_S(\alpha)$; $S^{O((WSav)(\alpha))}$ — множество $(WSav)(\alpha)$ -оптимальных стратегий.

Очевидно, что при $\alpha = 0$ критерий Вальда–Сэвиджа превращается в критерий, противоположный критерию Сэвиджа, и, следовательно, эквивалентен критерию Сэвиджа. При $\alpha = 1$ критерий Вальда–Сэвиджа превращается в критерий Вальда.

Из определения показателя $(WSav)_i(\alpha)$ видно, что он является линейной функцией аргумента $\alpha \in [0, 1]$ с угловым коэффициентом $(W_i + Sav_i)$. Следовательно, графиком показателя $(WSav)_i(\alpha)$ является отрезок $(-Sav_i)W_i$ (обозначаемый двумя его концами) с левым концом $(-Sav_i) = (WSav)_i(0)$ и правым концом $W_i = (WSav)_i(1)$. Тогда графиком цены игры $(WSav)_S(\alpha)$ является верхняя огибающая m отрезков $(-Sav_i)W_i$, $i \in I$, представляющая собой ломаную, состоящую из не более m звеньев, число которых обозначим через $l \in I$. Очевидно, что $1 \leq l \leq m$.

ПРОБЛЕМА СИНТЕЗИРОВАНИЯ КРИТЕРИЕМ ВАЛЬДА–СЭВИДЖА

Определение 1. Стратегию, оптимальную по критерию Вальда–Сэвиджа при выигрыш-показателе $\alpha \in (0, 1)$, будем называть *синтезированной при данном значении выигрыш-показателя* α , если она не является оптимальной ни по критерию Вальда, ни по критерию Сэвиджа.

Определение 2. Будем говорить, что в данной игре с природой критерий Вальда–Сэвиджа при фиксированном значении выигрыш-показателя $\alpha \in (0, 1)$ обладает *свойством синтеза*, если при данном значении выигрыш-показателя α существует синтезированная стратегия, т.е. $S^{O((WSav)(\alpha))} \subsetneq [S^{O(W)} \cup S^{O(Sav)}]$.

Определение 3. Если в данной игре с природой ни при каком значении выигрыш-показателя $\alpha \in [0, 1]$ не существует синтезированной стратегии, т.е. при любом значении $\alpha \in [0, 1]$ каждая стратегия, оптимальная по критерию Вальда–Сэвиджа, оптимальна по критерию Вальда или по критерию Сэвиджа:

$$S^{O((WSav)(\alpha))} \subset [S^{O(W)} \cup S^{O(Sav)}], \quad \alpha \in [0, 1], \quad (1)$$

будем говорить, что в данной игре критерий Вальда–Сэвиджа *не обладает свойством синтеза*.

Нетрудно убедиться в том, что в общем случае включение (1) необратимо.

Так как при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ критерий Вальда–Сэвиджа соответственно эквивалентен критерию Сэвиджа и совпадает с критерием Вальда, то при этих значениях α критерий Вальда–Сэвиджа свойством синтезирования не обладает. Именно поэтому в определениях 1 и 2 указанные значения α исключены из рассмотрения.

В следующем предложении сформулировано еще одно условие отсутствия у критерия Вальда–Сэвиджа свойства синтезирования.

Предложение 1. *В игре с природой, в которой число m стратегий игрока A равно 2, критерий Вальда–Сэвиджа свойством синтезирования не обладает.*

Доказательство. В рассматриваемой игре у игрока A имеется две стратегии A_1 и A_2 . Отрезки $(-Sav_1)W_1$ и $(-Sav_2)W_2$, представляющие графики показателей эффективности $(WSav)_1(\alpha)$ и $(WSav)_2(\alpha)$ этих стратегий либо совпадают, либо не пересекаются, либо пересекаются.

В первых двух случаях графиком цены игры $(WSav)_S(\alpha)$ является отрезок. Тогда (Лабскер, Ященко, Амелина, 2011, теорема 11) выполняется условие

$$S^{O(W)} \cap S^{O(Sav)} \neq \emptyset. \quad (2)$$

Из условия (2) (Лабскер и др., 2011, теорема 10) следует равенство $S^{O((WSav)(\alpha))} = S^{O(W)} \cap S^{O(Sav)}$, $\alpha \in (0,1)$, из которого вытекает включение (1).

Если же отрезки $(-Sav_1)W_1$ и $(-Sav_2)W_2$ пересекаются, очевидно, что выполняется и включение (1).

Таким образом, во всех трех возможных случаях имеет место включение (1), означающее по определению 3, что $(WSav)(\alpha)$ -критерий свойством синтезирования не обладает. ■

Таким образом, при $\alpha = 0$, или $\alpha = 1$, или $m = 2$ никакого синтезирования быть не может. Значит, ожидать синтезированное решение в результате применения критерия Вальда–Сэвиджа можно только при выигрыш-показателях $\alpha \in (0,1)$ и при числе стратегий $m \geq 3$, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Из определения критерия Вальда–Сэвиджа следует, что основное его предназначение состоит в синтезировании крайне высоких предпочтений, отдаваемых ЛПР выигрышам ($\alpha = 1$, используется критерий Вальда) и рискам ($\alpha = 0$, используется критерий Сэвиджа).

Применяя критерий Вальда–Сэвиджа при определенном значении выигрыш-показателя $\alpha \in (0,1)$, ЛПР надеется получить *собственно взвешенное* оптимальное решение по этому критерию, а не оптимальные решения, которые в то же время будут оптимальными по исходным критериям Вальда или Сэвиджа, так как в последнем случае применение критерия Вальда–Сэвиджа при выбранном значении выигрыш-показателя не дает желаемых результатов. Столкнувшись с этим, ЛПР задается естественным вопросом, а, может быть, при каких-то других значениях выигрыш-показателя существует *собственно взвешенное* оптимальное решение. Но проверить это для каждого значения выигрыш-показателя $\alpha \in (0,1)$ прямым вычислением показателей эффективности стратегий по критерию Вальда–Сэвиджа для последующего их сравнения, к сожалению, принципиально не представляется возможным, поскольку этих значений бесконечно много. В связи с этим возникает вопрос, в любой ли игре (при условиях $\alpha \in (0,1)$ и $m \geq 3$) критерий Вальда–Сэвиджа обладает свойством синтезирования. Этот вопрос порождает *проблему синтезирования критерием Вальда–Сэвиджа*.

