

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Динамическая модель экономического роста с учетом задержек между формированием и использованием человеческого капитала

© 2025 г. Т.Р. Кильматов

Т.Р. Кильматов,

МГУ им. адмирала Г.И. Невельского; ДВФУ, Владивосток; e-mail: talgat_k@mail.ru

Поступила в редакцию 03.05.2024

Аннотация. В рамках макроэкономической динамической модели типа Солоу с учетом накопленного человеческого капитала построена математическая модель, в которой учитывается временная задержка между формированием человеческого капитала (время обучения) и его выходом на рынок труда. Предполагается, что участвующий в настоящее время в экономике человеческий капитал сформирован в предшествующее время. Динамическая модель содержит дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, имитирующим временные задержки. Построены частные аналитические решения в приближении малого параметра. Анализ решений показывает, что экономический эффект временной задержки между формированием и вовлечением в экономику человеческого капитала меняет темпы роста интенсивных параметров экономического агента. Наиболее интересен обсуждаемый фактор по разности воздействия на развитие и развивающиеся страны вследствие их различия по параметрам динамики роста населения и прогресса технологий. Экономические агенты, имеющие опережающие темпы роста численности населения, при прочих равных условиях имеют худшие интенсивные показатели для накопления человеческого капитала. Одновременно, экономические агенты с более высоким уровнем технологий получают преимущество для формирования человеческого капитала. Таким образом, рассматриваемый временной эффект может являться дивергентным фактором в темпах технологического развития между развитыми и бедными странами, поскольку в развивающихся странах наблюдается ускоренный рост населения. Одновременно эти страны являются вторичными в разработке новых технологий.

Ключевые слова: макроэкономическая динамическая модель, человеческий капитал, временные задержки, дифференциальные уравнения с отклоняющимися переменными.

Классификация JEL: CO2, C39.

УДК: 334.01.

Для цитирования: **Кильматов Т.Р.** (2025). Динамическая модель экономического роста с учетом задержек между формированием и использованием человеческого капитала // *Экономика и математические методы*. Т. 61. № 1. С. 125–128. DOI: 10.31857/S0424738825010122

ВВЕДЕНИЕ

Классические динамические модели макроэкономического роста непрерывно совершенствуются в направлении учета новых социально-экономических факторов. Это связано со стремлением теории более адекватно отражать и прогнозировать сценарии развития глобальной экономики с учетом современных вызовов и технологического усложнения структуры экономики. Представленное исследование выполнено в рамках базового подхода модели Солоу (Solow, 1956). Подобный упрощенный подход не является замкнутым для полной имитации развития экономики, его цель — с помощью минимального набора экономических параметров качественно объяснить макроэкономическую динамику. Оптимистический математически обоснованный результат модели Солоу — обеспечить стационарную траекторию экономического роста при экспоненциальном мальтузианском росте популяции с учетом устойчивого дохода на душу населения. Обоснование «золотого правила потребления» создало Р.М. Солоу авторитет и премию по экономике памяти А. Нобеля (1987 г.). Одним из последующих направлений в обобщении обсуждаемой модели является учет человеческого капитала — инвестиции в образование, медицину и т.д. (Lucas, 1988; Romer, 1989, 1990; Mankiw, Romer, Weil, 1992). Инвестиции в образование приводят в будущем к более эффективному труду. Введение еще одного входного параметра в модель Солоу дает дополнительную степень свободы для учета современных тенденций рынка труда, позволяет объяснить новые экономические модельные взаимосвязи и эффекты, например эффект конвергенции

и дивергенции стран в темпах развития. Так, если из классической модели следует только конвергенция стран, т.е. во временной перспективе бедные и богатые страны необходимо сближаются по уровню доходов на душу населения, то влияние человеческого капитала не гарантирует конвергенции, — возможна дивергенция и дальнейшее экономическое расслоение стран.

В данной работе в рамках модели (Mankiw, Romer, Weil, 1992) рассматривается модельное влияние дополнительного фактора — временного запаздывания между формированием человеческого капитала и его выходом на рынок труда. Например, когда инвестиции в образование вкладываются в настоящее время, а экономический эффект ожидается в будущем.

МОДЕЛИ СОЛОУ

Классическая макроэкономическая модель (Solow, 1956) основана на динамике роста монопродукта Y как функции физического капитала K и труда L . Функциональная связь между ними представлена в виде производственной функции Кобба–Дугласа $Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$, где A — уровень технологий, α — эластичность по физическому капиталу. Объем труда во времени и повышение уровня технологий растут по закону Мальтуса, причем темпы роста этих величин — соответственно n , g . Функциональная зависимость от времени имеет вид $L(t) = L_0 e^{nt}$, $A(t) = A_0 e^{gt}$, где $L_0 = L(0)$, $A_0 = A(0)$. В предположении постоянной нормы накопления физического капитала s_k и амортизации капитала δ для скорости роста удельного выпуска $y(t) = Y / AL$ и капитала $k(t) = K / AL$ на единицу эффективного труда получаем дифференциальное уравнение роста вида

$$\dot{k} = s_k y - (n + g + \delta)k = s_k k^\alpha - (n + g + \delta)k. \quad (1)$$

Стационарное решение уравнения (1) имеет вид

$$k_* = [s_k / (n + g + \delta)]^{1/(1-\alpha)}, \quad y_* = [s_k / (n + g + \delta)]^{\alpha/(1-\alpha)}. \quad (2)$$

Анализ показывает, что стационарное решение устойчиво. Одновременно анализ решения (2) показывает, что отклонение от стационарной траектории приводит к более быстрому росту отстающих стран и замедленному росту передовых. Эффект конвергенции — гуманное равное потребление в будущем (при прочих равных условиях).

