ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2018, том 54, № 1, с. 1–18

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕА

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МОДЕЛИ ТРЕЙНОРА – БЛЭКА

 С.В. Курочкин[1,1]

Аннотация. Модель Трейнора – Блэка – по-видимому, исторически первая модель активного управления портфелем ценных бумаг, в которой в рамках определенных предположений относительно вероятностных распределений доходностей активов (так называемой диагональной модели Шарпа) был получен конкретный количественный ответ на следующий вопрос? каким образом прогнозы будущих цен активов должны учитываться при формировании инвестиционного портфеля. В работе представлен анализ качественного динамического поведения рынка в целом в предположении, что все формирующие рынок инвесторы в своих портфельных решениях применяют данную модель. Аналогичное предположение лежит в основе классической модели CAPM, где доказывается существование равновесия рынка и выводятся ценообразующие соотношения для активов в предположении, что каждый инвестор использует в своих инвестиционных решениях портфельную теорию Марковица и все участники рынка имеют равный доступ к информации об активах. Особое внимание уделено вопросу каким образом следует пересчитывать целевые (или справедливые) цены в терминах, которых аналитики используют для формулировки своих оценок, и в коэффициентах альфа, которые являются входными параметрами модели Трейнора – Блэка. Анализ возникающей динамической системы на устойчивость показывает, что модель Трейнора – Блэка приводит к устойчивому ценообразованию только для активов, имеющих значительную долю капитализации рынка (приблизительно от 10% и более). Полученные выводы затем сопоставляются с эмпирическими данными о совместной динамике рыночных и целевых (согласно консенсус-прогнозам аналитиков) цен наиболее ликвидных российских акций. Оказывается, что фактическое поведение рыночных цен относительно прогноза, как правило, не соответствует модельному: вместо нарастающих колебаний цены наблюдается игнорирование целевого уровня. Возможное объяснение: российский рынок акций не считает прогнозы аналитиков заслуживающими доверия.

Ключевые слова: управление инвестиционным портфелем, модель Трейнора – Блэка, динамическая система, устойчивость.

Классификация JEL: G11.

1. ВВЕДЕНИЕ

Один из результатов модели CAPM, а именно – вывод об оптимальности индексного инвестирования, содержит диалектическое противоречие: если все участники рынка будут согласны с равновесными ценами всех активов, получающимися из соотношения SML, то сделки на рынке совершаться не будут, а следовательно, будет утрачено ценообразование. Этим обстоятельством объясняется интерес к научному исследованию вопросов активного управления инвестиционным портфелем (при том что интуитивное активное управление было распространено задолго до создания математических основ теории финансов и широко практикуется по сей день). Необходимо отметить, что в своей существенной – портфельной – части вопрос касается не собственно выбора недооцененных активов (пикинга), а того, каким (рациональным и количественным) образом следует учитывать результаты анализа инвестиционной привлекательности активов при формировании/корректировке диверсифицированного портфеля. Так, например, пусть анализ выявил недооцененность акций компании A (в терминах отличия целевой цены от рыночной либо положительной ex ante альфы и т.п.); пусть также известны оценки

[1] **Сергей Владимирович Курочкин** – к.ф.-м.н., доцент, Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына, ВЦ РАН; старший научный сотрудник, НИУ ВШЭ, факультет экономических наук, департамент финансов; доцент, Москва; skurochkin@hse.ru, kuroch@ccas.ru.

[1] Автор благодарен рецензенту первого варианта статьи за ценные замечания, позволившие улучшить текст.

корреляций доходностей A с рынком, коэффициенты бета и другие необходимые параметры (в зависимости от используемой модели). Каким образом должна быть скорректирована доля A в портфеле?

По-видимому, первой моделью, которая – в конкретных предположениях о модели доходностей активов на рынке и целях инвесторов – давала определенный ответ на поставленный вопрос, стала модель Трейнора – Блэка (далее – ТБ) (Treynor, Black, 1973). К настоящему времени модель вполне воспринята инвестиционной средой, изложена в университетских учебниках продвинутого уровня (Bodie, Kane, Marcus, 2014), а в теоретическом отношении стала базой для построения ряда более сложных моделей, в частности получившей большую известность модели Блэка – Литтермана (Black, Litterman, 1992), включающей доверительное оценивание оценок аналитиков.

Предметом данной статьи являются равновесные свойства модели ТБ. Логически постановка вопроса во многом аналогична тому, как от портфельной теории Марковица происходит переход к модели CAPM. Модель Марковица – модель для одного инвестора, она позволяет инвестору, располагающему информацией об ожидаемых доходностях активов и их ковариациях, построить оптимальный (для себя) портфель. При этом инвестор предполагается бесконечно малым, т.е. таким, что его действия на рынке не влияют на цены. Модель CAPM исходит из следующей постановки вопроса, что произойдет, если не один, а все инвесторы будут обладать такой же информацией и компетентностью и станут формировать каждый свой портфель оптимальным образом. На этот вопрос дается (в рамках предположений теории Марковица, дополненных предположением о бесконечной делимости активов и однородности ожиданий инвесторов[1]) исчерпывающий ответ: "теорема разделения" и оценивающее соотношение SML.

Применительно к модели ТБ постановка вопроса следующая. Предположим, что все участники рынка (представительный инвестор) знают мнение аналитиков об относительной недо- или переоцененности отдельных бумаг и используют консенсус-прогноз (мнение представительного аналитика) при формировании своих портфелей. Действия инвесторов очевидным образом приводят к изменениям рыночных цен активов. Эти изменения могут иметь характер подстройки к консенсус-прогнозу, и тогда система будет устойчивой, либо быть чрезмерными, в этом случае амплитуда изменений цен будет нарастать. Представляет интерес выяснить, какой характер поведения рынка имеет место и от каких параметров системы это зависит.

В российском контексте этому вопросу недавно придана дополнительная актуальность с достаточно неожиданной стороны: Банк России видит потенциальную угрозу в распространении робо-эдвайзеров (систем компьютерного инвестиционного консультирования). Как заявил заместитель председателя ЦБ РФ С. Швецов: "...это будет влиять на рынок, потому что рынок стабилен, когда в нем много игроков с разными инвестиционными стратегиями. Когда много игроков с одной инвестиционной проблемой, – это катастрофа. Валидация таких программ – это задача регулятора" (РИА Новости, 2016). Также потенциальной проблемой, по мнению С. Швецова, является вмешательство в работу робо-эдвайзеров, порождающее новые типы мошенничества.

Из известных автору научных публикаций наиболее близкой к теме данной статьи в аспекте поведения инвесторов является работа (Cvitanic et al., 2006) (содержит обширный список литературы), а также (Zhongzhi, 2007). При этом основной интерес авторов связан с оптимальным поведением инвестора в некоторых модельных предположениях о динамике цен и функции полезности. Эмпирические исследования взаимосвязей рыночных и целевых цен (в контексте данной статьи – соотношение результатов разд.4 и 5) представлены в ряде работ, отметим, например, недавнюю (Bradshaw, College, Huang, 2013). В постановке, сформулированной выше, вопрос, насколько известно автору, напрямую не рассматривался.

Структура настоящей статьи следующая. В разд.2 описана модель ТБ. Это сделано только для замкнутости изложения – новых результатов раздел не содержит, за исключением, возможно, соотношения (6), нужного в дальнейшем. В разд.3 рассмотрен следующий, практически важный

[1] В связи с дальнейшими постановками вопросов здесь уместно вспомнить, что предположение об однородности инвесторов было главной причиной, по которой редакция *Journal of Finance* отклонила статью У. Шарпа о модели CAPM.

