

Непараметрическая граница производственных возможностей в вычислимой модели частичного равновесия

© 2019 г. Н.М. Светлов

ЦЭМИ РАН, Москва

E-mail: nikolai.svetlov@gmail.com

Поступила в редакцию 1.04.2019 г.

Создана вычислимая экономико-математическая модель частичного равновесия, в которой функции предложения рассчитываются непосредственно в ходе ее решения на основе данных о непараметрических границах производственных возможностей поставщиков. В отличие от обычных моделей частичного равновесия модель такого типа не сталкивается с трудностями определения параметров функций предложения, повышает объективность и достоверность результатов моделирования. Она позволяет исследовать влияние на рынки изменений в объемах ресурсов, технологиях производства, климатических условиях, причем не требуется вводить предположения о влиянии указанных изменений на функцию предложения, проверка которых трудна и не всегда возможна. Удовлетворительные вычислительные свойства модели достигаются при помощи представления непараметрической границы производственных возможностей в форме системы неравенств, построенной в соответствии с теорией двойственности, в отличие от традиционной формы задачи линейного программирования. Приводятся результаты применения разработанной модели для анализа изменения цен на рынках скота и птицы, молока и зерна в субъектах Российской Федерации в границах 2013 г. (с учетом транспортных связей между ними, природно-сельскохозяйственного зонирования и фактора случайности) в случае частичного задействования существующих резервов улучшения территориально-отраслевой структуры сельского хозяйства России.

Ключевые слова: вычислимая модель, частичное равновесие, анализ политики, теория двойственности, непараметрическая граница производственных возможностей, аграрные рынки, объемы продаж, цены.

Классификация JEL: C63, Q11, Q18.

DOI: 10.31857/S042473880006779-5

ВВЕДЕНИЕ

Роль государства в научно-технической политике не ограничивается ее разработкой. Ряд исследований (Stiglitz, Wallsten, 1999; Глазьев, 2010; Дементьев, 2009 и др.) доказывает, что государству принадлежит ключевая роль в ее осуществлении, в том числе через участие в производственной и инвестиционной деятельности. К аргументам указанных авторов добавим, что государство аккумулирует большие объемы данных и способно использовать их для влияния на рынки в интересах налогоплательщиков.

Влияние политики на рынки может быть благоприятным для одних агентов и вызывать недовольство других. Моделирование этого влияния — одна из задач анализа политики (Fischer et al., 2007; Kerr, Graisford, 2007). Для этого используются числовые модели равновесия: общего (Melo, Tarr, 1999; Макаров, 1999; Макаров и др., 2007; Полбин, Дробышевский, 2014) или частичного (Fock et al., 2000; Прокопьев, 2015; Светлов, 2016; Бородин, 2018).

Данная статья посвящена моделям частичного равновесия (МЧР). Ее цель — изложение и апробация способа расширения возможностей и преодоления некоторых недостатков таких моделей. Научная новизна заключается в результативном применении известных положений теории двойственности в линейном программировании к решению прикладной задачи совершенствования моделей влияния политики на рынки. Предлагается заменить параметрическую функцию предложения в модели частичного равновесия линейной подзадачей отыскания объема предложения по заданной в непараметрической форме границе производственных возможностей для случая, когда

подзадача об объемах предложения линейна. Автором разработан способ, позволяющий избежать вычислительные сложности, с которыми сопряжено решение получившейся задачи.

Почему так важна задача построения модели частичного равновесия, в которой на месте функции предложения находится субмодель, выводящая предложение из непараметрической границы производственных возможностей? Дело в том, что возможности стандартного подхода ограничены рядом присущих ему проблем.

1. Параметрическая идентификация многомерной функции предложения очень сложна. Невозможно определить данную функцию с помощью регрессионного анализа фактических данных о ценах и объемах продаж. При равновесном ценообразовании изменение фактических цен связано со *смещением* кривых спроса и предложения, поэтому нельзя ввести допущение, что ряд наблюдаемых цен и объемов сделок принадлежит одной и той же кривой предложения. На практике приходится использовать косвенные методы в сочетании с калибровочными процедурами (Прокопьев, 2016). Проблемы, связанные с измерением ценовых эластичностей — основание осторожного отношения к моделям этого класса (Ablet, 2007). Отказ от параметрической функции предложения не решает аналогичной проблемы, связанной с функцией спроса, но результаты моделирования становятся намного более робастными.

2. При параметрическом представлении производственной функции (для последующего вывода из нее функции предложения) почти всегда предполагается (явно или неявно), что все ресурсы используются без остатка. Это предположение особенно уязвимо в сельском хозяйстве, где погодные условия конкретного года могут предопределять недоиспользование тех или иных ресурсов.

3. Параметрическое представление вмешательства государства в производство (например, преференций отдельным технологиям) требовало бы данных о достаточно продолжительной ретроспективе таких вмешательств или в крайнем случае наличия хорошо себя зарекомендовавшей имитационной модели, позволяющей сгенерировать выборку для параметризации. Такие требования практически равносильны неприменимости формализма частичного равновесия для описания подобных интервенций.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ОБЪЕМЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ В СИСТЕМУ НЕРАВЕНСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Перечисленные выше проблемы в принципе можно преодолеть, переформулировав условие частичного равновесия¹ $s(p) = d(p)$, где $s(p)$ и $d(p)$ — неотрицательные вектор-функции спроса и предложения от вектора цен $p > 0$, в задачу

$$\arg \max_s (ps - c(s) | s \in S) = d(p), \quad (1)$$

решаемую относительно векторов s и p . Здесь s — вектор объемов предложения, S — множество осуществимых производственных программ, $c(s)$ — функция издержек. Такая формулировка подразумевает, что многочисленные независимые поставщики-ценополучатели выбирают планы, максимизирующие их прибыль (без учета инвестиционной деятельности) при возможности обмениваться ресурсами. Тогда при заданных ценах p результатом совокупного производственного процесса становится предложение s^* , которому соответствует максимум (на S) суммарной по всем поставщикам прибыли. Далее будем называть класс задач, эквивалентных (1), PF+PE-моделью².