В настоящей статье дано решение этой проблемы, а именно найдены необходимые и достаточные условия на игру с природой, при которых критерий Вальда–Сэвиджа в этой игре свойством синтезирования не обладает и, следовательно, применять его для отыскания синтезированных стратегий не имеет смысла. При этом важно отметить, что эти условия не связаны с вычислением и последующим сравнением между собой показателей эффективности стратегий по критерию Вальда–Сэвиджа, а основываются только на исходных критериях Вальда и Сэвиджа. Тем не менее любое решение, полученное в результате применения критерия Вальда–Сэвиджа, синтезированное или нет, выявляет распределение стратегий, оптимальных по критерию Вальда или по крите-

рию Сэвиджа, по значениям выигрыш-показателя $\alpha \in [0,1]$. Приложение полученных результатов иллюстрируется на решении задачи экономического содержания.

Рассматриваемая проблема с математической точки зрения, абстрагированной от теории игр с природой, является задачей о нахождении в двухкритериальной задаче оптимизации необходимых и достаточных условий существования решений, оптимальных по взвешенному критерию и не оптимальных ни по одному из двух исходных критериев.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Приведем необходимые обозначения и определения для постановки и решения задачи в рамках двухкритериальной задачи оптимизации.

$I = \{1, \dots, m\}$, $m \geq 3$, $J = \{1, \dots, n\}$, $n \geq 3$; S — множество m векторов $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i \in I$, в пространстве $\mathbf{R}^n$; K^1 — первый исходный критерий (K^1 -критерий); $K_i^1 = \min\{a_{ij} : j \in J\}$ — целевая функция K^1 -критерия, определенная на множестве S (K^1 -показатель вектора A_i); $K_S^1 = \max\{K_i^1 : i \in I\} = \max\{\min\{a_{ij} : j \in J\} : i \in I\}$ — максимин; $S^{O(K^1)} = \{A_i : K_i^1 = K_S^1\}$ — множество векторов, оптимальных по K^1 -критерию (K^1 -оптимальных) во множестве S , т.е. векторов A_i , удовлетворяющих условию $K_i^1 = K_S^1$; K^2 — второй исходный критерий (K^2 -критерий); $K_i^2 = \max\{r_{ij} : j \in J\}$, где $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, $\beta_j = \max\{a_{ij} : i \in I\}$ — целевая функция K^2 -критерия, определенная на множестве S (K^2 — показатель вектора A_i); $K_S^2 = \min\{K_i^2 : i \in I\} = \min\{\max\{r_{ij} : j \in J\} : i \in I\}$ — минимакс; $S^{O(K^2)} = \{A_i : K_i^2 = K_S^2\}$ — множество векторов, оптимальных по K^2 -критерию (K^2 -оптимальных) во множестве S , т.е. векторов A_i , удовлетворяющих условию $K_i^2 = K_S^2$; $K(\alpha)$ — синтетический критерий ($K(\alpha)$ -критерий), где $\alpha \in [0,1]$ — коэффициент критерия $K(\alpha)$; $K_i(\alpha) = \alpha K_i^1 - (1 - \alpha) K_i^2 = (K_i^1 + K_i^2)\alpha - K_i^2$, $i \in I$ — целевая функция $K(\alpha)$ -критерия, определенная на множестве S ($K(\alpha)$ — показатель вектора A_i); $K_S(\alpha) = \max\{K_i(\alpha) : i \in I\}$ — максимальное значение целевой функции $K_i(\alpha)$ на множестве S при фиксированном $\alpha \in [0,1]$; $S^{O(K(\alpha))} = \{A_i : K_i(\alpha) = K_S(\alpha)\}$ — множество векторов, оптимальных по $K(\alpha)$ -критерию ($K(\alpha)$ -оптимальных) во множестве S , т.е. векторов A_i , удовлетворяющих условию $K_i(\alpha) = K_S(\alpha)$; $(S^{O(K^1)})^{O(K^2)}$ — множество векторов, K^2 -оптимальных во множестве K^1 -оптимальных; $K_{S^{O(K^1)}}^2 = \min\{K_i^2 : A_i \in S^{O(K^1)}\}$; $(S^{O(K^2)})^{O(K^1)}$ — множество векторов, K^1 -оптимальных во множестве K^2 -оптимальных; $K_{S^{O(K^2)}}^1 = \max\{K_i^1 : A_i \in S^{O(K^2)}\}$.

Нетрудно убедиться, что $(S^{O(K^1)})^{O(K^2)} \neq \emptyset$, $(S^{O(K^2)})^{O(K^1)} \neq \emptyset$, $(S^{O(K^1)})^{O(K^2)} \subset S^{O(K^1)}$, $(S^{O(K^2)})^{O(K^1)} \subset S^{O(K^2)}$.

Графиками показателей $K_i(\alpha)$, $i \in I$, как линейных функций аргумента $\alpha \in [0,1]$, являются отрезки $(-K_i^2)K_i^1$, $i \in I$, с левым концом $K_i(0) = (-K_i^2)$ и правым концом $K_i(1) = K_i^1$. Тогда графиком функции $K_S(\alpha)$ является ломаная с l звеньями, представляющая верхнюю огибающую указанных отрезков.

Графики показателей $K_S(\alpha)$ всех векторов $A_\sigma \in (S^{O(K^2)})^{O(K^1)}$ совпадают и представляют отрезок $(-K_S^2)K_S^1$, а графики показателей $K_\omega(\alpha)$ всех векторов $A_\omega \in (S^{O(K^1)})^{O(K^2)}$ совпадают и представляют отрезок $(-K_{S^{O(K^1)}}^2)K_S^1$ (рис. 1).

Вектор, оптимальный по $K(\alpha)$ -критерию при некотором $\alpha \in [0,1]$, назовем синтезированным, если он не является оптимальным ни по одному из критериев K^1 и K^2 . Математическая задача состоит в нахождении необходимых и достаточных условий отсутствия синтезированных векторов при любом $\alpha \in [0,1]$, т.е. в справедливости включения

$$S^{O(K(\alpha))} \subset [S^{O(K^1)} \cup S^{O(K^2)}], \alpha \in [0,1]. \quad (3)$$

Очевидно, что при $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ выполняется (3). При $m = 2$ включение (3) также имеет место. Чтобы в этом убедиться, достаточно воспроизвести доказательство предложения 1 в терминах математической задачи.