вопрос. Спецификация модели ТБ предполагает, что информация о неправильно оцененных активах представлена в терминах их коэффициентов ex ante альфа. В то же время рекомендации аналитиков практически всегда формулируются в терминах целевой цены. Необходимо иметь способ пересчета одной величины в другую. Вопрос оказывается нетривиальным. Так, в частности, представляется спорным распространенное мнение (см., например, (Stowe et al., 2002, Ch. 1, Problem 6)), что при горизонте оценки в один год ex ante альфа равна избыточной ожидаемой доходности (т.е. доходности исходя из целевой цены за вычетом требуемой доходности по CAPM). Полученные в разд.3 соотношения являются логическими следствиями способов, которые используют аналитики, и позволяют записать исследуемую динамическую систему в замкнутом виде. Далее, в разд.4 изучаются свойства устойчивости этой системы в линейном приближении. Оказывается, что вопрос устойчивости цены решается для каждого актива отдельно, вне связи с другими, а устойчивость зависит от относительной капитализации актива на рынке.

В разд.5 дается содержательная интерпретация и практическая проверка условий устойчивости, приводящие к еще одному выводу, что для реальных рынков акций динамическая система должна быть неустойчивой. В разд.6 полученные результаты сопоставляются с эмпирическими данными по российскому рынку акций. Оказывается, что в целом характер фактической реакции рынка на прогнозы аналитиков существенно отличается от модельного. В разд.7 обсуждаются возможные причины и источники такого несоответствия, представлены выводы и обозначены некоторые открытые вопросы.

2. МОДЕЛЬ ТРЕЙНОРА – БЛЭКА

Исходной точкой модели ТБ является диагональная (она же рыночная) модель Шарпа для *будущих* доходностей активов

$$r_k = r_f + \alpha_k + \beta_k(r_M - r_f) + \varepsilon_k. \tag{1}$$

Здесь r_k – доходность актива k; r_f – безрисковая доходность; r_M – доходность рынка; $\beta_k = Cov(r_k, r_M) / \sigma_M^2$ – коэффициент бета актива k; α_k – ex ante коэффициент альфа (Йенсена) актива k; остатки ε_k имеют нулевые средние и (наиболее существенное предположение модели) предполагаются некоррелированными между собой при различных k. Модель Шарпа в середине 1960-х годов стала первой точкой взаимопонимания практиков финансового рынка и исследователей, развивавших портфельную теорию Г. Марковица, потому что она позволяет получить явные формулы для долей бумаг в так называемом касательном портфеле. Модель Шарпа и адекватность ее предположений рассмотрена в многочисленных текстах, включая учебники, и здесь обсуждаться не будет. Отличный от нуля коэффициент α для какого-то актива является неравновесной ситуацией с точки зрения модели CAPM и выражает недо- или переоцененность актива.

Следуя модели ТБ в обозначениях (Bodie, Kane, Marcus, 2014), предположим, что инвестор управляет широко диверсифицированным (т.е. индексным) портфелем (сохраняется обозначение M) и рассматривает возможность перебалансировки текущего портфеля с использованием рассчитанного (конкретнее об этом см. ниже) активного портфеля (обозначение A), $\alpha_A > 0$. Возникает вопрос, в каких долях новый оптимальный портфель P будет состоять из старого (M) и активного (A) портфелей. Наивный ответ – полная замена M на A – является неправильным как в практическом отношении (за исключением хедж-фондов, никто не позволит управляющему полностью переформировать портфель), так и в математическом, коль скоро критерием считается максимизация коэффициента Шарпа $(\mathrm{E}(r_P) - r_f) / \sigma_P$. Прямой выкладкой можно показать, что оптимальная доля активного портфеля определяется по формуле

$$w_A = \frac{[\mathrm{E}(r_A) - r_f]\sigma_M^2 - [\mathrm{E}(r_M) - r_f]Cov(r_A, r_M)}{[\mathrm{E}(r_A) - r_f]\sigma_M^2 + [\mathrm{E}(r_M) - r_f]\sigma_A^2 - [\mathrm{E}(r_A) - r_f + \mathrm{E}(r_M) - r_f]Cov(r_A, r_M)}. \tag{2}$$

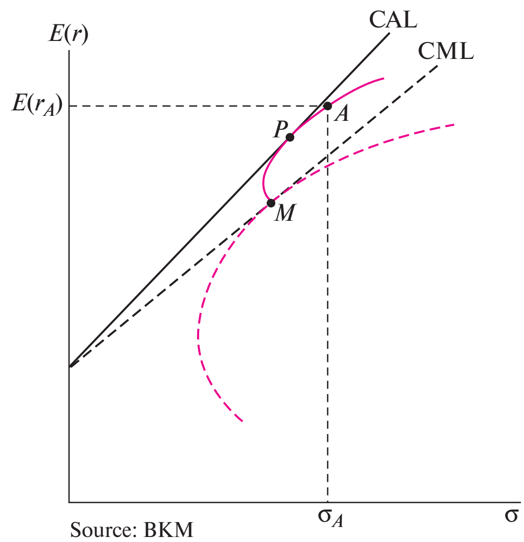

Рис. 1. Построение оптимального портфеля в модели Трейнора – Блэка

Для упрощения записи будем использовать обозначение для средних ожидаемых дополнительных (excess) доходностей сверх безрисковой для всех участвующих в рассмотрении активов: $R_M = \mathrm{E}(r_M) - r_f$ и т.д. Тогда, после всех выкладок, получим

$$w_A = \frac{\alpha_A / \sigma^2(\varepsilon_A)}{(\alpha_A / \sigma^2(\varepsilon_A))(1-\beta_A) + R_M / \sigma_M^2}. \tag{3}$$

Подстановка полученных долей в выражение для коэффициента Шарпа итогового портфеля приводит к следующему уравнению:

$$S_P^2 = S_M^2 + [\alpha_A / \sigma(\varepsilon_A)]^2. \tag{4}$$

В свою очередь, последняя формула дает ключ к построению активного портфеля. Очевидно, он должен будет состоять из активов, которые по результатам анализа признаны недооцененными: $\alpha_k > 0, \quad k = 1,\ldots,n$ (вообще говоря, подмножество проанализированных активов $k = 1,\ldots,n$ составляет лишь часть всех активов, входящих в рыночный портфель). В каких количественных долях следует составлять из них активный портфель? Согласно (4) – в таких портфелях, которые максимизируют выражение $\alpha_A / \sigma(\varepsilon_A)$. Стандартное решение оптимизационной задачи через множители Лагранжа приводит к ответу:

$$w_k = \left[\alpha_k / \sigma^2(\varepsilon_k)\right] / \left[\sum\nolimits_{i=1}^{n} \alpha_i / \sigma^2(\varepsilon_i)\right], \tag{5}$$

w_k – доля актива k в портфеле A.

При этом для построенного таким образом активного портфеля A, как можно проверить прямой выкладкой, выполняется соотношение

$$\alpha_A / \sigma^2(\varepsilon_A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i / \sigma^2(\varepsilon_i), \tag{6}$$

которое понадобится в дальнейшем.

Завершим данный раздел каноническим рисунком, сопровождающим изложение модели ТБ во многих источниках (рис. 1).

Заметим, что художник поместил активный портфель выше Capital Market Line только по причине (по его мнению) большей выразительности: в действительности портфель A вполне может располагаться на плоскости "риск – доходность" ниже CML. Однако при этом кусок гиперболы, представляющий портфели из активов A и M, обязательно частично будут лежать выше, чем CML, что позволит построить улучшенный портфель P.

3. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЦЕЛЕВОЙ ЦЕНОЙ И КОЭФФИЦИЕНТОМ АЛЬФА

Реальные прогнозы аналитиков формулируются в термине "целевая цена актива", т.е. такой, которую данный аналитик считает справедливой, адекватной будущим доходам. Обычно прогноз сопровождается рекомендациями формата "покупать", "держать" и т.п. Поскольку в модели ТБ в качестве входной информации используется коффициент альфа, необходимо иметь формулу для пересчета одного в другое. Как оказывается, данный вопрос в литературе освещен недостаточно, общепринятого способа его решения не выработано, а имеющиеся примеры логически уязвимы. Рассмотрим разбор задачи из (Stowe et al., 2002, Ch. 1, Problem 6B). Условия таковы: текущая цена акции равна 53,12 долл. По мнению аналитика, справедливая цена акции в настоящий момент составляет 56 долл. В течение ближайшего года аналитик ожидает роста цены на 4,87 долл. и дивидендных выплат в размере 0,28 долл. на акцию. Требуемая доходность по CAPM равна 9,2%. Чему равна ex ante альфа?