УЧЕТ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА В МОДЕЛИ СОЛОУ

В работе (Mankiw, Romer, Weil, 1992) в рамках базовой модели Солоу применяется производственная функция в виде $Y = K^\alpha H^\beta (AL)^{1-\alpha-\beta}$, где H — накопленный человеческий капитал (Lucas, 1988; Romer, 1989, 1990). В этом случае динамические уравнения для удельного физического капитала $k(t)$ и удельного человеческого капитала $h(t) = H / AL$ на единицу эффективного труда принимают вид:

$$\begin{cases} \dot{k} = s_k y - (n + g + \delta)k = s_k k^\alpha h^\beta - (n + g + \delta)k; \\ \dot{h} = s_h y - (n + g + \delta)h = s_h k^\alpha h^\beta - (n + g + \delta)h, \end{cases} \quad (3)$$

где s_k и s_h — доли инвестиций в физический и человеческий капиталы. В данной модели стационарное решение в удельных переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} k_* &= [s_k^{1-\beta} s_h^\beta / (n + g + \delta)]^{1/(1-\alpha-\beta)}, \quad h_* = [s_k^\alpha s_h^{1-\alpha} / (n + g + \delta)]^{1/(1-\alpha-\beta)}, \\ y_* &= [s_k^\alpha s_h^\beta / (n + g + \delta)]^{1/(1-\alpha-\beta)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Эта обобщенная версия модели позволяет лучше объяснить современные эмпирические макроэкономические данные. В работе (Mankiw, Romer, Weil, 1992) представлен обширный эконометрический анализ соответствия модельных расчетов и реальных данных. В частности, эмпирика с учетом человеческого капитала на 80% объясняет экономическое различие между развитыми и развивающимися странами. Количественное значение экономической эффективности человеческого капитала оценивается превышением заработной платы над минимальной оплатой труда. Страны, которые стартуют с «бедности», могут развиваться как быстрее, так и медленнее, т.е. возможны эффекты и конвергенции, и дивергенции. Характерные значения параметров в производственной функции $\alpha \approx 1/3$, $\beta \approx 1/3$. Темпы роста (год⁻¹) $\delta \approx 0,03$, $g \approx 0,02$. В данной модели инвестиции в человеческий капитал и отдача от него происходят в один и тот же момент времени. В реальности это происходит в разные моменты — затрачивается время на формирование человеческого капитала, прежде всего время учебы.

ЭФФЕКТ ВРЕМЕННОГО ЛАГА ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА

Дополнительно в расширенной модели (Mankiw, Romer, Weil, 1992) учтем временной лаг между инвестициями в формирование человеческого капитала (обучение) и выходом на рынок труда. Введем переменную τ — время, затраченное на формирование человеческого капитала. Модельно это выглядит так: обучение происходит в прошлом $t - \tau$, появление на рынке труда происходит в момент времени t . Тогда уравнение динамики роста человеческого капитала имеет вид

$$\dot{H}(t) = s_h Y(t - \tau) - \delta H(t). \quad (5)$$

Это дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом (Bellman, 1949; Эльсгольц, Норкин, 1971; Бекларян, 2007).

Для дальнейшего анализа построим модель в простом приближении малого параметра τ . Это означает, что время эффективного присутствия человеческого капитала на рынке много больше времени, потраченного на его обучение. Тогда в линейном приближении можно записать

$$Y(t - \tau) \approx (Y(t) - \tau \dot{Y}(t)) = \alpha L(1 - \tau(\alpha k / k + \beta h / h)). \quad (6)$$

В итоге обобщенная динамическая модель с учетом параметра τ будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{k} = s_k y - (n + g + \delta)k = s_k k^\alpha h^\beta - (n + g + \delta)k, \\ \dot{h} = s_h y - (n + g + \delta)h - \tau s_h y(\alpha k / k + \beta h / h + n + g). \end{cases} \quad (7)$$

Сравнение систем (3) и (7) показывает, что уравнения эволюции удельного физического капитала совпадают, а уравнение динамики человеческого капитала модели (3) является частным случаем модели (7) при $\tau = 0$. Стационарная траектория системы (7) описывается системой:

$$\begin{cases} k_* = \left[s_k^{1-\beta} s_h^\beta (1 - \tau(n + g))^\beta / (n + g + \delta) \right]^{1/(1-\alpha-\beta)}, \\ h_* = \left[s_k^\alpha s_h^{1-\alpha} (1 - \tau(n + g))^{1-\alpha} / (n + g + \delta) \right]^{1/(1-\alpha-\beta)}, \\ y_* = \left[s_k^\alpha s_h^\beta (1 - \tau(n + g))^\beta / (n + g + \delta)^{\alpha+\beta} \right]^{1/(1-\alpha-\beta)}. \end{cases} \quad (8)$$

Ясно, что стационарное решение (4) — это частный случай решения (8) при $\tau = 0$, а стационарное решение (2) — частный случай решения (8) при $\beta = \tau = 0$.