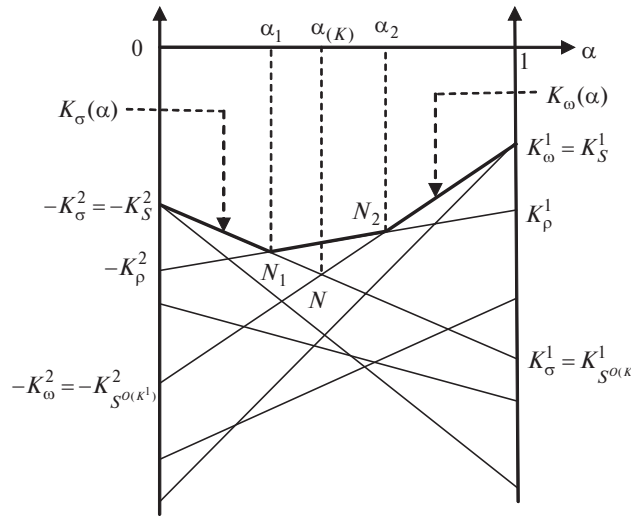


Рис. 1. Графики показателей векторов в случае, когда ломаная, представляющая график $K_S(\alpha)$, состоит из трех звеньев ($l = 3$)

Далее будем предполагать, что $\alpha \in (0, 1)$, $m \geq 3$,

$$S^{O(K^1)} \cap S^{O(K^2)} = \emptyset, \quad (4)$$

$$S \not\subset [S^{O(K^1)} \cup S^{O(K^2)}]. \quad (5)$$

Через $\tau_{(K)}$ обозначим условие, состоящее в том, что для каждого вектора

$$A_p \notin S^{O(K^1)} \cup S^{O(K^2)} \quad (6)$$

(существующего в силу (5)) справедливо неравенство

$$(K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^2)K_p^1 - (K_S^1 - K_{S^{O(K^2)}}^1)K_p^2 < K_{S^{O(K^2)}}^1 K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^1 K_S^2. \quad (7)$$

Аналогично доказательству леммы 3 (Лабскер и др., 2011а; Лабскер, Ященко, 2013) можно показать справедливость следующего предложения.

Предложение 2. Пусть выполняется условие (4) и $A_\sigma \in (S^{O(K^2)})^{O(K^1)}$, $A_\omega \in (S^{O(K^1)})^{O(K^2)}$. Тогда отрезки $K_\sigma(\alpha) = (-K_S^2)K_{S^{O(K^2)}}^1$ и $K_\omega(\alpha) = (-K_{S^{O(K^1)}}^2)K_S^1$ не совпадают и пересекаются в точке $N(\alpha_{(K)}, \delta_{(K)})$ с абсциссой

$$\alpha_{(K)} = \frac{K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^2}{(K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^2) + (K_S^1 - K_{S^{O(K^2)}}^1)} \in (0, 1) \quad (8)$$

и ординатой

$$\delta_{(K)} = \frac{K_{S^{O(K^2)}}^1 \cdot K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^1 \cdot K_S^2}{(K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^2) + (K_S^1 - K_{S^{O(K^2)}}^1)} \quad (9)$$

(см. рис. 1).

Предложение 3 (необходимые условия). При условиях (4) и (5) условие (3) влечет за собой справедливость утверждений:

- а) $l = 2$;
- б) выполняется условие $\tau_{(K)}$;
- с) множество

$$S^{O(K(\alpha))} = \begin{cases} S^{O(K^2)} & \text{при } \alpha = 0; \\ (S^{O(K^2)})^{O(K^1)} & \text{при } 0 < \alpha < \alpha_{(K)}; \\ S^{O(K(\alpha))} = (S^{O(K^2)})^{O(K^1)} \cup (S^{O(K^1)})^{O(K^2)} & \text{при } \alpha = \alpha_{(K)}; \\ (S^{O(K^1)})^{O(K^2)} & \text{при } \alpha_{(K)} < \alpha < 1; \\ S^{O(K^1)} & \text{при } \alpha = 1, \end{cases} \quad (10)$$

где $\alpha_{(K)}$ определяется формулой (8).

Доказательство. Докажем утверждение а). Допустим противное этому утверждению: $l \neq 2$. При этом нетрудно убедиться, что (4) эквивалентно неравенству $l \geq 2$. Следовательно, $l \geq 3$. В этом случае найдется вектор A_p такой, что отрезок $(-K_p^2)K_p^1$ будет пересекать отрезок $(-K_S^2)N$ во внутренней его точке N_1 , порождая звено $N_1 N_2$ ломаной $K_S(\alpha)$ (см. рис. 1). Отрезок $(-K_S^2)N_1$ является первым (слева направо) звеном ломаной $K_S(\alpha)$. Точка N_2 будет концом второго звена и началом третьего звена (на рис. 1 $l = 3$ и ломаная $K_S(\alpha) = (-K_S^2)N_1 N_2 K_S^1$ выделена полужирной линией).

По определению K_S^2 справедливо неравенство $K_p^2 \geq K_S^2$. Но $K_p^2 \neq K_S^2$, поскольку в противном случае отрезок $(-K_p^2)K_p^1$ не мог бы пересекать отрезок $(-K_p^2)N$ во внутренней его точке N_1 . Следовательно, имеет место неравенство $K_p^2 > K_S^2$, означающее, что вектор $A_p \notin S^{O(K^2)}$.

Справедливо неравенство $-K_p^2 > -K_{S^{O(K^1)}}^2$, поскольку в противном случае $-K_p^2 \leq -K_{S^{O(K^1)}}^2$, и тогда отрезок $(-K_p^2)K_p^1$ не мог бы пересекать отрезок $(-K_p^2)N$ во внутренней его точке N_1 (см. рис. 1). По определению K_S^1 справедливо неравенство $K_p^1 \leq K_S^1$. Но $K_p^1 \neq K_S^1$, поскольку в противном случае вектор $A_p \in S^{O(K^1)}$ и по определению $K_{S^{O(K^1)}}^2$ было бы справедливо неравенство $K_p^2 \geq K_{S^{O(K^1)}}^2$, противоречащее неравенству $-K_p^2 > -K_{S^{O(K^1)}}^2$. Таким образом, $K_p^1 < K_S^1$ и, следовательно, стратегия $A_p \notin S^{O(K^1)}$.

Пусть α_1 и α_2 — абсциссы соответственно левого и правого концов второго звена ломаной $K_S(\alpha)$ (см. рис. 1). Тогда при каждом $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ справедливо равенство $K_p(\alpha) = K_S(\alpha)$, т.е. $A_k \in S^{O(K(\alpha))}$. Таким образом, совокупность $A_k \in S^{O(K(\alpha))}$, $A_p \notin S^{O(K^1)}$ и $A_p \notin S^{O(K^2)}$ противоречит условию (3) теоремы. Полученное противоречие доказывает, что $l = 2$. Утверждение а) доказано.

Докажем утверждение б). По доказанному утверждению а) число звеньев ломаной $K_S(\alpha)$ равно 2 ($l = 2$). Символический вид этой ломаной изображен на рис. 2 (выделена полужирной линией).