PF+PE-модель, записанная в форме (1), не входит в класс задач математического программирования. Здесь цены являются константами в оптимизационной задаче³, но должны быть переменными в условии равновесия. Для численного решения такой задачи потребовалась бы процедура, которая вначале решает оптимизационную задачу о размере предложения при заданных (фиксиро-

¹ Для большинства практических задач такая форма записи достаточна, поэтому более общее условие, допускающее нулевые цены, в статье не обсуждается.

² От англ. “production frontier” и “partial equilibrium”.

³ В противном случае решением задачи оказался бы оптимум для монополиста.

ванных) ценах, а потом, вычислив образовавшийся дисбаланс спроса и предложения, корректирует цены, повторяя эти действия до тех пор, пока спрос и предложение не сойдутся по всему набору благ. В практических приложениях обеспечение сходимости такой процедуры затруднительно: многомерная функция предложения от цен, задаваемая оптимизационной задачей, вовсе не обязательно непрерывна. Встает вопрос, можно ли переформулировать задачу так, чтобы ее можно было эффективно решать, используя существующие инструментальные средства.

В данной статье проблема решена применительно к частному случаю, когда подзадача оптимизации $\max_s (ps - c(s) | s \in S)$, входящая в состав задачи (1), линейна. Введем следующую спецификацию этой подзадачи:

$$A\lambda \leq a_0; \quad B\lambda \geq s; \quad \lambda \geq 0; \quad s \geq 0; \quad (2)$$

$$ps - c\lambda \rightarrow \max. \quad (3)$$

В выражениях (2) и (3) переменными являются λ — вектор интенсивности производственных процессов и s — вектор объемов производства. Параметры: a_0 — вектор объемов ресурсов; A, B — матрицы расхода ресурсов и выпуска продукции при единичной интенсивности каждого производственного процесса; p — вектор цен продукции каждого вида; c — вектор издержек каждого производственного процесса (в денежном выражении) при его единичной интенсивности. Условия (2) задают границу производственных возможностей (Farrell, 1957; Charnes et al., 1978).

Замечание. Вместо задачи (2)–(3) можно использовать другие встречающиеся в литературе не-параметрические спецификации границы производственных возможностей, лишь бы они имели форму задачи линейного программирования (см. например, (Banker et al., 1984)).

Теперь рассмотрим вектор p как переменную, вменив ему условие $p > 0$, и определим функцию спроса $s(p)$, значение которой равно вектору s^* , полученному в результате решения задачи (2)–(3) при ценах p и неизменных значениях остальных параметров. Дополним задачу условием равновесия

$$s(p) = d(p), \quad (4)$$

где функция спроса $d(p)$ непрерывна, монотонно убывает по каждому компоненту вектора p , а ее матрица Якоби определена при любом $p > 0$.

Если подсистема (2)–(3) решается относительно λ и s при фиксированном векторе p , тогда как уравнение (4) решается относительно p , то получившаяся система (2)–(4) является спецификацией задачи (1).

Первая теорема двойственности в линейном программировании (Dantzig, Orden, 1953, p. 1) позволяет заменить задачу (2)–(3) системой линейных уравнений и неравенств. Воспользовавшись этой заменой, составим новую задачу, эквивалентную (2)–(4). Эта задача, наряду с выражением (2), содержит выражения:

$$\delta A - \eta B \geq -c; \quad \eta \geq p; \quad \delta \geq 0; \quad p > 0; \quad (5)$$

$$ps - c\lambda = \delta a_0; \quad (6)$$

$$s = d(p). \quad (7)$$

В системе (2), (5)–(7) переменными являются, помимо λ и s , цены p , объективно обусловленные оценки ресурсов δ и продукции η . Остальные обозначения прежние. Выражение (5) — это система неравенств, двойственная по отношению к (2); (6) — условие равенства целевых функций прямой и двойственной задач; (7) — условие равновесия. Все уравнения и неравенства системы линейны, за исключением (6) и (7).

В силу первой теоремы двойственности в линейном программировании решение задачи (2), (5)–(7) соответствует частичному равновесию для спроса $d(p)$ и предложения, задаваемого задачей (2)–(3). Это решение существует, если существует оптимальное решение задачи (2)–(3), а множе-

ство значений функции $d(p)$ есть неотрицательный ортант пространства продуктов⁴. При этих условиях проекция любого решения $(\lambda^*, s^*, \delta^*, \eta^*, p^*)$ задачи (2), (5)–(7) на пространство переменных задачи (2)–(3) совпадает с некоторым оптимальным решением (λ^*, s^*) задачи (2)–(3) при ценах p^* .

Таким образом, для отыскания равновесия в изучаемой спецификации PF+PE-модели не требуется решать задачу (2)–(3) методами линейного программирования, итеративно согласовывая решение с функцией спроса. Достаточно решить систему неравенств (линейных) и уравнений, некоторые из которых нелинейны.

PF+PE-МОДЕЛЬ РЫНКОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ПРОДУКЦИИ РЕГИОНОВ РОССИИ

1. Исходная модель. В рассматриваемом примере многомерная функция предложения выводится из числовой модели территориально-отраслевой структуры сельского хозяйства России (Svetlov et al., 2019). Эта линейная модель объединяет непараметрические границы производственных возможностей всех субъектов Российской Федерации в границах 2013 г. Условия удовлетворения потребностей их населения приняты согласно медицинским нормам. Включены транспортные подзадачи по доставке продукции из мест производства (включая импорт) в места потребления (включая экспорт).

Модель описывает двухэтапный процесс принятия решений в случайных условиях (Кардаш, 1977). Каждый исход, в соответствии со (Светлов и др., 2013), представлен фактическими данными одного года⁵. Целевая функция модели — максимум математического ожидания маржинального дохода⁶ сельхозпроизводителей. В модели свыше 100 тыс. переменных и около 15 тыс. ограничений.

Источником данных для модели служит база данных региональных агропродовольственных систем (Сиптиц и др., 2015), сформированная на основе публичных данных Росстата и Единой межведомственной информационно-статистической системы (ЕМИСС) по регионам России.

Модель отражает производство четырех *продуктовых агрегатов* — зерна; молока; скота и птицы (в живой массе); остальной продукции сельского хозяйства (в стоимостном выражении). Первые три считаются условно-транспортными: их продажи учитываются по месту потребления, для чего составляется оптимальный план межрегиональных перевозок, импорта и экспорта. Продажи остальной продукции сельского хозяйства (условно-нетранспортабельной) учитываются по месту производства.