Предлагаемое решение: (56–53,12 + 4,87 + 0,28) / 53,12–9,2% = 5,9%.

Представляется, что такой подход имеет следующие два недостатка.

1. Неинвариантность относительно инвестиционного горизонта: если вместо неявно подразумеваемого одного года взять какой-либо другой, например более короткий промежуток, то рассчитанная таким же образом альфа (после пересчета в годовые доходности) окажется другой.

2. Здесь игнорируется, что в способах получения оценок целевой цены, реально используемых инвестиционными аналитиками, коэффициент альфа уже явно или неявно присутствует.

Обратимся к этим способам. Большинство из них исходит из того, что цена акции равна продисконтированному потоку дивидендов (DDM-модели). Прогнозирование этого потока является отдельной нетривиальной задачей, а при определении ставки дисконтирования (так называемой требуемой доходности) используется соотношение SML с оцененными параметрами (см., например, (Дамодаран, 2016)). Наиболее удачной и распространенной на практике является модель Гордона (постоянного роста), в которой для дивиденда D_t, который будет выплачен в год t, полагается $D_t = D_0(1+g)^t$, g – темп роста, D_0 – дивиденд, выплаченный по итогам последнего года. Тогда суммирование геометрической прогрессии дает формулу (в общепринятых обозначениях) для цены акции:

$$V_0 = D_0(1+g) / (k-g) = D_1 / (k-g), \tag{7}$$

где k – требуемая доходность акции по модели CAPM.

Модель Гордона, в отличие от ряда других моделей дисконтирования дивидендов, в частности многоэтапных, обладает следующим важным с математической точки зрения свойством консервативности (или, говоря прямо, непротиворечивости): если все параметры останутся неизменными в течение одного периода оценки (обычно – года) и по истечении этого периода акция будет вновь оценена по модели, то ее фактическая доходность за данный период с учетом дивидендов окажется равна требуемой.

Заметим – это тривиально следует из уравнений, но редко отмечается явно, – что темп роста цены акции в модели Гордона получается равным темпу роста дивидендов g.

В инвестиционном анализе используются также более простые методы, где вместо денежных потоков – агрегаты, такие как P/E (отношение рыночной цены акции к годовой прибыли на акцию) и $EV/EBITDA$ (отношение рыночной стоимости компании к прибыли до процентных выплат и налогообложения).

Далее будем рассматривать именно модель Гордона как наиболее соответствующую (по методам и по результатам) действиям представительного аналитика.

Пусть первоначально акция оценена рынком справедливо, т.е. в соответствии с (7) при консенсусных значениях параметров k, g, D_1. Затем, по мнению аналитика, какие-то из параметров правой части переоцениваются. Рассмотрим подробно последствия изменения по отдельности каждого из трех входных параметров формулы (7).

1. Изменилась оценка D_1 (и согласно соотношению $D_t = D_1(1+g)^{t-1}$ – также и всего последующего потока дивидендов). Пусть $V_0 = D_1 / (k-g)$ – новая оценка справедливой цены акции, при этом $D_1 / D_1 = 1+\gamma$, γ – относительное увеличение размера дивиденда. Тогда $V_0 = D_1 / [(k-g)(1+\gamma)] = D_1 / \left(k + \gamma(k-g) - g\right)$. Таким образом, при *текущей* цене ации V_0 и *прогнозируемом* потоке дивидендов $D_t = D_1(1+g)^{t-1}$ ожидаемая доходность акции сверх SML, т.е. ex ante альфа, и отношение целевой цены акции к ее рыночной цене связаны соотношением

$$\alpha = (k-g)(V_0 / V_0 - 1)\,. \tag{8}$$

Заметим, что целевая цена акции $V_0 = V_0(1+\gamma)$ имеет следующий смысл: если бы цена акции *сейчас* изменилась с V_0 до V_0, то прогнозируемый поток дивидендов реализовал бы требуемую доходность.

2. Измененилась оценка параметра k: $k \to k = k + \delta$. Тогда, пренебрегая малыми второго и более высоких порядков по δ, получим

$$V_0 = D_1 / (k-g) = D_1 / (k+\delta-g) = V_0(k-g) / (k+\delta-g) =$$
$$= V_0 / [1+\delta / (k-g)] \approx V_0[1-\delta / (k-g)],$$

т.е.

$$V_0 / V_0 - 1 \approx -\delta / (k-g)\,. \tag{9}$$

Одновременно, $V_0 = D_1 / (k-g) = D_1 / (k-\delta-g)$, т.е. $\alpha = -\delta$, что вместе с (9) дает (8) с заменой знака точного равенства на приближенное.

3. Измененилась оценка параметра g: $g \to g = g + \delta$. Тогда, так же пренебрегая малыми второго и более высоких порядков по δ и дополнительно учитывая, что в реальных условиях величина $(k-g)$ на порядок меньше единицы, получаем

$$V_0 = D_0(1+g) / (k-g) = D_0(1+g+\delta) / (k-g-\delta) =$$
$$= D_0\{(1+g)[1+\delta / (1+g)]\} / \{(k-g) / [1-\delta / (k-g)]\} \approx$$
$$\approx V_0[1+\delta / (1+g) + \delta / (k-g)] \approx V_0[1+\delta / (k-g)],$$

т.е.

$$V_0 / V_0 - 1 \approx \delta / (k-g)\,. \tag{10}$$

При этом

$$V_0 = D_0(1+g) / (k-g) = D_0(1+g-\delta) / (k-g+\delta) = D_0(1+g)[1-\delta / (1+g)] / (k-g+\delta) \approx$$

$$\approx D_0(1+g) / \{(k-g+\delta)[1+\delta / (1+g)]\} \approx D_0(1+g) / [k+\delta-g+(k-g)\delta / (1+g)] \approx$$

$$\approx D_0(1+g) / (k+\delta-g)\,,$$

т.е. $\alpha \approx \delta$, что вместе с (10) снова дает (8).

Изложенный метод восстановления альфы, которую аналитик использовал в своих внутренних расчетах целевой цены, помимо логической замкнутости, дает в реальных ситуациях более осмысленные результаты, чем формула $\alpha = V_0 / V_0 - 1$. Так, на рынке достаточно часто можно наблюдать ситуацию, когда не только прогнозы отдельных аналитиков, но и консенсус-прогноз оказывается выше текущей рыночной цены акций на двузначную величину в% (см. разд.5, рис. 3–10 и разд.6, табл. 3), что по приведенной ранее формуле дает нереалистичные значения альфы.

В принципе, рассмотренный в данном разделе вопрос касается связи двух показателей, имеющих совершенно различную природу: в то время как целевая цена имеет смысл конкретного числового значения, которое должно достигаться в конкретный момент времени (немедленно либо на указанном горизонте), показатель альфа является коэффициентом в регрессионной модели и тем самым относится к временно́му ряду. Очевидно, всякий способ установления соответствия между ними должен использовать ту или иную модель.

Также необходимо отметить, что представленный в следующем разделе анализ устойчивости модели ТБ формально не связан с каким-то определенным способом пересчета целевой цены в альфу. Общий вывод о типичной неустойчивости при описанном выше способе, т.е. когда $\alpha = (k - g)\,(V_0 \,/\, V_0 - 1\,)$, тем более остается справедливым и при наивном способе, т.е. когда $\alpha = V_0 \,/\, V_0 - 1$.