Пусть чистая стратегия A_p удовлетворяет условию (6) (существование таких стратегий обусловлено требованием (5)). Докажем неравенство

$$K_p(\alpha_{(K)}) < \delta_{(K)} \quad (11)$$

(на рис. 2, $K_p(\alpha_{(K)}) = -|N_p \alpha_{(K)}|$, где $|N_p \alpha_{(K)}|$ — длина отрезка $N_p \alpha_{(K)}$).

Для левого конца $K_p(0) = -K_p^2$ и правого конца $K_p(1) = K_p^1$ отрезка $K_p(\alpha) = (-K_p^2)K_p^1$ имеем соответственно

$$-K_p^2 \neq -K_S^2 \text{ и } K_p^1 \neq K_S^1, \quad (12)$$

так как в противном случае соответственно $A_p \in S^{O(K^2)}$ и $A_p \in S^{O(K^1)}$, что противоречит (6).

Для этих же концов в силу определения $(-K_S^2)$ и K_S^1 имеем соответственно

$$-K_p^2 \leq -K_S^2 \text{ и } K_p^1 \leq K_S^1. \quad (13)$$

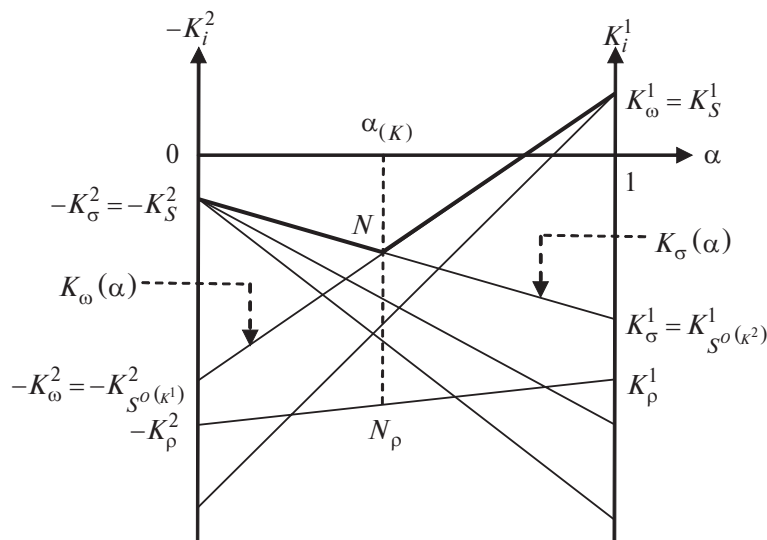


Рис. 2. Графики показателей векторов в случае, когда ломаная, представляющая график $K_S(\alpha)$, состоит из двух звеньев ($l = 2$)

Из (12) и (13) следует, что отрезок $(-K_\rho^2)K_\rho^1$ не может пересекать только один из отрезков $(-K_S^2)N$ или NK_S^1 . Но отрезок не может пересекать и оба отрезка $(-K_S^2)N$ и NK_S^1 , поскольку в противном случае ломаная $K_S(\alpha)$ имела бы 3 звена, что противоречит утверждению а).

Отрезок $(-K_\rho^2)K_\rho^1$ не может иметь с отрезками $(-K_S^2)N$ и NK_S^1 единственную общую точку N . В самом деле, если бы отрезок $(-K_\rho^2)K_\rho^1$ проходил бы через точку N и не имел бы других общих точек ни с отрезком $(-K_S^2)N$, ни с отрезком NK_S^1 , то $K_\rho(\alpha_{(K)}) = K_S(\alpha_{(K)})$, т.е. $A_\rho \in S^{O(K(\alpha_{(K)}))}$ и, следовательно, вектор A_ρ был бы синтезированным при $\alpha = \alpha_{(K)}$, что противоречит условию (3) теоремы.

Итак, мы доказали, что отрезок $(-K_\rho^2)K_\rho^1$ лежит ниже точки N . Этим доказано неравенство (11).

Левую часть неравенства (11) заменим по ее определению, а вместо $\alpha_{(K)}$ и $\delta_{(K)}$ подставим их значения соответственно по формулам (8) и (9); в результате получим:

$$(K_\rho^1 + K_\rho^2) \frac{K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^2}{(K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^2) + (K_S^1 - K_{S^{O(K^2)}}^1)} - K_\rho^2 < \frac{K_{S^{O(K^2)}}^1 K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^1 K_S^2}{(K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^2) + (K_S^1 - K_{S^{O(K^1)}}^1)}. \quad (14)$$

Из положительности $\alpha_{(K)}$ и $K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^2$ следует положительность знаменателя в (14). Поэтому обе части неравенства (14) можем умножить на этот знаменатель, после чего элементарными преобразованиями получаем неравенство (7). Таким образом, для любой стратегии A_ρ , удовлетворяющей условию (6), справедливо неравенство (7), т.е. выполняется условие $\tau_{(K)}$. Утверждение б) доказано.

Утверждение с) следует из утверждения б) (Лабскер, Ященко, 2013; доказательство в терминах теории игр с природой). ■

Предложение 4 (достаточные условия). Пусть выполняются условия (4) и (5). Тогда каждое из следующих условий:

- а) выполняется условие $\tau_{(K)}$ и
- б) множество $S^{O(K(\alpha))}$ имеет структуру (10), — влечет за собой включение (3).

Доказательство. Докажем, что из условия а) следует включение (3). Допустим противное: существуют $\alpha_\rho \in (0,1)$ и стратегия A_ρ , удовлетворяющая условию (6) (существование такой стратегии гарантировано условием (5)) и такая, что

$$A_p \in S^{O(K(\alpha_p))}. \quad (15)$$

Из (15) следует равенство $K_p(\alpha_p) = K_S(\alpha_p)$, означающее, что при $\alpha = \alpha_p$ отрезок $K_p(\alpha)$ имеет общую точку с ломаной $K_S(\alpha)$.

В силу (4) число звеньев ломаной $K_S(\alpha)$ не меньше 2 ($l \geq 2$), и, следовательно, отрезки $(-K_S^2)K_{S^{O(K^2)}}^1$ и $(-K_{S^{O(K^1)}}^2)K_S^1$ не совпадают и пересекаются в точке N (рис. 3, на котором число звеньев $l = 4$). В силу (6) отрезок $K_p(\alpha)$ не может совпадать ни с одним из отрезков $(-K_S^2)K_{S^{O(K^2)}}^1$ и $(-K_{S^{O(K^1)}}^2)K_S^1$ и не может пересекать только один из отрезков $(-K_S^2)N$ или NK_S^1 , поскольку из (6) следует, что $-K_p^2 < -K_S^2$ и $K_p^1 < K_S^1$.