Ресурсы: сельхозугодья, пашня, основные средства производства, оборотные средства, работники (занятые в сельхозпроизводстве), поголовье животных в пересчете на крупный рогатый скот, фуражное зерно. Сельхозугодья и пашня дифференцированы по 12 природно-сельскохозяйственным зонам. Наличие ресурсов, кроме земельных, аппроксимировано данными сельхозорганизаций с применением корректирующих коэффициентов.

Модель в ее исходном виде предполагает, что цены не зависят от объема продаж. Используя ее в составе PF+PE-модели в качестве субмодели предложения, можно существенно расширить ее аналитические возможности. Ни одна традиционная МЧР не в состоянии достичь столь детального представления факторов предложения, какое возможно в PF+PE-модели. Наряду с субмоделью предложения PF+PE-модель содержит нелинейные многомерные функции спроса на рынках субъектов федерации, а также линейные многомерные функции, связывающие цены экспорта или импорта с соответствующими объемами.

Полученная таким путем PF+PE-модель содержит (в представлении, подготовленном препроцессором к процедуре поиска оптимума) 123 426 переменных и 67 992 ограничения, из числа кото-

⁴ В прикладных задачах существование решения, как правило, обеспечивается при менее обязывающих требованиях к функции спроса.

⁵ В.А. Кардаш использует данные по группам лет со схожими погодными условиями, пренебрегая возможностью исходов хуже среднегрупповых.

⁶ Управленческий эквивалент теоретического понятия “прибыль в краткосрочном периоде”.

рых 12 808 нелинейные. Ее полная математическая запись, раскрывающая архитектуру и использованные приемы моделирования, приведена в Приложении.

2. Данные и сценарные условия PF+PE-модели. Сценарий отражает равновесие, которое сложилось бы на рынках в результате межрегиональной диффузии технологий в течение примерно пятилетнего периода⁷ при условиях:

- ресурсы и технологические возможности сельского хозяйства соответствуют периоду 2011—2015 гг., их колебания в этот период считаются случайными;
- минимальная потребность населения регионов в зерне, молоке, скоте и птице (в том числе в переработанном виде) соответствует численности населения 2015 г. и рекомендуемым нормативам обеспеченности этой продукцией;
- насыщение региональных рынков продукцией наступает при превышении продаж над потребностью на 10%;
- средний процент по займам на пополнение оборотных средств составляет 20% годовых, а средний срок пользования ими — 1 год;
- транспортные тарифы соответствуют 2017 г. и не подвержены случайной вариации;
- ограничения пропускной способности инфраструктуры не предусмотрены;
- средний тариф на импорт молока, скота и птицы (равно как и для продукции их переработки) составляет 15% независимо от объема поставок;
- внешняя торговля зерном осуществляется только по морским маршрутам;
- не действуют другие ограничения на внешнюю торговлю, кроме уже учтенных в издержках импорта и экспортной выручке;
- действие случайных факторов соответствует многомерному эмпирическому распределению вероятностей, задаваемому данными 2011—2015 гг.

Исходные данные для границ производственных возможностей и цен те же, что и в сценарии “Фактический климат” модели (Svetlov et al., 2019).

Сценарные значения эластичностей и кросс-эластичностей спроса, экспорта и импорта по ценам получены при помощи процедуры калибровки, включенной в состав модели (Fock et al., 2000), и на основе опорных значений, использованных этими авторами, а также данных Продовольственной и сельскохозяйственной организации ООН об объемах продаж, экспорта и импорта соответствующей продукции в натуральном и стоимостном выражении по России за 2011—2015 гг. Для всех регионов России эластичности и кросс-эластичности спроса по цене приняты одинаковыми.

3. Торговля сельхозпродукцией в сценарном равновесии. При сценарных условиях моделируемый процесс диффузии технологий обеспечивает приращение математического ожидания стоимости произведенной в России товарной продукции до 5,036 трлн руб., что выше аналогичного среднегодового показателя за 2011—2015 гг. на 0,31%. Его коэффициент вариации составит 5,05% против 5,12 по фактическим данным: товаропроизводители способны несколько лучше адаптироваться к неопределенности, присущей сельскому хозяйству.

Сценарное состояние внутрироссийского рынка продовольствия представлено в таблице. Объемы продаж в натуральном выражении, представленные в этой таблице в столбцах под общим заглавием “Исходы случайных условий...”, рассчитаны по формуле $\sum_{r \in R} q_{rpy}$ (обозначения см. в Приложении), где индекс y соответствует исходу (столбцу таблицы), а p — виду продукции (группе строк). Значения выручки определены по формуле $\sum_{r \in R} v_{rpy} q_{rpy}$. Логика расчета показателей для всей продукции сельского хозяйства аналогична, только вместо натуральных объемов используется стоимостной агрегат.

⁷ Это условие определяется параметром δ , определяющим область доверия согласно (Thompson et al., 1990). Принятое значение $\delta = 0,1$ при темпе обновления капитальной ресурсной базы 2% в год примерно соответствует пятилетнему периоду.

Таблица. Продажи продукции сельского хозяйства на внутренних рынках России*

Показатели	Исходы случайных условий, подобные годам:					Коэффициенты вариации, %	Среднее	Фактическое**	Прирост, %
	2011	2012	2013	2014	2015				
Всего сельскохозяйственной продукции***									
Продажи в фактических ценах, млрд руб.	5180	4879	4807	4316	4577	6,85	4752	4734	0,37
Индекс цен	0,997	0,997	0,997	0,998	0,998	0,08	0,997	1	−0,27
Продажи в равновесных ценах, млрд руб.	5163	4863	4791	4307	4569	6,78	4739	4734	0,10
Зерно									
Продажи, млн т	12,78	12,76	12,77	12,77	13,01	0,83	12,82	12,76	0,449
Цена, тыс. руб./т	8,57	8,56	8,56	7,35	8,50	6,45	8,31	8,31	−0,003
Выручка, млрд руб.	109,5	109,2	109,4	93,9	110,5	6,64	106,5	106,0	0,446
Молоко									
Продажи, млн т	47,44	47,44	47,42	47,42	48,88	1,35	47,72	47,42	0,638
Цена, тыс. руб./т	20,96	20,96	20,95	22,25	21,62	2,72	21,35	21,33	0,109
Выручка, млрд руб.	994	994	994	1055	1057	3,34	1019	1011	0,748
Скот и птица (в живой массе)									
Продажи, млн т	11,56	11,56	11,56	11,56	11,58	0,09	11,57	11,56	0,072
Цена, тыс. руб./т	85,45	85,41	85,45	90,25	95,15	4,91	88,34	88,35	−0,009
Выручка, млрд руб.	988	987	988	1043	1102	4,98	1022	1021	0,062

* Все стоимостные показатели приведены к 2015 г.