4. СВОЙСТВА УСТОЙЧИВОСТИ

Прежде чем исследовать свойства устойчивости рынка, участники которого используют модель ТБ при формировании портфелей, необходимо рассмотреть технический вопрос. Пусть имеется актив s, который по результатам анализа имеет $\alpha_s > 0$. Этот актив может быть использован инвестором для перебалансировки портфеля одним из двух способов: либо непосредственно, т.е. когда активный портфель состоит из одного этого актива, либо опосредованно – в составе активного портфеля, состоящего из всех активов, которых аналитики рассматривают как недооцененные рынком. Будут ли доли актива s в итоговом портфеле одинаковыми в одном и другом способах? В первом случае, в соответствии с (3), доля актива s должна быть увеличена на

$$w_s = \frac{\alpha_s \,/\, \sigma^2(\varepsilon_s)}{(\alpha_s \,/\, \sigma^2(\varepsilon_s))(1-\beta_s) + R_M \,/\, \sigma_M^2}. \tag{11}$$

Во втором случае из (3) и (5), используя (6), можно получить, что добавленная доля

$$w_s = \frac{\alpha_s \,/\, \sigma^2(\varepsilon_s)}{(\alpha_A \,/\, \sigma^2(\varepsilon_A))(1-\beta_A) + R_M \,/\, \sigma_M^2}. \tag{12}$$

Поскольку устойчивость модели исследуется в линейном приближении, т.е. относительные недооценки активов и величины α полагаются малыми, выражения (11) и (12) с точностью до малых более высокого порядка эквивалентны и равны

$$w_s = \frac{\alpha_s \,/\, \sigma^2(\varepsilon_s)}{R_M \,/\, \sigma_M^2}. \tag{13}$$

Динамическая модель, соответствующая модели активного управления ТБ, свойства устойчивости которой будут далее изучены, определяется следующим образом.

1. На рынке торгуется n активов с условными номерами $s = 1,\ldots,n$.

2. Время дискретно: $t = 0,\ 1,\ldots$; физически шаг по времени является малым и соответствует характерному времени реакции рынка (быстрое время). При этом предполагается, что оценки аналитиков постоянны (меняются в медленном времени) – такое предположение вполне соответствует фактическому поведению соответствующих временных рядов, см. далее примеры в разд.5.

3. Имея текущую V_s и целевую V_s капитализации каждого актива s, рынок переоценивает этот актив по модели ТБ в соответствии с (13). Подчеркнем, что, поскольку речь идет не об отдельном инвесторе, а о них всех в совокупности, увеличение доли актива в совокупном, или,

в терминологии CAPM, рыночном, портфеле происходит не путем покупки его дополнительного количества на рынке, а путем консенсусной переоценки (что, разумеется, не исключает также покупок – продаж с соответствующим перетоком средств от инвесторов к биржам). Соответствующая такой увеличенной доле новая капитализация обозначается $\tilde{V}_s$.

Окончательно, один шаг по времени полученной динамической системы задается формулой $V_s \to \tilde{V}_s, s = 1,\ldots,n$.

Чтобы получить запись системы в замкнутом виде, необходимо получить явное выражение для $\tilde{V}_s$. Из (11) с учетом (разд.3) представления для α следует

$$\frac{\tilde{V}_s}{V_s} = 1 + \frac{(k-g)(V_s \,/\, V_s - 1) \,/\, \sigma_{\varepsilon s}^2}{R_M \,/\, \sigma_M^2}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} V_j\right) / \, V_s.$$

Вводя, аналогично разд.3, безразмерные переменные $\gamma_s = V_s \,/\, V_s - 1$ и, соответственно, $\tilde{\gamma}_s = V_s \,/\, \tilde{V}_s - 1$, после линеаризации по γ_s получаем, что шаг динамической системы имеет вид

$$\gamma_s \to \tilde{\gamma}_s = \gamma_s - \frac{(k-g) \,/\, \sigma_{\varepsilon s}^2}{R_M \,/\, \sigma_M^2}\left((\sum\nolimits_{j=1}^{n} V_j) \,/\, V_s\right)\gamma_s.. \tag{14}$$

По своему финансовому смыслу $\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} V_j\right) / \, V_s = 1 \,/\, Cap_s$ где Cap_s – относительная капитализация актива s .

Таким образом, матрица отображения (14) диагональна, и устойчивость динамической системы эквивалентна требованию, что все диагональные элементы (собственные значения) лежат в интервале $(-1,+1)$, см., например, (Каток, Хассельблат, 2005). После очевидных преобразований получаем необходимое и достаточное условие устойчивости:

$$Cap_s > \frac{1}{2}\frac{(k-g) \,/\, \sigma_{\varepsilon s}^2}{R_M \,/\, \sigma_M^2}, s = 1,\ldots,n \tag{15}$$

(учтено, что капитализация не бывает отрицательной).

5. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В качественном смысле условие (15) имеет вид оценки снизу на относительную капитализацию компании и является ожидаемым уже только на основании рис. 1. Действительно, недооцененная акция A вполне может иметь маленькую капитализацию, однако ее доля в скорректированном портфеле P будет соизмерима с суммарной долей всех других бумаг, что составляет очевидный механизм неустойчивости. В количественном аспекте наиболее изменчивым и трудным для оценивания параметром в правой части (15) является темп роста дивидендов g. В разные этапы жизненного цикла компании и в различных состояниях рынка он может принимать сильно различающиеся значения, вплоть до того что g локально может превысить k и модель Гордона становится неприменимой (Bodie, Kane, Marcus, 2014). Для примера, в табл. 1 представлены данные о размере дивидендов, выплаченных по итогам ряда лет акционерам Сбербанка (Сбербанк, 2017). На данный момент они свидетельствуют об отсутствии закономерности, которую можно было бы описать одним параметром роста.

Поскольку здесь исследуется задача устойчивости ценообразования на рынке в целом, целесообразно прежде всего обратиться к усредненным показателям. В качестве ориентира рассмотрим данные по рынку США (соответствущие данные по России охватывают довольно короткий промежуток времени и при этом отражают не менее трех макроэкономических шоков). На рис. 2 представлены данные о росте дивидендов год к году по 500 акциям наибольшей капитализации (Standard and Poors, 2017).

Таблица 1. Дивиденды по акциям ПАО Сбербанк

По итогам года	Дивиденды на акцию, руб.
2005	0,266*
2006	0,3855*
2007	0,51
2008	0,48
2009	0,08
2010	0,92
2011	2,08
2012	2,57
2013	3,2
2014	0,45
2015	1,97

Примечание. Символом “*” отмечены значения, которые даны с учетом последующего сплита (дробления) акций.

Таблица 2. Средняя годовая доходность рынка акций и краткосрочных государственных облигаций США

Актив	Средняя годовая доходность,%
S&P 500	14,88*
US Treasury Bills 3M	2,85

Источники: Wikipedia, 2017; US Treasury, 2017 и расчеты автора.
Примечание. Символом “*” отмечены значения, которые даны с учетом дивидендов.

При этом средний темп роста дивидендов составляет 5,86%. Средние годовые доходности индекса S&P 500 и трехмесячных US Treasury Bills US (Treasury, 2017) (последнюю обычно принимают в качестве показателя безрисковой доходности) представлены в табл. 2.