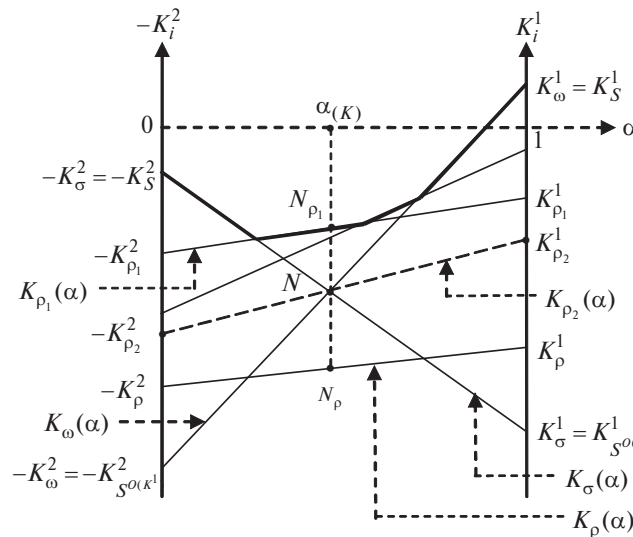


Рис. 3. Графики показателей $K(\alpha)$ -оптимальных векторов в случае, когда ломаная, представляющая график функции $K_S(\alpha)$, состоит из четырех звеньев ($l = 4$)

Если отрезок $K_p(\alpha)$ пересекает оба отрезка $(-K_S^2)N$ и NK_S^1 и занимает, например, положение отрезка $K_{p1}(\alpha) = (-K_{p1}^2)K_{p1}^1$ (см. рис. 3), то

$$K_p(\alpha_{(K)}) = K_{p1}(\alpha_{(K)}) > \delta_{(K)}, \quad (16)$$

где $\delta_{(K)}$ — ордината точки N (рис. 3, $\delta_{(K)} = -|N\alpha_{(K)}|$, где $|N\alpha_{(K)}|$ — длина отрезка $N\alpha_{(K)}$).

Если отрезок $K_p(\alpha)$ имеет с отрезками $(-K_S^2)N$ и NK_S^1 единственную общую точку N и занимает, например, положение отрезка $K_{p2}(\alpha) = (-K_{p2}^2)K_{p2}^1$, то

$$K_p(\alpha_{(K)}) = K_{p2}(\alpha_{(K)}) = \delta_{(K)}. \quad (17)$$

Оба случая (16) и (17) можно объединить одним неравенством $K_p(\alpha_{(K)}) \geq \delta_{(K)}$. Подставляя в это неравенство выражения для $\alpha_{(K)}$ и $\delta_{(K)}$ по формулам соответственно (8) и (9), получим

$$(K_p^1 + K_p^1) \frac{K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^2}{(K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^2) + (K_S^1 - K_{S^{O(K^2)}}^1)} - K_p^2 \geq \frac{K_{S^{O(K^2)}}^1 K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^1 K_S^2}{(K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^2) + (K_S^1 - K_{S^{O(K^2)}}^1)}. \quad (18)$$

Умножая обе части неравенства (18) на положительный знаменатель и проводя элементарные преобразования, получим неравенство

$$(K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^2)K_p^1 - (K_S^1 - K_{S^{O(K^2)}}^1)K_p^2 \geq K_{S^{O(K^2)}}^1 K_{S^{O(K^1)}}^2 - K_S^1 K_S^2,$$

которое противоречит неравенству (7). Следовательно, отрезок $K_p(\alpha) = (-K_p^2)K_p^1$ не имеет общих точек с ломаной $K_S(\alpha)$, и потому вектор A_p не является $K(\alpha)$ -оптимальным, что противоречит допущению (15). Таким образом, доказано, что из условия а) следует (3).

Теперь докажем, что (3) следует также и из условия б). Пусть множество $S^{O(K(\alpha))}$ имеет структуру (10) и пусть $A_p \in S^{O(K(\alpha_p))}$ при некотором $\alpha = \alpha_p \in [0, 1]$.

Из структуры (10) очевидным образом вытекают следующие утверждения: если $\alpha_p \in [0, \alpha_{(K)})$, то $A_p \in S^{O(K^2)}$; если $\alpha_p = \alpha_{(K)}$, то $A_p \in S^{O(K^2)} \cup S^{O(K^1)}$; если $\alpha_p \in (\alpha_{(K)}, 1]$, то $A_p \in S^{O(K^1)}$. Таким образом, справедливо включение $S^{O(K(\alpha_p))} \subset S^{O(K^2)} \cup S^{O(K^1)}$, но поскольку $\alpha_p \in [0, 1]$ было произвольным, для которого $A_p \in S^{O(K(\alpha_p))}$, то справедливо включение (3). ■

ФОРМУЛИРОВКА ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В ТЕРМИНАХ ТЕОРИИ ИГР С ПРИРОДОЙ

Придадим обозначениям в терминах двухкритериальной задачи оптимизации конкретный смысл из теории игр с природой. Пусть S — множество стратегий $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i \in I$, игрока A , где a_{ij} , $i \in I$, $j \in J$ — его выигрыши; $K^1 = W$ — критерий Вальда и $K^2 = Sav$ — критерий Сэвиджа. Тогда $K_i^1 = W_i$ — показатель эффективности стратегии A_i , $i \in I$, по критерию Вальда; $K_S^1 = W_S$ — W -цена игры; $S^{O(K^1)} = S^{O(W)}$ — множество W -оптимальных стратегий; $K_i^2 = Sav_i$ — показатель неэффективности стратегии A_i , $i \in I$, по критерию Сэвиджа; $K_S^2 = Sav_S$ — Sav -цена игры; $S^{O(K^2)} = S^{O(Sav)}$ — множество Sav -оптимальных стратегий; $K(\alpha) = (WSav)(\alpha)$ — критерий Вальда–Сэвиджа с выигрыш-показателем $\alpha \in [0, 1]$; $K_i(\alpha) = (WSav)_i(\alpha)$, $i \in I$ — показатель эффективности стратегии A_i , $i \in I$, по критерию Вальда–Сэвиджа; $K_S(\alpha) = (WSav)_S(\alpha)$ — цена игры по критерию Вальда–Сэвиджа; $S^{O(K(\alpha))} = S^{O((WSav)(\alpha))}$ — множество $(WSav)(\alpha)$ -оптимальных стратегий; $(S^{O(K^1)})^{O(K^2)} = (S^{O(W)})^{O(Sav)}$; $K_{S^{O(K^1)}}^2 = Sav_{S^{O(W)}}$; $(S^{O(K^2)})^{O(K^1)} = (S^{O(Sav)})^{O(W)}$; $K_{S^{O(K^2)}}^1 = W_{S^{O(Sav)}}$.