** Фактический уровень продаж аппроксимирован нормативной потребностью населения России в соответствующей продукции по состоянию на 2015 г.

*** Часть условно-нетранспортабельной продукции, учтенной в этом разделе таблицы, потребляется за рубежом.

Базой для расчета прироста продаж при составлении таблицы приняты не фактические продажи, а нормативные, отражающие минимальную потребность населения, поскольку статистика учитывает оптовые продажи сельхозпродукции по месту производства. По месту потребления учитываются только продовольственные товары, которые из нее изготовлены.

В сценарных условиях продукции будет производиться и продаваться больше, чем нужно по нормативу. Это приведет к некоторому снижению товарных цен на внутреннем рынке как в целом по ассортименту сельхозпродукции, так и по двум отдельным видам — зерну и скоту (с птицей). Молоко в сценарных условиях подорожает.

При условиях, заданных сценарием, российские сельхозтоваропроизводители с избытком удовлетворяют потребность всего населения страны в зерне и мясных продуктах с выгодой для себя: математическое ожидание маржинального дохода составляет 593,6 млрд руб. В отсутствие государственных гарантий продовольственной безопасности, выражаемых включенными в модель условиями удовлетворения минимальных потребностей, продажи сельхозпродукции за рубеж были бы значительно выше, чем по сценарному решению, но это привело бы к недостаточному потреблению этих продуктов и росту цен в регионах России⁸.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен новый прием построения моделей частичного равновесия — замена функций предложения системой линейных уравнений, образуемой парой взаимно двойственных задач линейного программирования, одна из которых задает границу производственных возможностей,

⁸ Данные о внешней торговле России, о производстве, объемах продаж и ценах продукции сельского хозяйства в трех субъектах Российской Федерации — Краснодарском крае, Белгородской области, Республике Татарстан, а также об объемах продаж и ценах этой продукции на оптовых рынках Москвы и Санкт-Петербурга, полученные в результате решения составленной PF+PE-модели по описанному сценарию, и краткие комментарии к этим данным представлены в Приложении, размещенном в свободном доступе по адресу <http://svetlov.timacad.ru/sci1/pfpe.pdf>.

а вместе они определяют объем предложения при равновесных ценах. На этой основе введен новый тип моделей частичного равновесия — PF+PE-модели. Благодаря ему решены проблемы, существенно сдерживающие применение таких моделей:

- метод избавляет от необходимости постулировать функциональные формы функции предложения, оценивать ненаблюдаемые ценовые эластичности и кросс-эластичности предложения;
- адекватно описываются ситуации, когда некоторые ресурсы используются не полностью;
- метод позволяет вводить в модель и исследовать субсидии на ресурсы, предоставление торгуемых ресурсов на нерыночных условиях, субсидии на процентные ставки по кредитам, что было затруднительно или невозможно при стандартном подходе.

Новый подход свободен от препятствий детализации представления сферы производства, кроме ограничений со стороны инструментальных средств и имеющейся статистики. В частности, он дает возможность с необходимой точностью описать различные исходы случайных условий и вычислить равновесия, складывающиеся при каждом исходе, в ситуации, когда производственная программа принимается и выполняется еще до того, как станет известен исход. Кроме того, в сравнении с обычными моделями частичного равновесия в PF+PE-модели упрощается и становится более точным отражение капиталовложений и их последствий для рынков. Для аграрных приложений последнее особенно актуально в силу вывода (Zinchenko, 2017) о недоинвестировании сельского хозяйства.

МЧР уязвимы для критики с позиций теоретических представлений, согласно которым равновесие не характерно для реальных рынков, а тенденция к нему — не главный фактор ценообразования. Стандартный подход в ответ на эту критику допускал только введение разрыва между спросом и предложением, обусловленного прямыми субсидиями или транзакционными издержками. В этом отношении предложенный в статье прием полезен тем, что позволяет в явной форме отразить некоторые аспекты таких феноменов, как неполнота информации (например, недооценка поставщиками вероятности наступления неблагоприятных исходов случайных условий); экстерналии; неконкурентные условия доступа к ресурсам; присутствие внеэкономической мотивации.

Проведенная апробация доказала возможность применения данного подхода к моделям, порядков матриц Якоби которых приближается к $10^5 \times 10^5$. Такие порядки дают возможность детального модельного описания сферы производства и, соответственно, получения более надежных оценок предложения продукции в зависимости от цен в сравнении с имеющимися альтернативами.

Перспективна возможность применения предложенного подхода для моделирования производственных цепей. В этом случае задачами вида (2), (5)–(7) можно описать не только производство промежуточной продукции, но и спрос на нее (наряду с предложением конечной продукции).

Предложенный прием целесообразно использовать при разработке инструментальных средств анализа экономической политики и отдельных ее направлений (научно-технической, аграрной, промышленной политики) с позиций влияния политических инструментов на товарные рынки, как внутренние, так и международные. Это позволит заранее предвидеть многие косвенные эффекты решений государственной власти, использовать политические инструменты с большей уверенностью в результатах, свести к минимуму политические риски.

ПРИЛОЖЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ PF+PE-МОДЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЫНКОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ПРОДУКЦИИ РОССИИ

Система ограничений стохастической двухэтапной модели территориально-отраслевой структуры сельского хозяйства России⁹

Множества: I — ресурсы; $I_3 \subset I$ — ресурсы, дифференцированные по природно-сельскохозяйственным зонам; $I_{0p} \subset I \setminus I_3$ — ресурсы, пополняемые продукцией p (синглетон или пустое множество); $I_1 \subset I \setminus I_3$ — ресурсы, допускающие пополнение в форме займов; $I_2 \subset I \setminus I_3$ — воспроиз-

⁹ Эта система ограничений замещает условие (2) системы (2), (5)–(7).