В силу тривиального соображения средневзвешенный по рынку коэффициент бета равен единице, при этом высоколиквидные акции обычно имеют коэффициент бета, несильно отличающийся от единицы. Типичные значения показателя R^2 в модели CAPM лежат в пределах 30–50%, для молодых компаний и компаний дальних эшелонов могут быть существенно меньше

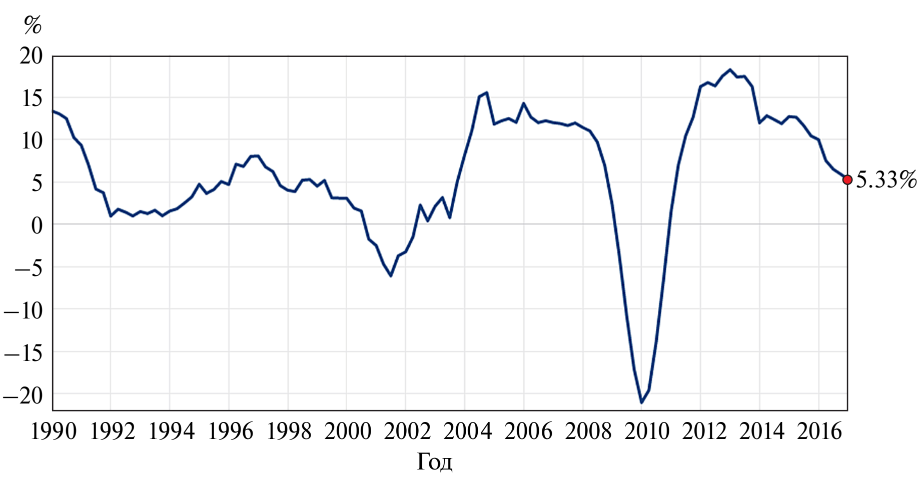

Рис. 2. Рост дивидендов год к году по акциям, входящим в индекс S&P 500

(Bodie, Kane, Marcus, 2014). Собирая все перечисленные данные, получаем следующее. В среднем требуемая доходность k в числителе (15) равна доходности рынка акций, доходность $(k-g)$ приблизительно равна R_M (или несколько меньше), но не более двух раз; типичная раскладка риска акции на рыночный/специфический составляет 30/70, что при бета, приблизительно равном единице, дает соотношение между рисками $\sigma^2_{\varepsilon s}$ в числителе и σ^2_M в знаменателе (15) приблизительно 2: 1. В итоге грубой оценкой снизу по порядку для величины в правой части (15) будет 1/10. Следовательно, даже приближенно условие (15) является весьма жестким ограничением снизу на капитализацию компании. Для сравнения: в индексе ММВБ только три компании – Газпром, Сбербанк, и Лукойл – имеют вес более 10% (Московская биржа, 2017); на более диверсифицированных рынках, например США, таких компаний нет. Примененное же одновременно ко всем активам, подвергающимся аналитической оценке, условие (15) очевидным образом не выполняется никогда. Таким образом, если бы все участники рынка использовали стратегию активного управления согласно модели ТБ, то рынок был бы неустойчив в линейном приближении. При этом поскольку при нарушении (15) соответствующие собственные значения отображения (14) отрицательные и меньше –1, малые отклонения рыночной цены актива от целевой должны были бы менять знак на каждом шаге и увеличиваться по абсолютной величине (нарастающие колебания). Следующий раздел работы позволит соотнести полученные свойства системы (14) с фактическим поведением участников рынка.

6. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ЭМПИРИЧЕСКИМИ ДАННЫМИ

Рассмотрим реальное совместное поведение целевой и рыночной цен акций на примере российского рынка. Ниже представлены графики соответствующих временных рядов для ряда ликвидных акций за последние 10 лет, данные ежемесячные (источники: терминал Bloomberg, сайт Московской биржи) (рис. 3–10).

Визуальный анализ показывает, что при некоторых различиях в характере поведения цен для всех без исключения рассмотренных бумаг и большую часть времени отклонения рыночной цены от целевой носят устойчивый характер.

В следующей таблице представлены значения автокорреляций для рядов разности целевой и рыночной цен для тех же активов и временных лагов в 1, 2 и 6 месяцев (расчеты автора). Обращает на себя внимание, в частности, то обстоятельство, что все автокорреляции положительные (табл. 3).

Таблица 3. Автокорреляции рядов разности целевой и рыночной цен

Эмитент/лаг	1 месяц	2 месяца	6 месяцев
Газпром	0,86	0,70	0,44
Лукойл	0,92	0,82	0,49
Магнит	0,92	0,86	0,80
Норильский никель	0,73	0,66	0,33
Роснефть	0,74	0,56	0,06
Сбербанк	0,75	0,61	0,18
Сургутнефтегаз	0,69	0,48	0,12
ВТБ	0,93	0,87	0,77

Также для иллюстрации характера автокорреляций на рис. 11 представлено так называемое временнóе погружение ряда для Газпрома в размерности "2".

Таким образом, реальный характер динамики рыночных цен относительно целевых отличается от модельного. В частности, осцилляции разности цен практически не наблюдаются.

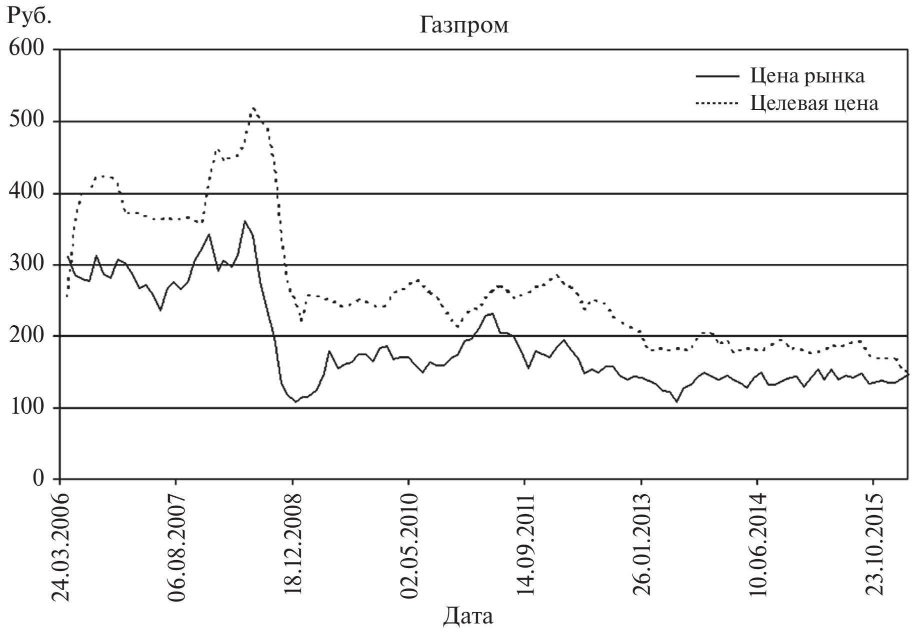

Рис. 3. Рыночная цена и консенсус-прогноз цены акций ПАО "Газпром"

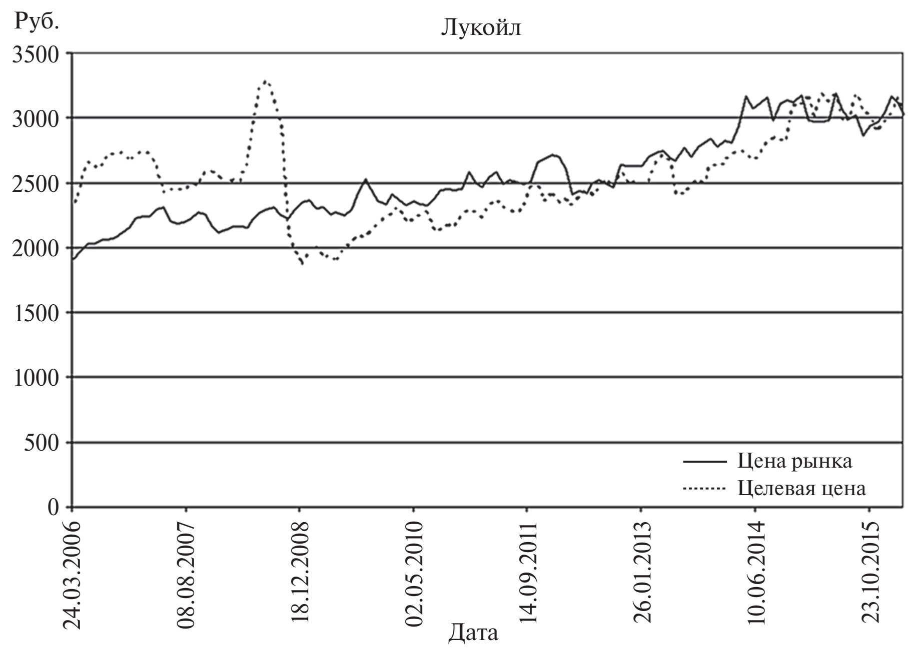

Рис. 4. Рыночная цена и консенсус-прогноз цены акций ПАО "Нефтяная компания Лукойл"