Условия (4) и (5) будут выглядеть так:

$$S^{O(W)} \cap S^{O(Sav)} = \emptyset, \quad (19)$$

$$S \not\subset [S^{O(W)} \cup S^{O(Sav)}], \quad (20)$$

условие $\tau_{(K)}$ превратится в условие $\tau_{(WSav)}$: для каждого вектора $A_p \notin S^{O(W)} \cup S^{O(Sav)}$ (существующего в силу (20)), справедливо неравенство

$$(Sav_{S^{O(W)}} - Sav_S)W_p - (W_S - W_{S^{O(Sav)}})Sav_p < W_{S^{O(Sav)}}Sav_{S^{O(W)}} - W_S Sav_S. \quad (21)$$

Тогда предложение 3 перефразируется в терминах теории игр с природой следующим образом.

Теорема 1 (необходимые условия отсутствия синтезирования). Пусть в игре с природой не существует стратегии, оптимальной одновременно по критерию Вальда и по критерию Сэвиджа (выполняется условие (19)), и существует стратегия, не являющаяся оптимальной ни по критерию Вальда, ни по критерию Сэвиджа (выполняется условие (20)). Тогда если в данной игре критерий Вальда–Сэвиджа не обладает свойством синтезирования, то справедливы следующие утверждения:

- число звеньев ломаной, представляющей график цены игры по критерию Вальда–Сэвиджа, равно 2;
- игра удовлетворяет условию $\tau_{(WSav)}$;
- множество стратегий, оптимальных по критерию Вальда–Сэвиджа, имеет структуру

$$S^{O((WSav)(\alpha))} = \begin{cases} S^{O(Sav)} & \text{при } \alpha = 0; \\ (S^{O(Sav)})^{O(W)} & \text{при } 0 < \alpha < \alpha_{(K)}; \\ S^{O((WSav)(\alpha))} = (S^{O(Sav)})^{O(W)} \cup (S^{O(W)})^{O(Sav)} & \text{при } \alpha = \alpha_{(K)}; \\ (S^{O(W)})^{O(Sav)} & \text{при } \alpha_{(K)} < \alpha < 1; \\ S^{O(W)} & \text{при } \alpha = 1, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$\alpha_{(WSav)} = \frac{Sav_{S^{O(W)}} - Sav_S}{(Sav_{S^{O(W)}} - Sav_S) + (W_S - W_{S^{O(Sav)}})}. \quad (23)$$

Теорема 2 (достаточные условия отсутствия синтезирования). Пусть в игре с природой не существует стратегии, оптимальной одновременно по критерию Вальда и по критерию Сэвиджа (выполняется условие (19)), и существует стратегия, не являющаяся оптимальной ни по критерию Вальда, ни по критерию Сэвиджа (выполняется условие (20)). Тогда из каждого из следующих условий:

а) игра удовлетворяет условию $\tau_{(WSav)}$;

б) множество стратегий, оптимальных по критерию Вальда–Сэвиджа, имеет структуру (22); — следует, что критерий Вальда–Сэвиджа не обладает свойством синтезирования.

Из теорем 1 и 2 следует, что каждое из утверждений а) и б) теоремы 2 есть необходимое и достаточное условие того, что критерий Вальда–Сэвиджа не обладает свойством синтезирования.

Отметим, что необходимое условие а) теоремы 1 не является достаточным условием отсутствия у критерия Вальда–Сэвиджа свойства синтезирования. Для доказательства этого нетрудно привести соответствующий пример.

ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Применение полученных результатов проиллюстрируем на решении следующей задачи (Лабскер, 2016).

Задача. Для изготовления X единиц определенной продукции предприятием должен быть выбран один из четырех технологических способов производства. Потребность количества этой продукции носит случайный характер и, как показывает маркетинговый анализ данных за прошлые периоды, может принимать значения 25, 35, 45 и 50 единиц. Производственные затраты TC_i на изготовление X единиц продукции технологическим способом i ($i = 1, \dots, 4$) включают фиксированные затраты $Q_1 = 145$, $Q_2 = 70$, $Q_3 = 180$, $Q_4 = 110$ условных денежных единиц (у.е.) и удельные затраты $c_1 = 3$, $c_2 = 5$, $c_3 = 2$, $c_4 = 4$ у.е. на производство единицы продукции и выражаются формулой

$$TC_i = Q_i + c_i X, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (24)$$

Перед предприятием стоит задача выбора одного из четырех технологических способов изготовления продукции, с тем чтобы производственные затраты были наименьшие.

Предприятию до принятия им решения о выборе технологического способа известны возможные значения спроса на изготавливаемую продукцию (25, 35, 45, 50 ед.). Если бы предприятие в момент выбора технологического способа знало, какой будет спрос, оно выбрало бы технологический способ, при котором наименьшие производственные затраты. Но предприятие этого не знает. Также у предприятия отсутствует информация о вероятностях значений спроса, и нет статистической возможности определить это вероятностное распределение. Реальный спрос в режиме реального времени становится известным предприятию в период реализации готовой продукции после выбора технологического способа и производства продукции по выбранной технологии. Таким образом, предприятию предстоит принять решение о выборе технологического способа производства в условиях неопределенности.

Решение. Для анализа данной задачи подходящей является модель “Игра с природой”, в которой рациональным игроком A выступает предприятие, а природой является потребность в изготавливаемой продукции. Игрок A располагает четырьмя стратегиями $A_i, i = 1, \dots, 4$ и выбрать для изготовления продукции технологический способ i . Природа может пребывать в одном из четырех состояний: $\Pi_1 = 25, \Pi_2 = 35, \Pi_3 = 45$ и $\Pi_4 = 50$ ед. спроса.

Отметим, что одним из принципов модели “Игра с природой” является принцип синхронности выбора определенной стратегии рациональным игроком и принятия природой одного из возможных состояний. Понятие синхронности не означает одновременность этих событий в смысле реального хронологического времени, а указывает на то, что выбор стратегии рациональным игроком осуществляется в условиях незнания им состояния природы, т.е. эти события происходят одновременно в смысле игрового времени.

В модели в качестве выигрышей $a_{ij}, i, j = 1, 2, 3, 4$, игрока A в игровой ситуации (A_i, Π_j) , когда игрок A выбирает стратегию A_i , а природа находится в состоянии Π_j , будем рассматривать производственные затраты предприятия, вычисляемые по формуле (24). Таким образом, выигрыши $a_{ij}, i, j = 1, \dots, 4$ — это отрицательные величины, которые в обозначениях модели подсчитываются по формуле $a_{ij} = -(Q_i + c_i \Pi_j)$, $i, j = 1, \dots, 4$. Из них формируем платежную матрицу A .