водимые ресурсы $\left(I_2 = \bigcup_{p \in P} I_{0p}\right)$; P — виды продукции; $P_1 \subset P$ — виды условно-транспортальной продукции¹⁰; R — регионы; $R_{0p} \subset R$ — регионы, через которые возможен экспорт или импорт условно-транспортальной продукции p ; $R_1 \subset R$ — регионы, производящие сельхозпродукцию; $R_{2r} \subset R$ — регионы, не имеющие транспортной связи с регионом r ; S — производственные процессы; $S_{0r} \subset S$ — производственные процессы, *фактически* реализуемые в регионе r (синглетон); Z — природно-сельскохозяйственные зоны; Y — исходы случайных условий.

Оператор $\#X$ вычисляет число элементов множества X .

Переменные: k_{rs} — интенсивность производственных процессов (доли к фактической интенсивности); q_{rpy} — продажи продукции (тыс. т или млн руб.); x_{rpy} и m_{rpy} — экспорт и импорт продукции (тыс. т); l_{iry} — размеры займов (млн руб.); u_{iry} — объем пополнения воспроизводимых ресурсов (тыс. т); $e_{pr\tilde{r}y}$ — объемы ввоза в регион r из региона $\tilde{r}$ (тыс. т); v_{rpy} — цена продукции (тыс. руб./т, руб./руб.); $\tilde{v}_{py}, \tilde{v}_{py}$ — пограничные цены импорта и экспорта (тыс. руб./т); w_1 — маржинальный доход (млн руб.).

Параметры: a_{izsy}, a_{isy} — затраты ресурса i согласно фактическим данным региона s при исходе случайных условий y (тыс. т, млн руб., тыс. га, тыс. голов); c_{izry}, c_{iry} — наличие ресурса (тыс. т, млн руб., тыс. га); b_{psy} — выпуск продукции согласно фактическим данным региона s при исходе случайных условий y (тыс. т, млн руб.); d_{pr} — потребность в продукции (тыс. т); w_{rs} — альтернативные издержки производства (млн руб.); $f_{r\tilde{r}}$ — расстояние между регионами (км); g_{ry} — цена перевозки (тыс. руб./т/км); δ — безразмерный параметр, определяющий область доверия (Thompson et al., 1990); ι_{iy} — процент по кредитам (доли).

Баланс ресурсов (тыс. т, тыс. га, млн руб., тыс. голов):

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S} a_{izsy} k_{rs} &\leq c_{izry} \quad i \in I_3, z \in Z, r \in R_1, y \in Y; \\ \sum_{s \in S} a_{isy} k_{rs} &\leq c_{iry} + l_{iry} + u_{iry}, \quad i \in I \setminus I_3, r \in R_1, y \in Y; \\ l_{iry} &= 0, i \in I \setminus I_1; \quad u_{iry} = 0, i \in I \setminus I_2. \end{aligned}$$

Баланс продукции (тыс. т, млн руб.):

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S} b_{psy} k_{rs} - \sum_{i \in I_{0p}} \left(u_{iry} + \sum_{s \in S} a_{isy} k_{rs} \right) - \sum_{\tilde{r} \in R} e_{pr\tilde{r}y} + \sum_{\tilde{r} \in R_1} e_{pr\tilde{r}y} - x_{rpy} + m_{rpy} &= q_{rpy}, \\ r \in R, p \in P_1, y \in Y; \\ e_{pr\tilde{r}y} &= 0, p \in P_1, r \in R, \tilde{r} \in R_{2r}, y \in Y; \quad x_{rpy} = m_{rpy} = 0, p \in P_1, r \in R \setminus R_{0p}, y \in Y; \\ \sum_{s \in S} b_{psy} k_{rs} &= q_{rpy}, \quad r \in R, p \in P \setminus P_1, y \in Y. \end{aligned}$$

Удовлетворение потребности (тыс. т): $q_{rpy} \geq d_{pr}, r \in R, p \in P_1, y \in Y$.

Насыщение рынка (тыс. т): $q_{rpy} \leq (1 + \delta) d_{pr}, r \in R, p \in P_1, y \in Y$.

Маржинальный доход (млн руб.):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\#Y} \sum_{y \in Y} \left(\left(\sum_{p \in P} \sum_{r \in R} v_{rpy} q_{rpy} \right) - \left(\sum_{p \in P_1} \sum_{r \in R} \sum_{\tilde{r} \in R_1} g_{ry} f_{r\tilde{r}} e_{pr\tilde{r}y} \right) - \left(\sum_{i \in I_1} \sum_{r \in R_1} \iota_{iy} l_{iry} \right) \right) + \\ + \frac{1}{\#Y} \sum_{y \in Y} \left(\left(\sum_{p \in P_1} \sum_{r \in R_{0p}} \tilde{v}_{py} x_{rpy} \right) - \left(\sum_{p \in P_1} \sum_{r \in R_{0p}} \tilde{v}_{py} m_{rpy} \right) \right) - \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} w_{rs} k_{rs} &= w_1. \end{aligned}$$

¹⁰ Предполагается, что условно-транспортальная продукция реализуется в регионах потребления, в связи с чем модель формирует план перевозки такой продукции. Остальная продукция реализуется в регионах производства, в том числе перекупщикам для поставки в другие регионы или на экспорт. Планы ее перевозки не составляются, обеспеченность регионов ею в модели не контролируется.