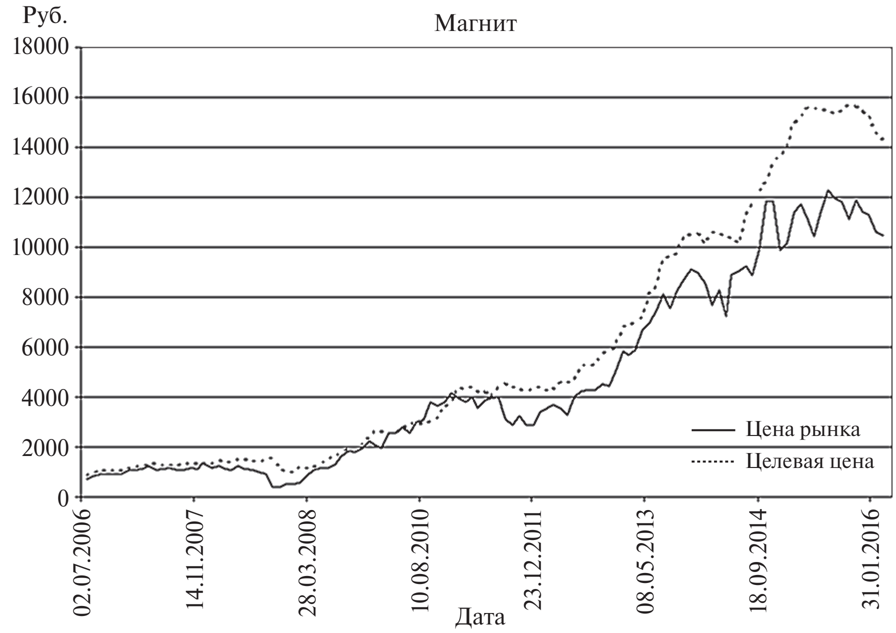

Рис. 5. Рыночная цена и консенсус-прогноз цены акций ПАО “Магнит”

Рис. 6. Рыночная цена и консенсус-прогноз цены акций ПАО “Горно-металлургическая компания “Норильский никель””

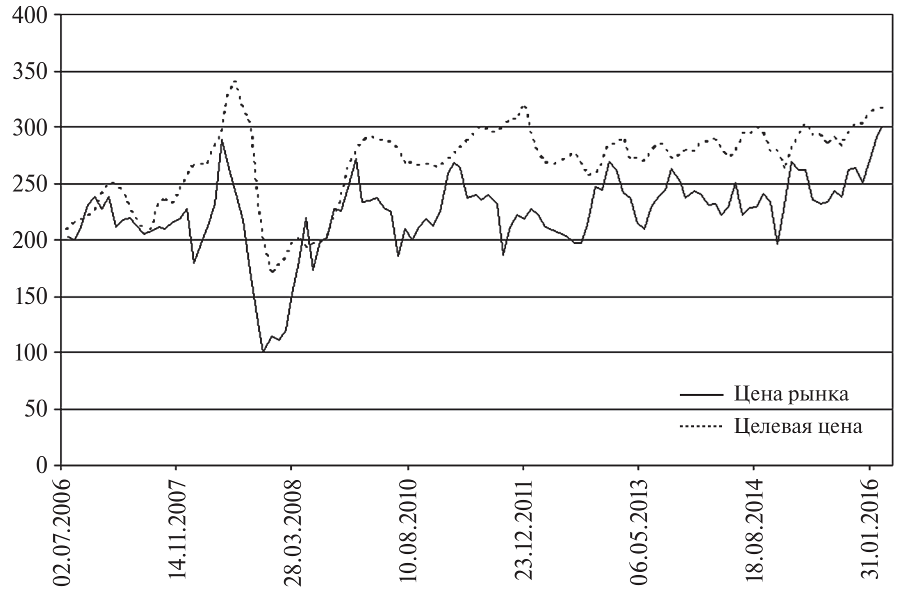

Рис. 7. Рыночная цена и консенсус-прогноз цены акций ПАО “Роснефть”

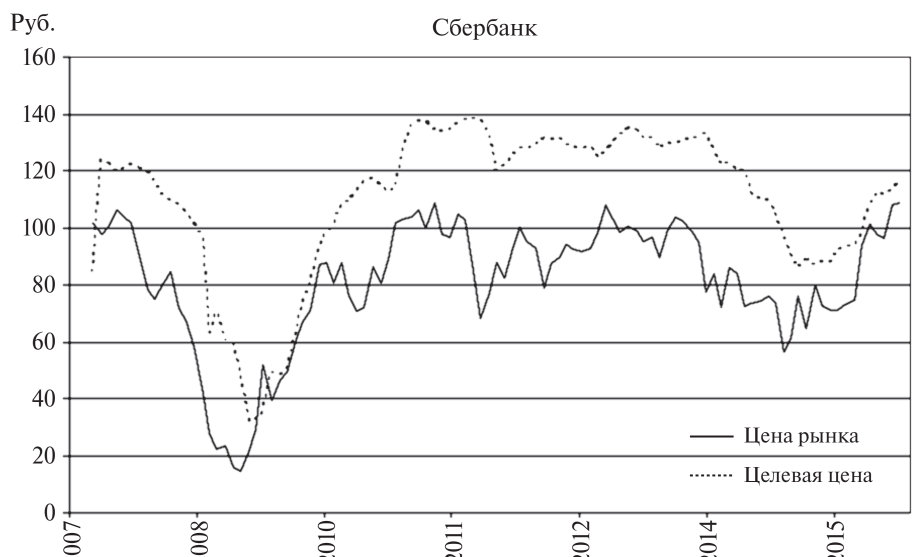

Рис. 8. Рыночная цена и консенсус-прогноз цены акций ПАО “Сбербанк”

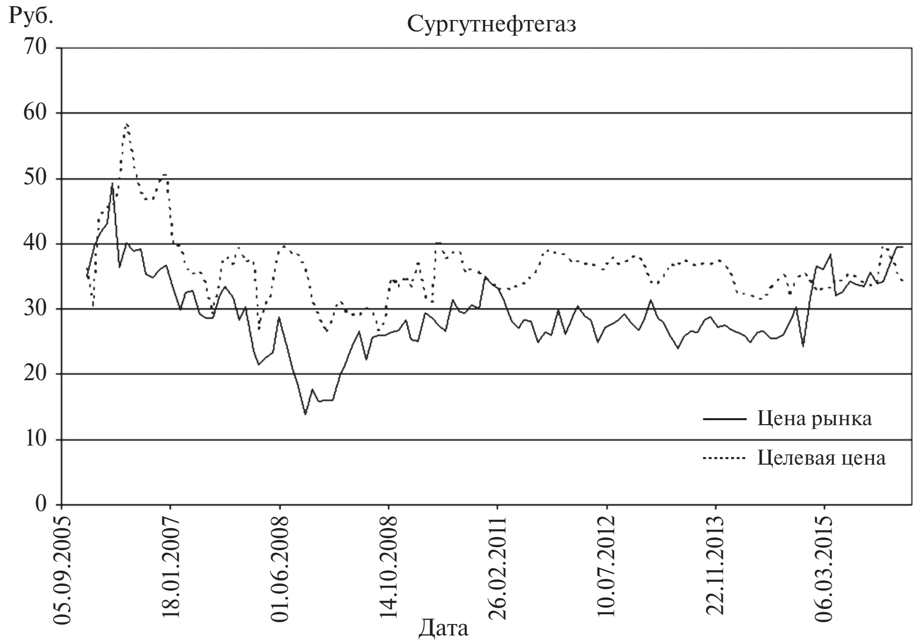

Рис. 9. Рыночная цена и консенсус-прогноз цены акций ОАО “Сургутнефтегаз”