Сравнение стационарных решений (4) (Mankiw, Romer, Weil, 1992) и построенных с учетом временных задержек (8) показывает, что они различаются тем, что в классических формулах (4) значение параметра s_h можно формально заменить на $s_{h\tau} = s_h(1 - \tau(n + g))$. Поскольку $s_{h\tau} \leq s_h$, отсюда следует, что при прочих равных условиях экономические показатели (4) лучше экономических показателей (8), т.е. время τ требует поглощения экономических ресурсов. Дополнительно отметим, что решения (4) и (8) сравниваются в приближении малого параметра, поскольку при росте τ система (8) теряет устойчивость (Кильматов, 2013) и анализ стационарного решения теряет смысл.

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЭФФЕКТА ВРЕМЕННЫХ ЗАТРАТ НА ФОРМИРОВАНИЕ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА

Представленный модельный линеаризованный анализ учета временных затрат на формирование человеческого капитала показывает, что в данном сценарии определяющими факторами являются динамика роста населения и прогресс технологий. В частном стационарном случае, когда технологии заморожены и одновременно численность населения постоянна, эффект задержки во времени сводится к нулю. В предположении, что технологический прогресс распространяется вширь и доступен для всех агентов в равной степени, рассмотрим фактор разности темпов роста населения для разных территорий. Экономические агенты, имеющие опережающие темпы роста населения, при прочих равных условиях имеют худшие интенсивные показатели для формирования человеческого капитала. Следствие этого — возможный эффект дивергенции в развитии экономик передовых и развивающихся стран, так как в отстающих странах наблюдается более интенсивный рост населения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Бекларян Л.А. (2007). *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход*. М.: Факториал Пресс. 288 с. [Beklaryan L.A. (2007). *The introduction to the theory of functional differential equations. Group approach*. Moscow: Factorial Press. 288 p. (in Russian).]
- Кильматов Т.Р. (2013). Временной лаг как фактор потери устойчивости экономической системы // *Экономика и математические методы*. Т. 49. № 3. С. 120–122. [Kilmatov T.R. (2013). Time lag and the instability of a business system. *Economics and Mathematical Methods*, 49, 3, 120–122 (in Russian).]
- Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. (1971). *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*. М.: Наука. 296 с. [Elsgolc L.E., Norkin S.B. (1971). *The introduction to the theory of differential equations with deviating argument*. Moscow: Nauka. 296 p. (in Russian).]
- Bellman R. (1949). On the existence and boundedness of solutions differential-difference equations. *Annals of Mathematics*, 50, 2, 347–355. DOI: 10.2307/1969460
- Lucas R.E. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 22, 1, 3–42.
- Mankiw G., Romer D., Weil D. (1992). Contribution to the empirics of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 107, 2, 407–437. DOI: 10.2307/2118477
- Romer P. (1989). Human capital and growth: Theory and evidence. *NBER Working paper*, 3173. DOI: 10.3386/w3173
- Romer P. (1990). Endogenous technological change. *Journal of Political Economy*, 98, 5, 71–102.
- Solow R.M. (1956). Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70, 1, 65–94.

Dynamic model of economic growth including the delay between the formation and use of human capital

© 2025 T.R. Kilmatov

T.R. Kilmatov,

Marine State University named after admiral G.I. Nevelskoy, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia; e-mail: talgat_k@mail.ru

Received 03.05.2024

Abstract. Following the macroeconomic dynamic models of the Solow type and taking into account the accumulated human capital the mathematical model is constructed. The model additionally takes into account the time lag between the formation of human capital (time of study) and its entry into the labor market. This means that the human capital participating in the economy at the present time was formed in the previous period. The dynamic model contains a differential equation with a deviating argument to simulate the time lag. Particular analytical stationary solutions in the approximation of a small parameter are constructed. The analyses of analytical solutions are carried out. There is model dependence between time lag formation — involvement of human capital and the intensive economic growth rates parameters. An interesting effect is noted: the economic agents with outstripping rates of population growth have worse intensive indicators of human capital formation (all other things being equal). At the same time economic agents with a higher level of technology have an advantage in accumulating human capital. As a consequence, the studied time delay may be a divergent factor in the rates of technological development between developed and poor countries. There is an accelerated population growth in developing countries and at the same time slow technological progress.

Keywords: macro-economic dynamic model, human capital, delay, differential-difference equations.

JEL Classification: CO2, C39.

UDC: 334.01.

For reference: Kilmatov T.R. (2025). Dynamic model of economic growth including the delay between the formation and use of human capital. *Economics and Mathematical Methods*, 61, 1, 125–128. DOI: 10.31857/S0424738825010122 (in Russian).