Ограничение, определяющее область доверия (Thompson et al., 1990):

$$k_{rs} \geq 1 - \delta, r \in R_1, s \in S_{0r}; \quad 0 \leq k_{rs} \leq \delta, r \in R_1, s \in S \setminus S_{0r}.$$

Условия неотрицательности переменных:

$$\begin{aligned} l_{iry} &\geq 0, u_{iry} \geq 0, i \in I_1, r \in R_1, y \in Y; \\ e_{pr\tilde{r}y} &\geq 0, p \in P_1, r \in R, \tilde{r} \in R \setminus R_{2r}, y \in Y; \\ x_{rpy} &\geq 0, m_{rpy} \geq 0, p \in P_1, r \in R_{0p}, y \in Y. \end{aligned}$$

*Система ограничений задачи, двойственной к модели
территориально-отраслевой структуры сельского хозяйства¹¹*

Переменные: λ_{izry} , λ_{iry} — теневые цены ресурсов; μ_{pry} — теневые цены продукции; $\check{\mu}_{pry}$, $\hat{\mu}_{pry}$ — теневые цены условий удовлетворения потребности и насыщения рынка; ξ_{rs} — теневые цены ограничений, определяющих область доверия (все теневые цены измеряются в тыс. руб. на единицу соответствующего им ограничения); w_2 — альтернативная стоимость ресурсов (млн руб.). Остальные используемые обозначения введены в предыдущем пункте.

Условие оптимальности для производственных процессов (млн руб.):

$$\sum_{y \in Y} \left(\sum_{i \in I_3} \sum_{z \in Z} a_{izsy} \lambda_{izry} + \sum_{i \in I \setminus I_3} a_{isy} \lambda_{iry} + \sum_{p \in P} b_{psy} \mu_{pry} - \sum_{p \in P} \sum_{i \in I_{0p}} a_{isy} \mu_{pry} \right) + \xi_{rs} \geq -w_{rs}, \quad r \in R_1, s \in S.$$

Условие оптимальности для объемов продаж (тыс. руб./т или руб./руб.):

$$-\mu_{pry} + \check{\mu}_{pry} + \hat{\mu}_{pry} \geq v_{rpy} / \#Y, \quad p \in P, r \in R, y \in Y; \quad \check{\mu}_{pry} = \hat{\mu}_{pry} = 0, \quad p \in P \setminus P_1, r \in R, y \in Y.$$

Условие оптимальности для объемов экспорта (тыс. руб./т):

$$-\mu_{pry} \geq \check{v}_{py} / \#Y, \quad p \in P_1, r \in R_{0p}, y \in Y.$$

Условие оптимальности для объемов импорта (тыс. руб./т):

$$\mu_{pry} \geq -\hat{v}_{py} / \#Y, \quad p \in P_1, r \in R_{0p}, y \in Y.$$

Условие оптимальности для объемов перевозок продукции (тыс. руб./т):

$$-\mu_{pry} + \mu_{p\tilde{r}y} \geq g_{ry} f_{r\tilde{r}} / \#Y, \quad p \in P_1, r \in R_1, \tilde{r} \in R, y \in Y.$$

Условие оптимальности для объемов займов (руб./руб.):

$$\lambda_{iry} \leq v_{iy} / \#Y, \quad i \in I_1, r \in R_1, y \in Y.$$

Условие оптимальности для пополнения воспроизводимых ресурсов (тыс. руб./т):

$$\sum_{i \in I_{0p}} \lambda_{iry} + \mu_{pry} \leq 0, \quad p \in P_1, r \in R_1, y \in Y.$$

Альтернативная стоимость ресурсов (млн руб.):

$$\begin{aligned} \sum_{y \in Y} \left(\sum_{r \in R_1} \left(\sum_{i \in I_3} \sum_{z \in Z} c_{izry} \lambda_{izry} + \sum_{i \in I \setminus I_3} c_{iry} \lambda_{iry} \right) \right) + \sum_{i \in P_1} \left(\sum_{r \in R} d_{pr} \check{\mu}_{pry} + (1 + \delta) d_{pr} \hat{\mu}_{pry} \right) + \\ + \delta \sum_{s \in S \setminus S_{0r}} \xi_{rs} + (1 - \delta) \sum_{s \in S_{0r}} \xi_{rs} = w_2. \end{aligned}$$

Домены переменных двойственной задачи:

$$\begin{aligned} \lambda_{izry} &\geq 0, i \in I_3, z \in Z, r \in R_1, y \in Y; \quad \lambda_{iry} \geq 0, i \in I \setminus I_3, r \in R_1, y \in Y; \\ \check{\mu}_{pry} &\leq 0, p \in P, r \in R, y \in Y; \quad \hat{\mu}_{pry} \geq 0, p \in P, r \in R, y \in Y; \\ \xi_{rs} &\geq 0, r \in R_1, s \in S \setminus S_{0r}; \quad \xi_{rs} \leq 0, r \in R_1, s \in S_{0r}. \end{aligned}$$

¹¹ Эта система ограничений замещает условие (5) системы (2), (5)–(7).

*Определение равновесных цен через функции спроса и условия равновесия*¹²

Параметры: $\tilde{q}_{rpy}$ — объем продаж продукции на региональном рынке (тыс. т, млн руб.), при котором цены равны $\tilde{v}_{rpy}$; $\omega_{p\tilde{p}}$ — эластичность или кросс-эластичность спроса по цене; $\tilde{x}_{rpy}$ — объем экспорта (тыс. т), при котором экспортная цена равна $\tilde{v}_{rpy}$; $\tilde{m}_{rpy}$ — объем импорта (тыс. т), при котором цена импорта равна $\tilde{v}_{rpy}$; $\tilde{\omega}_{p\tilde{p}}$ и $\tilde{\omega}_{p\tilde{p}}$ — эластичности (кросс-эластичности) цен экспорта и импорта по соответствующим объемам в окрестности объемов $\tilde{x}_{rpy}$ и $\tilde{m}_{rpy}$; ε — малое значение, предупреждающее вычислительную ошибку при $q_{rpy} \rightarrow 0$.