Подсчитываем показатели $\beta_j = \max\{a_{ij} : i = 1, \dots, 4\}, j = 1, \dots, 4$, благоприятности состояний природы и проставляем их в последней дополнительной строке матрицы A . Находим риски $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}, i, j = 1, \dots, 4$, и формируем матрицу рисков R .

$A =$		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	W_i
	A_1	-220	-250	-280	-295	-295
	A_2	-195	-245	-290	-320	-320
	A_3	-230	-250	-270	-280	-280
	A_4	-210	-250	-290	-310	-310
	β_j	-195	-245	-270	-280	

$R =$		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Sav_i
	A_1	25	5	10	15	25
	A_2	0	0	20	40	40
	A_3	35	5	0	0	35
	A_4	15	5	20	30	30

В последних добавленных столбцах матриц A и R стоят W -показатели и Sav -показатели стратегий. Перед тем как приступить к процедуре нахождения синтезированных стратегий, целесообразно выяснить их существование. Для этого используем условие $\tau_{(WSav)}$. Из столбцов W_i и Sav_i матриц A и R видно, что

$$W_{S^p} = -280, S^{O(W)} = (S^{O(W)})^{O(Sav)} = \{A_3\}, Sav_{S^{O(W)}} = 35,$$

$$Sav_S = 25, S^{O(Sav)} = (S^{O(Sav)})^{O(W)} = \{A_1\}, W_{S^{O(Sav)}} = -295.$$

Тогда правая часть неравенства (21)

$$W_{S^{O(Sav)}} Sav_{S^{O(W)}} - W_S Sav_S = -3325. \quad (25)$$

Так как стратегии A_2 и A_4 не принадлежат множеству $S^{O(W)} \cup S^{O(Sav)}$, левую часть неравенства (21) надо подсчитать только для этих стратегий, тогда:

$$(Sav_{S^{O(W)}} - Sav_S)W_2 - (W_S - W_{S^{O(Sav)}})Sav_2 = -3575, \quad (26)$$

$$(Sav_{S^{O(W)}} - Sav_S)W_4 - (W_S - W_{S^{O(Sav)}})Sav_4 = -3550. \quad (27)$$

Из неравенств (25)–(27) заключаем, что для стратегий A_2 и A_4 справедливо неравенство (21), т.е. данная игра удовлетворяет условию $\tau_{(WSav)}$. Нетрудно убедиться, что выполняются также условия (19) и (20). Таким образом, справедливы все условия теоремы 2, по которой критерий Вальда–Сэвиджа не обладает свойством синтеза. Это означает, что применение критерия Вальда–Сэвиджа ни при каком значении выигрыш-показателя $\alpha \in [0, 1]$ не приводит к синтезированным решениям, т.е. каждая стратегия, оптимальная по критерию Вальда–Сэвиджа, оптимальна по критерию Вальда или по критерию Сэвиджа. По формуле (23) имеем $\alpha_{(WSav)} = 0, 4$. Тогда, используя

формулу (22), получим следующую структуру множества оптимальных несинтезированных стратегий по критерию Вальда–Сэвиджа:

$$S^{O((WSav)(\alpha))} = \begin{cases} \{A_1, A_3\} & \text{при } \alpha = 0,4; \\ \{A_1\} & \text{при } 0 \leq \alpha < 0,4; \\ \{A_3\} & \text{при } 0,4 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Условно-геометрическая интерпретация данной задачи представлена на рис. 4.

Найденное решение экономически можно проинтерпретировать следующим образом. Если значение выигрыш-показателя α находится в пределах $0 \leq \alpha < 0,4$, критерий Вальда–Сэвиджа рекомендует для изготовления продукции в качестве оптимального выбрать технологический способ 1 (стратегия A_1 в матрице R , оптимальная по критерию Сэвиджа), при котором предприятие гарантирует себе наибольший риск недостижения наименьших затрат при каждой потребности производимой продукции, равный 25 ед. (первая строка матрицы R), т.е. при выборе технологического способа 1 производства риск недостижения наименьших затрат не может быть больше 25 ед.

При выборе другого способа производства указанный риск может оказаться больше 25 ед. Действительно, например, при выборе способа производства 2, 3 или 4 и при потребности соответственно в 50, 25 и 50 ед. продукции риск будет равен соответственно 40, 35 и 30 ед. (см. игровые ситуации (A_2, P_4) , (A_3, P_1) , (A_4, P_4) в матрице рисков R). Принятое решение является крайне пессимистическим относительно рисков, поскольку выбору технологического способа 1 сопутствует наибольший при этом способе риск в 25 ед.

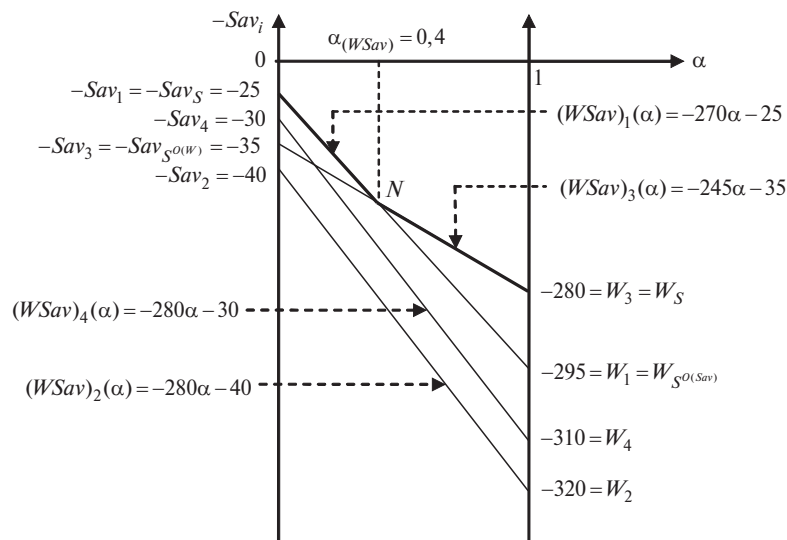


Рис. 4. Геометрическое представление задачи

Если значение выигрыш-показателя α находится в пределах $0,4 < \alpha \leq 1$, то оптимальным по критерию Вальда–Сэвиджа является решение изготавливать продукцию по технологическому способу 3 (стратегия A_3 в матрице A , оптимальная по критерию Вальда). При этом издержки предприятия при любой потребности в продукции составят не более 280 ед. Если предприятие отклонится от оптимального решения и выберет 1, 2 или 4 способ производства, то при потребности в продукции в 50 ед. издержки составят соответственно 295, 320 или 310 у.е. (см. игровые ситуации (A_1, P_4) , (A_2, P_4) , (A_4, P_4) в платежной матрице A). Принятое решение крайне пессимистично относительно издержек, так как при способе 3 издержки в 280 у.е. являются максимальными при этом способе производства.