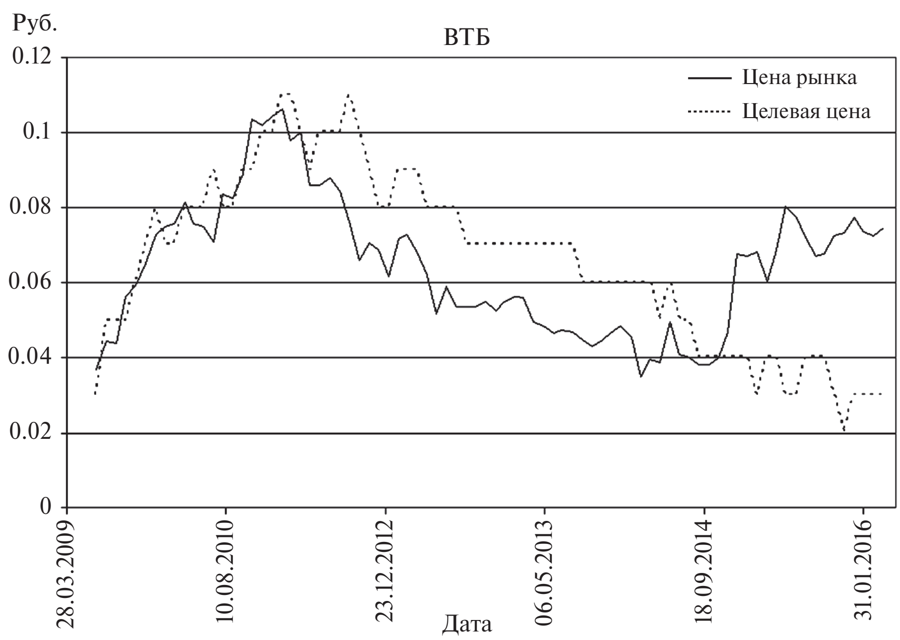

Рис. 10. Рыночная цена и консенсус-прогноз цены акций ПАО “Банк ВТБ”

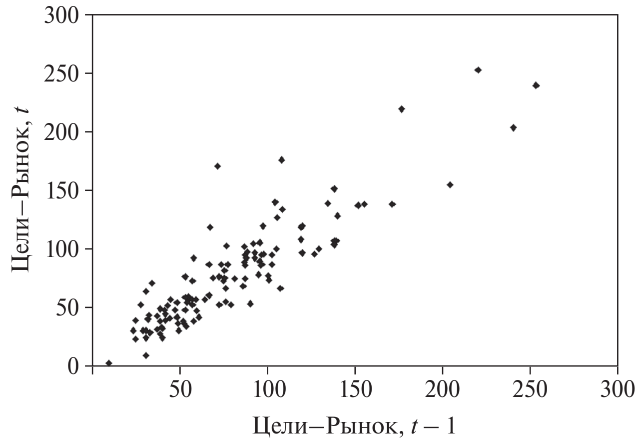

Рис. 11. Временнóе погружение в размерности 2 ряда разностей прогнозной и рыночной цен акций ПАО "Газпром"

7. ВЫВОДЫ И ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

Вопрос о том, какие причины определяют динамику цен на фондовом рынке, имеет давнюю историю и огромные обемы литературы. Согласно так называемой гипотезе эффективного рынка (Fama, 1965) единственной причиной изменений цен является новая информация. В стохастической теории финансов, начиная с работ Л. Башелье, влияние потока информации моделируется с помощью аппарата случайных процессов. Типичной постановкой задачи здесь является вычисление вероятности достижения модельным рядом заданного уровня на заданном горизонте времени либо каких-либо функционалов (пример – формула Блэка – Шоулза – Мертона для цены опциона). Наоборот, различные техники прогнозирования временных рядов, включая наиболее тривиальную, так называемый технический анализ, преследуют цель обнаружить присутствующие в ряду объективные закономерности (подобные наблюдаемым в небесной механике) и на их основе сформулировать прогноз дальнейшего движения цены. В данной работе рассматривается третий возможный двигатель цен – действия участников рынка, в том числе торговых роботов, направленные на оптимизацию индивидуальных портфелей. В литературе достаточно часто на экспертном уровне утверждается, что движущим механизмом ряда известных биржевых паник, например "Flash Crash" 6 мая 2010 г., (Pratley, 2015) или падение индекса Dow Jones почти на 1000 пунктов утром 24 августа 2015 г. (Tett, 2015), в отсутствие объективных экономических причин была именно активность механических торговых систем. Для количественного анализа проблемы необходимо принять определенные предположения о механизме активного управления портфелем. В данной работе в качестве такой модели взята модель Трейнора – Блэка как хорошо изученная, положительно принятая научной средой и практиками и послужившая основой для дальнейших, более сложных построений. Динамический вариант модели был записан в дискретном времени в ряде естественных предположений. Попутно, чтобы привести модель к замкнутому виду, было необходимо вывести соотношение между используемым в модели коэффициентом альфа и используемым аналитиками фондового рынка понятием целевой цены. Вопрос о точном количественном виде такого соотношения в настоящее время не имеет стандартного или общепринятого ответа. Предложенный в данной работе способ, по мнению автора, в наилучшей степени отвечает требованию математической инвариантности. При этом и другие возможные, в том числе реально применяемые, способы, в случае их использования в данном контексте, приводят к тем же конечным выводам в части устойчивости. Далее, анализ модели показал, что свойства устойчивости полученной системы зависят от параметров относительной капитализации составляющих рынок активов, причем для реальных, достаточно хорошо диверсифицированных рынков система должна быть неустойчивой в линейном приближении. Интерпретировать этот результат можно следующим образом: если бы весь рынок был информационно эффективным и использовал активные стратегии, то самим этим действием он бы расшатывал сам себя.

Анализ реальных рядов по выборке наиболее ликвидных российских акций выявляет другой характер динамики цен: разность между целевой и рыночной ценой, как правило, не затухает на разумных временах реакции системы, как это должно было бы быть на эффективном рынке, и не нарастает по амплитуде, как это бывает в случае неустойчивой динамической системы, а часто подолгу держится на отличных от нуля уровнях.

На наш взгляд, такое качественное отличие реальной картины рынка от модельной связано с рядом дополнительных важных обстоятельств, каждое из которых является предметом самостоятельного анализа.

1. Хроническая недооцененность российских акций, хорошо видимая, в частности, по мультипликаторам. Так, средневзвешенное значение коэффициента P/E по развивающимся рынкам на конец 2016 г. составляло 16, по России – 9. Средневзвешенная дивидендная доходность российского рынка сейчас составляет 4,2%, выше, чем на любом развитом и развивающихся рынков. Очевидно, рынок дисконтирует российские акции на политические риски (см., например, (Курочкин, 2014), в то время как в используемых аналитиками методиках эти риски не обязательно отражаются должным образом.

2. Консенсусная целевая цена акции представляет собой среднее по выборке, имеющей достаточно большой разброс. Для примера, в табл. 4 приведены актуальные на 19.04.2017 целевые цены акций ПАО Газпром от ряда аналитиков (при текущей рыночной цене акций 122,75 руб.).

Таблица 4. Целевые цены акций ПАО Газпром от различных аналитиков

Источник прогноза	Целевая цена, руб.	Рекомендация
Ситибанк	195,15	Покупать
АЛОР Брокер	100,00	Продавать
Райффайзенбанк	110,24	Продавать
Дойче Банк	100,23	Продавать
JP Morgan Bank International	189,51	Покупать
Morgan Stanley	112,38	Продавать
Goldman Sachs	179,08	Держать
АТОН	147,94	Покупать
ВТБ Капитал	138,33	Держать
Открытие Брокер	136,08	Держать

Источник: материалы сайта http://stocks.investfunds.ru/forecasts/.

Как можно заметить, крайние значения отличаются почти в два раза. В условиях информационной неэффективности рынок физически не может следовать единому алгоритму действий, поскольку разные его участники используют информацию и оценки от разных источников.

3. Участники рынка неоднородны не только в части источников информации, но и в отношении времени реакции на нее. В целом время реакции связано монотонной зависимостью с горизонтом инвестирования. Распределение участников по этим характеристикам с трудом поддается количественному учету и моделированию. В рассмотренной модели вопрос упрощался предположением о времени реакции всего рынка в один шаг дискретного времени.