Условия равновесия на региональных рынках при спросе, задаваемом степенной функцией, $\ln$ (тыс. т):

$$\ln(q_{rpy} + \varepsilon) - \ln(\tilde{q}_{rpy} + \varepsilon) = \sum_{\tilde{p} \in P} \omega_{p\tilde{p}} (\ln(v_{rpy} + \varepsilon) - \ln(\tilde{v}_{rpy} + \varepsilon)), \quad r \in R, \quad p \in P, \quad y \in Y.$$

Расчет равновесной цены экспорта (тыс. руб./т)¹³:

$$\tilde{v}_{rpy} = \tilde{v}_{rpy} \left(1 - \sum_{\tilde{p} \in P_1} \left(\tilde{\omega}_{p\tilde{p}} - \frac{\tilde{\omega}_{p\tilde{p}}}{\tilde{x}_{r\tilde{p}y}} \sum_{r \in R_{0p}} x_{r\tilde{p}y} \right) \right), \quad p \in P_1, \quad y \in Y.$$

Расчет равновесной цены импорта (тыс. руб./т):

$$\hat{v}_{rpy} = \tilde{v}_{rpy} \left(1 - \sum_{\tilde{p} \in P_1} \left(\tilde{\omega}_{p\tilde{p}} - \frac{\tilde{\omega}_{p\tilde{p}}}{\tilde{m}_{r\tilde{p}y}} \sum_{r \in R_{0p}} m_{r\tilde{p}y} \right) \right), \quad p \in P_1, \quad y \in Y.$$

Целевая функция: минимум разности целевых функций прямой и двойственной задач модели территориально-отраслевой структуры сельского хозяйства $w_2 - w_1 \rightarrow \min$.

В соответствии с выражением (6) в искомом равновесии данное выражение должно быть равно нулю. Для вычислительного удобства условие (6) заменено вышеприведенной целевой функцией. Полученная задача равносильна исходной, поскольку в пределах множеств допустимых решений задач (2) и (5) имеет место $ps - c\lambda \leq \delta a_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бородин К.Г. (2018). Оценка влияния продовольственного эмбарго и экономических санкций на товарные рынки (на примере рынков мяса) // *Экономика и математические методы*. № 4. С. 41—59.
- Глазьев С.Ю. (2010). Стратегия опережающего развития России в условиях глобального кризиса. М.: Экономика.
- Дементьев В.Е. (2009). Догоняющее развитие через призму теории “длинноволновой” технологической динамики: аспект “окон возможностей” в кризисных условиях // *Российский экономический журнал*. № 1—2. С. 34—48.
- Кардаш В.А. (1977). Об одном подходе к постановкам стохастической задачи оптимизации производства // *Экономика и математические методы*. № 6. С. 1312—1316.
- Макаров В.Л. (1999). Вычислимая модель российской экономики. Препринт WP/99/069. М.: ЦЭМИ РАН.
- Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Сулакшин С.С. (2007). Применение вычислимых моделей в государственном управлении. М.: Научный эксперт.
- Полбин А.В., Дробышевский С.М. (2014). Построение динамической стохастической модели общего равновесия для российской экономики. М.: Изд-во Института Гайдара.
- Прокопьев М.Г. (2015). Классификация и математические аспекты разработки моделей частичного равновесия // *Региональные проблемы преобразования экономики*. № 6. С. 88—95; № 7. С. 83—91.
- Прокопьев М.Г. (2016). Калибровка эластичностей: теоретические предпосылки и практическая реализация // *Региональные проблемы преобразования экономики*. № 9. С. 153—164.

¹² Эта система ограничений замещает условие (7) системы (2), (5)—(7).

¹³ Как и в большинстве вычислимых моделей частичного равновесия, здесь предполагается, что пограничный рынок не совершенен и на нем возможны встречные товарные потоки.

- Светлов Н.М.** (2016). Методология моделирования агропродовольственной политики в условиях евразийской интеграции // *Известия Тимирязевской сельскохозяйственной академии*. № 3. С. 106—126.
- Светлов Н.М., Сахарова В.Н., Кубышина Н.А.** (2013). Моделирование многоэтапного процесса принятия решений в сельскохозяйственной организации. М.: ИНФРА-М. 142 с.
- Сипитц С.О., Романенко И.А., Соболев О.С., Евдокимова Н.Е., Рыбакова Р.А., Костусяк В.М., Егорова О.Д.** (2015). Отчет о НИР “Разработать базы данных региональных агропродовольственных систем, содержащие инструментарий для оценки их эффективности и устойчивости”. М.: ВИАПИ им. А.А. Никонова.
- Abler D.** (2007). Approaches to Measuring the Effects of Trade Agreements // *Journal of International Agricultural Trade and Development*. No. 3. P. 155—171.
- Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W.** (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis // *Management Science*. Vol. 30. P. 1078—1092.
- Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.** (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units // *European Journal of Operational Research*. No. 2. P. 429—444.
- Dantzig G., Orden A.** (1953). Duality Theorems. U.S. Air Force. Project RAND. Research memorandum. Notes on Linear Programming: Part II. ASTIA Document No. AD114135. Santa Monica.
- Farrell M.J.** (1957). The Measurement of Productive Efficiency // *Journal of Royal Statistical Society: Series A (General)*. No. 3. P. 253—290.
- Fischer F., Miller G.J., Sidney M.S.** (eds) (2007). Handbook of Public Policy Analysis: Theory, Politics, and Methods. CRC Press.
- Fock A., Weingarten P., Wahl O., Prokopiev M.** (2000). Russia’s Bilateral Agricultural Trade: First Results of a Partial Equilibrium Analysis. In: “Russia’s Agro-food Sector: Towards Truly Functioning Markets” Wehrheim P., Froberg K., Serova E.V., Braun J. (eds). Dordrecht. P. 271—297.
- Kerr W.A., Graisford J.D.** (eds) (2007). Handbook on International Trade Policy. Cheltenham, Northampton: Edward Elgar.
- Melo J. de, Tarr D.** (1991). A General Equilibrium Analysis of U.S. Foreign Trade Policy. Cambridge: The MIT Press.
- Stiglitz J.E., Wallsten S.J.** (1999). Public-Private Technology Partnerships: Promises and Pitfalls // *American Behavioral Scientist*. No. 1. P. 52—73.
- Svetlov N.M., Siptits S.O., Romanenko I.A., Evdokimova N.E.** (2019). The Effect of Climate Change on the Location of Branches of Agriculture in Russia // *Studies on Russian Economic Development*. No. 4. P. 406—418.
- Thompson R.G., Langemeier L.N., Lee C., Lee E., Thrall R.M.** (1990). The Role of Multiplier Bounds in Efficiency Analysis with Application to Kansas Farming // *Journal of Econometrics*. No. 46. P. 93—108.
- Zinchenko A.P.** (2017). Studying the Problems of Economic Reproduction in Agriculture of Russia // *Studies on Russian Economic Development*. No. 2. P. 140—146.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Abler D.** (2007). Approaches to Measuring the Effects of Trade Agreements. *Journal of International Agricultural Trade and Development*, 3, 155—171.
- Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W.** (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30, 1078—1092.
- Borodin K.G.** (2018). Assessing the Impact of Food Embargoes and Economic Sanctions on the Commodity Markets (the Example of Meat Markets). *Economics and Mathematical Methods*, 4, 41—59 (in Russian).
- Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.** (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*, 2, 429—444.
- Dantzig G., Orden A.** (1953). Duality Theorems. U.S. Air Force. Project RAND. Research memorandum. Notes on Linear Programming: Part II. ASTIA Document № AD114135. Santa Monica.
- Dementiev V.E.** (2009). Overtaking Development through the Prism of the Theory of Long-wave Technological Dynamics: The Aspect of “Opportunity Windows” under the Crisis Conditions. *The Russian Economic Journal*, 1, 2, 34—38 (in Russian).
- Farrell M.J.** (1957). The Measurement of Productive Efficiency. *Journal of Royal Statistical Society: Series A (General)*, 3, 253—290.