Если $\alpha = 0,4$, то с точки зрения критерия Вальда–Сэвиджа безразлично, какой выбрать способ производства, 1 или 3.

Замечание 1. При желании платежную матрицу A с помощью аффинного преобразования $a'_{ij} = 0, 2a_{ij} + 64$, $i, j = 1, \dots, 4$, можно было бы редуцировать к матрице с более простыми элементами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Лабскер Л.Г., Ященко Н.А., Амелина А.В. (2011а). Оптимизация выбора корпоративного заемщика банка на основе синтетического критерия Вальда–Сэвиджа // *Финансовая аналитика: проблемы и решения*. № 34 (76). С. 43–54.
- Лабскер Л.Г., Ященко Н.А., Амелина А.В. (2011б). Формирование приоритетной очередности кредитования банком корпоративных заемщиков по синтетическому критерию Вальда–Сэвиджа // *Финансы и кредит*. № 38 (518). С. 31–41.
- Лабскер Л.Г., Ященко Н.А., Амелина А.В. (2012). Очередность кредитования банком корпоративных заемщиков: формирование приоритетного порядка на основе синтетического критерия Вальда–Сэвиджа. Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG.
- Лабскер Л.Г., Ященко Н.А. (2013). К вопросу о доказательстве теоремы о структуре множества стратегий, оптимальных по критерию Вальда–Сэвиджа // *Наука и Мир. Международный научный журнал*. № 1 (1). С. 158–167.
- Лабскер Л.Г. (2014). Теория критериев оптимальности и экономические решения. М.: КНОРУС.
- Лабскер Л.Г. (2016). К вопросу о проблеме сглаживания критерием Гурвица и экономическое приложение // *Инновации и инвестиции*. № 6. С. 134–145.
- Arrow K.J., Hurwicz L. (1972) An Optimality Criterion for Decision Making under Ignorance. In: “*Uncertainty and expectations in economics*”. Oxford: Basil Blackwell and Mott.
- Hurwicz L. (1951). Optimality Criteria for Decision Making under Ignorance. Cowles commission papers No. 370.
- Savage L.J. (1951). The Theory of Statistical Decision // *J. Amer. Statist. Assoc.* Vol. 46. No.1. P. 55–67.
- Wald A. (1950). Statistical Decision Functions. N.Y.: Wiley; L., Chapman & Hall.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Labsker L.G., Yashchenko N.A., Amelina A.V. (2011a). Optimizing the Choice of a Corporate Bank Borrower Based on the Synthetic Wald–Savage Criterion. *Financial Analytics: Problems and Solutions*, 34 (76), 43–54 (in Russian).
- Labsker L.G., Yashchenko N.A., Amelina A.V. (2011b). Formation of the Priority of Bank Lending to Corporate Borrowers According to the Synthetic Wald–Savage Criterion. *Finance and Credit*, 38 (518), 31–41 (in Russian).
- Labsker L.G., Yashchenko N.A., Amelina A.V. (2012). The Priority of Bank Lending to Corporate Borrowers: The Formation of a Priority Order Based on the Synthetic Wald–Savage Criterion. Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG (in Russian).
- Labsker L.G., Yashchenko N.A. (2013). On the Question of the Proof of the theorem on the Structure of the Set of Strategies Optimal by the Wald–Savage Criterion. *Science and World. International Journal of Science*, 1 (1), 158–167 (in Russian).
- Labsker L.G. (2014). The Theory of Optimality Criteria and Economic Decisions. Moscow: KNORUS (in Russian).
- Labsker L.G. (2016). On the Issue of the Smoothing Problem by the Hurwicz Criterion and the Economic Application. *Innovations and Investments*, 6, 134–145 (in Russian).
- Arrow K.J., Hurwicz L. (1972). An Optimality Criterion for Decision Making under Ignorance. In: “*Uncertainty and Expectations in Economics*”. Oxford: Basil Blackwell and Mott.
- Hurwicz L. (1951). Optimality Criteria for Decision Making under Ignorance. Cowles commission papers No. 370.
- Savage L.J. (1951). The Theory of Statistical Decision. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 46 (1), 55–67.
- Wald A. (1950). Statistical Decision Functions. N.Y.: Wiley; L.: Chapman & Hall.

The Property of Synthesizing by the Wald-Savage Criterion and Economic Application

© 2019 L.G. Labsker

*Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia
E-mail: llabsker@mail.ru*

Received 6.11.2018

The author thanks the corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Economics, Professor G.B. Kleiner for the opportunity to make a presentation at his scientific seminar at the Financial University under the Government of the Russian Federation, for discussing the results and constructive comments that contribute to a deeper analysis of the problems considered in the article.

In the game with nature, the synthetic Wald–Savage criterion is defined as the principle of optimality, which makes possible to evaluate the optimality of strategies from a synthetic (joint) point of view of wins and risks. The definition of the synthesized strategy is given, i.e. a strategy that is optimal by the Wald–Savage criterion and is not optimal by either the Wald criterion or the Savage criterion. Introduced into the property of synthesizing, which consists in the existence of a synthesized strategy. Scientific novelty consists in solving the formulated problem of synthesizing, which consists in finding the necessary and sufficient conditions for the Wald–Savage criterion to have no synthesizing properties. Sufficient conditions are also of practical importance in analyzing the problems of making optimal economic decisions, since the fulfillment of these conditions means that it does not make sense to use the Wald–Savage criterion to find synthesized strategies. Moreover, the verification of sufficient conditions does not require reference to the Wald–Savage criterion itself, but is based only on the component criteria. However, the exploitation of the Wald–Savage criterion in the absence of its synthesis properties is not absolutely useless, since it reveals the dependence of the application of the Wald and Savage criteria on the determined payoff indicator. The application of the obtained results is illustrated on the solution of the problem of economic content on the optimal choice of the technological mode of production.

Keywords: playing with nature, Wald criterion, Savage criterion, payoff-indicator, Wald–Savage criterion, synthesized strategy, Wald–Savage synthesizing problem, synthesizing problem solving, two-criterion optimization problem, technological methods of production, need for products, the optimal choice of production method.

JEL Classification: D81.

DOI: 10.31857/S042473880006775-1