4. Цены на рынке меняются как из-за технических действий участников, так и вследствие поступления действительно новой информации и хода событий как такового. Рассмотренная модель полностью игнорирует вторую, условно говоря, стохастическую, составляющую и сосредоточена на внутреннем, динамическом поведении системы.

5. Наконец, сама классическая модель Трейнора – Блэка и лежащая в ее основе диагональная модель Шарпа представляют собой идеализацию, которая является платой за получение решений задач оптимизации в явном виде.

Рассмотренная динамическая модель не имеет целью адекватно моделировать (т.е. описать и воспроизвести) реальную динамику цен на рынке акций – едва ли такая задача удовлетворительным образом разрешима в силу ее сложности. Ставилась гораздо более скромная цель: изучить механизм развития малых информационно-ценовых возмущений рынка во времени. Практическое значение работы может быть связано с ситуациями, когда в условиях отсутствия новой поступающей информации динамика рынка определяется только действиями его участников (как живых людей, так и систем автоматизированной торговли), реализующих собственные алгоритмы оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Дамодаран А. (2016). Инвестиционная оценка. М.: Альпина.

Каток А., Хассельблат Б. (2005). Введение в теорию динамических систем. М.: МЦНМО.

Курочкин С.В. (2014). Если они уйдут. Каким будет российский рынок акций в отсутствие зарубежных инвесторов? // *Рынок ценных бумаг*. № 8. С. 57–59.

Московская биржа (2014). Индекс ММВБ MICEXINDEXCF. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.moex.com/ru/index/MICEXINDEXCF/constituents/, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: апрель 2017 г.).

РИА Новости (2016). ЦБ видит потенциальную угрозу в распространении робо-эдвайзеров // *РИА Новости*. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://ria.ru/economy/20160217/1375957204.html, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: февраль 2016 г.).

Сбербанк (2017). Дивиденды. [Электронный ресурс] Официальный сайт. Режим доступа: http://www.sberbank.com/ru/investor-relations/share-profile/dividends, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: апрель 2017 г.).

Black F., Litterman R. (1992). Global Portfolio Optimization // *Financial Analysts Journal*. Vol. 48. No. 5. P. 28–43.

Bodie Z., Kane A., Marcus A. (2014). Investments. N.Y.: McGraw Hill.

Bradshaw M., College B., Huang A. (2013). Analyst Target Price Optimism around the World. Midwest Finance Association 2013 Annual Meeting Paper. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2137291, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: апрель 2017 г.).

Cvitanic J., Lazrak A., Martellini L., Zapatero F. (2006). Dynamic Portfolio Choice with Parameter Uncertainty and the Economic Value of Analysts' Recommendations // *The Review of Financial Studies*. Vol. 19. No. 4. P. 1113–1156.

Fama E. (1965). The Behavior of Stock Market Prices // *Journal of Business*. Vol. 38. P. 34–105.

Standard and Poors (2017). S&P 500. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://us.spindices.com/indices/equity/sp-500, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: апрель 2017 г.).

Stowe J., Robinson T., Pinto J., McLeavy D. (2002). Analysis of Equity Investments: Valuation. N.Y.: Wiley and Sons.

Treynor J., Black F. (1973). How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection // *Journal of Business*. Vol. 46. No. 1. P. 66–86.

US Treasury (2017). Interest Rate Statistics. [Электронный ресурс] Режим доступа: https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/default.aspx, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: апрель 2017 г.).

Wikipedia (2017). S&P 500 Index. [Электронный ресурс] Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/S%26P_500_Index, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: апрель 2017 г.).

Zhongzhi H. (2007). Incorporating Alpha Uncertainty into Portfolio Decisions: A Bayesian Revisit of the Treynor – Black Model // *Journal of Asset Management*. Vol. 8. No. 3. P. 161–175.

Поступила в редакцию
15.02.2017 г.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Black F., Litterman R. (1992). Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, 48, 5, 28–43.

Bodie Z., Kane A., Marcus A. (2014). Investments. N.Y.: McGraw Hill.

Bradshaw M., College B., Huang A. (2013). Analyst Target Price Optimism around the World. Midwest Finance Association 2013 Annual Meeting Paper. Available at: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2137291 (accessed: April 2017).

Cvitanic J., Lazrak A., Martellini L., Zapatero F. (2006). Dynamic Portfolio Choice with Parameter Uncertainty and the Economic Value of Analysts' Recommendations. *The Review of Financial Studies*, 19, 4, 1113–1156.

Damodaran A. (2016). Investment Valuation. M.: Alpina (in Russian).

Fama E. (1965). The Behavior of Stock Market Prices. *Journal of Business*, 38, 34–105.

Katok A., Hasselblatt B. (2005). A First Course in Dynamics. M.: MCCME (in Russian).

Kurochkin S.V. (2014). If the Go Away. What Well Be Russian Stock Market in the Absence of Foreign Investors? *Rynok tsennyh bumag*, 8, 57–59 (in Russian).

Moscow Exchange (2014). MICEXINDEXCF index. Available at: http://www.moex.com/ru/index/MICEXINDEXCF/constituents/(accessed: April 2017, in Russian).

RIA Novosti (2016). CB Sees a Potential Threat in Robo-Advisors Spreading. Available at: http://ria.ru/economy/20160217/1375957204.html (accessed: February 2017, in Russian).

Sberbank (2017). Dividends. Official Site. Available at: http://www.sberbank.com/ru/investor-relations/share-profile/dividends (accessed: April 2017, in Russian).

Standard and Poors (2017). S&P 500. Available at: http://us.spindices.com/indices/equity/sp-500 (accessed: April 2017).

Stowe J., Robinson T., Pinto J., McLeavy D. (2002). Analysis of Equity Investments: Valuation. N.Y.: Wiley and Sons.

Treynor J., Black F. (1973). How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection. *Journal of Business*, 46, 1, 66–86.

US Treasury (2017). Interest Rate Statistics. Available at: https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/default.aspx (accessed: April 2017).

Wikipedia (2017). S&P 500 Index. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/S%26P_500_Index (accessed: April 2017).

Zhongzhi H. (2007). Incorporating Alpha Uncertainty into Portfolio Decisions: A Bayesian Revisit of the Treynor – Black Model. *Journal of Asset Management*, 8, 3, 161–175.

Received 15.02.2017

DYNAMIC FEATURES OF THE TREYNOR – BLACK MODEL

S.V. Kurochkin[I]

Abstract. The Treynor – Black (TB) model seems to be the first active portfolio managenent model to give the direct answer to the problem of how a portfolio manager should incorporate analysts' estimates in her/his portfolio structure. Concerning the assets' returns probabilities distributions W. Sharpe Diagonal Model was taken here as an assumption. In this article I analyze the qualitative dynamics of the stock market under the dynamic version of the TB model, assuming all the investors apply the TB model to their portfolios. A similar assumption is made in CAPM, where market stability and pricing relations are deduced supposing all investors have equal access to information and use Modern Portfolio Theory in their portfolio decisions. I also show, how one should recalculate analysts' target prices to alphas in TB model. The study of the related dynamic system reveals that the TB model produces stable pricing only for the big companies: about 10% market capitalization and more. These findings are then compared to the empirical data on market/target (the latter according to analysts' consensus forecasts) prices for the Russian Blue Chips. It turns out that actual price dynamics usually shows steady gaps between target and market price while the model price should increasingly oscillate around the target. The likely interpretation is: the market does not trust analysts' forecasts.

Keywords: portfolio management, Treynor – Black model, dynamic system, stability.

JEL Classification: G11.

[I] **Sergey V. Kurochkin** – Cand. Sc. (Mathematics), Associate professor, Federal Research Centre "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Dorodnicyn Computing Centre, Russia, Senior researcher; National Research University – Higher School of Economics, Associate professor, Russia, Moscow; skurochkin@hse.ru, kuroch@ccas.ru.