- Fischer F., Miller G.J., Sidney M.S. (eds) (2007). Handbook of Public Policy Analysis: Theory, Politics, and Methods. CRC Press.
- Fock A., Weingarten P., Wahl O., Prokopiev M. (2000). Russia's Bilateral Agricultural Trade: First Results of a Partial Equilibrium Analysis. In: Wehrheim P., Froberg K., Serova E.V., Braun J. (eds) "Russia's Agro-food Sector: Towards Truly Functioning Markets". Dordrecht, 271—297.
- Glazyev S.Yu. (2010). Strategy of Outstripping Development of Russia under the Global Crisis. Moscow: Ekonomika (in Russian).
- Kardash V.A. (1977). On One Approach to Settings of Stochastic Problem of Production Optimization. *Economics and Mathematical Methods*, 6, 1312—1316 (in Russian).
- Kerr W.A., Graisford J.D. (eds) (2007). Handbook on International Trade Policy. Cheltenham, Northampton: Edward Elgar.
- Makarov V.L. (1999). A Computable Model of Russia's Economy. Working paper WP/99/069. Moscow: Central Economics and Mathematics Institute RAS (in Russian).
- Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Sulakshin S.S. (2007). Applying Computable Models in Public Administration. Moscow: Nauchnyi ekspert (in Russian).
- Melo J. de, Tarr D. (1991). A General Equilibrium Analysis of U.S. Foreign Trade Policy. Cambridge: The MIT Press.
- Polbin A.V., Drobyshevskiy S.M. (2014). Constructing the Dynamic Stochastic Model of General Equilibrium for Russia's Economy. Moscow: Izdatelstvo Instituta Gaidara (in Russian).
- Prokopiev M.G. (2015). Classification and Mathematical Aspects of Development of Partial Equilibrium Models. *Regional Problems of Transformation of the Economy*, 6, 88—95; 7, 83—91 (in Russian).
- Prokopiev M.G. (2016). Calibration of the Elasticities: Theoretical Preconditions and the Practical Implementation. *Regional Problems of Transformation of the Economy*, 9, 153—164 (in Russian).
- Siptits S.O., Romanenko I.A., Sobolev O.S., Evdokimova N.E., Rybakova R.A., Kostusiak V.M., Egorova O.D. (2015). The R&D Report "To Develop the Databases of Regional Agricultural and Food Systems that Contain the Instruments for Assessing their Efficiency and Sustainability". Moscow: All-Russian Institute of Agrarian Problems and Informatics (in Russian).
- Stiglitz J.E., Wallsten S.J. (1999). Public-Private Technology Partnerships: Promises and Pitfalls. *American Behavioral Scientist*, 1, 52—73.
- Svetlov N.M. (2016). The Methodology for Modeling Agricultural and Food Policy in the Framework of Euro-Asian Integration. *Izvestia of Timiryazev Agricultural Academy*, 3, 106—126 (in Russian).
- Svetlov N.M., Sakharova V.N., Kubyshina N.A. (2013). Modeling a Multi-Stage Process of Decision Making in a Corporate Farm. Moscow: INFRA-M (in Russian).
- Svetlov N.M., Siptits S.O., Romanenko I.A., Evdokimova N.E. (2019). The Effect of Climate Change on the Location of Branches of Agriculture in Russia. *Studies on Russian Economic Development*, 4, 406—418.
- Thompson R.G., Langemeier L.N., Lee C., Lee E., Thrall R.M. (1990). The Role of Multiplier Bounds in Efficiency Analysis with Application to Kansas Farming. *Journal of Econometrics*, 46, 93—108.
- Zinchenko A.P. (2017). Studying the Problems of Economic Reproduction in Agriculture of Russia. *Studies on Russian Economic Development*, 2, 140—146.

Non-Parametric Production Frontier in a Computable Partial Equilibrium Model

© 2019 N.M. Svetlov

Central Economics and Mathematics Institute RAS, Moscow, Russia
E-mail: nikolai.svetlov@gmail.com

Received 1.04.2019

A computable mathematical model of partial equilibrium is developed, which supply functions are derived at the run-time from the data that define suppliers' production frontiers in a non-parametric form. Unlike the common computable partial equilibrium models, the proposed model avoids sophisticated estimations of supply function parameters, achieves better credibility of the model outcome. Such a model

allows a researcher to study the response of markets to the varying amount of resources as well as the production technologies and climate conditions, avoiding assumptions (which are difficult to test) on how such factors affect the supply functions. For the purpose of ensuring acceptable computational properties of the model, the non-parametric production frontier is represented by simultaneous inequations derived from the duality theory, instead of the common representation as a linear program. Furthermore, the paper presents the application of the developed model to the analysis of price change in the cattle and poultry, milk and grain markets in Federal subjects of the Russian Federation (within 2013) in the scenario that partially activates the current reserves for improving territorial and industrial structure of the Russian agriculture. The model specification considers transport links between the Federal subjects, natural agricultural zones and uncertainty.

Keywords: computable model, partial equilibrium, policy analysis, duality theory, non-parametric production frontier, markets of agricultural products.

JEL Classification: C63; Q11; Q18.

DOI: 10.31857/S042473880006779-5