ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2020, том 56, № 1, с. 100–113

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Математическая модель выручки предприятия в условиях неопределенности спроса

© 2020 г. В.В. Белых

В.В. Белых,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Новосибирский государственный университет экономики и управления"; Новосибирск; e-mail: v.v.belykh@gmail.com

Поступила в редакцию 17.12.2018

Автор выражает благодарность анонимному рецензенту за полезные замечания, позволившие улучшить статью.

Аннотация. Изучение волатильности — одно из актуальных направлений эконометрики. В фокусе настоящего исследования — предприятие, работающее в условиях экономической неопределенности. Предложена стохастическая модель выручки, построенная на основе реверсивного процесса. Она имеет преимущество перед моделями, опирающимися на геометрическое броуновское движение, точно передавая зависимость от времени стандартного отклонения логарифма темпа роста выручки. Верность модели подтверждается эмпирическими данными. Стохастические коэффициенты интерпретированы с точки зрения финансового менеджмента, позволяя по-новому взглянуть на задачи, связанные с управлением операционной деятельностью предприятия. Показано, что реверсивная модель выручки (в качестве инструмента текущего планирования) в сочетании с концепцией устойчивого роста (как элемента стратегического планирования) — это хорошая основа для управления предприятием в условиях неопределенности спроса. Приведены числовые характеристики реверсивного процесса, которые могут быть использованы при разработке методики финансового планирования. В этом отношении полученные нами результаты служат вкладом в теорию финансового менеджмента, которая в значительной степени опирается на представления о детерминированном характере спроса на товары и услуги.

Ключевые слова: неопределенность, формирование выручки, геометрическое броуновское движение, реверсивный процесс, темп роста выручки, операционный цикл, устойчивый рост.

Классификация JEL: C67, G31, M21.

DOI: 10.31857/S042473880008560-5

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует множество исследований, посвященных анализу финансовых стохастических процессов. Список наиболее важных трудов включает около пятисот наименований, самые ранние из которых относятся к началу предыдущего века (см. (Ширяев, 2016)). Значительная роль отводится моделям на основе геометрического броуновского движения (Samuelson, 1965). Первоначальное представление о том, что логарифмическая доходность финансового актива является независимой нормально распределенной случайной величиной с постоянным стандартным отклонением, было дополнено предположением о динамическом характере волатильности, что позволило объяснить особенности эмпирической плотности распределения этого показателя (Субботин, 2009; Степанов, 2011). Вместе с тем из-за фундаментального характера предпосылок, лежащих в основе геометрического броуновского движения, оно остается базой для объяснения эффектов неопределенности в современных моделях ценообразования на финансовых рынках (Black, Scholes, 1973; Hull, 2003; Schofield, Bowler, 2011).

Хорошо изучена связь макроэкономической неопределенности с неопределенностью на уровне промышленных отраслей и отдельных предприятий (Блум, 2016). Известно, что дисперсия денежного потока существенным образом влияет на стоимость предприятий (Rountree, Weston, Allayannis, 2008). При планировании операционной деятельности она служит фактором, увеличивающим потребности в финансировании (Царьков, 2011). Разрабатываются методики, смягчающие негативное

влияние непредсказуемости выручки, например позволяющие оптимизировать производство путем применения принципа обратной связи (Бухвалова, Петрусевич, 2011). В отличие от работ, посвященных анализу фондовых рынков, при исследовании бизнес-процессов основное внимание уделяется последствиям микроэкономической нестабильности, а не случайному процессу, скрытому за нею.

Из того что броуновское движение служит основой для описания поведения цен акций и курсов валют, не следует, что оно подходит для построения стохастической модели выручки предприятий. Одна из особенностей этого финансового показателя заключается в том, что в отличие от цен на инструменты фондового рынка его формирование происходит в течение определенного периода времени. Другое отличительное свойство выручки касается уровня стохастичности. Если на фондовом рынке действие случайных факторов ничем не ограничено, то бизнес-процессы предприятия, определяющие объемы реализации продукции, более или менее упорядочены.

Цель данной статьи — показать преимущества геометрической реверсивной модели выручки по сравнению с моделью на основе геометрического броуновского движения, не оставляя без внимания интервальный характер анализируемого показателя.

Решение этой задачи осуществляется в несколько этапов. На первом этапе рассматривается броуновское движение. На примере этого стохастического процесса продемонстрированы особенности формирования случайных величин, связанные с интервальностью. Показано, что уравнение, описывающее случайную величину в разные моменты времени, существенно не меняется при переходе к интервальным значениям. На следующем этапе исследуется реверсивный процесс, позволяющий учесть особенности формирования выручки, связанные с операционной деятельностью предприятия. Его отличительная черта — наличие коэффициента, отвечающего за скорость возвращения случайной величины на уровень реверсии, задаваемый экспоненциальным трендом. В заключительной части работы приведены уравнения, которые могут быть использованы при планировании выручки в условиях неопределенности спроса.

Основные результаты получены с помощью решения стохастического дифференциального уравнения, представляющего реверсивный процесс. Существенная часть выводов сделана методом статистического моделирования. Он оказался полезным при рассмотрении эффектов, связанных с интервалом формирования случайной величины. В вычислениях использовались случайные числа, сгенерированные с применением алгоритма Мерсенна. Правильность расчетов проверялась на контрольном наборе случайных чисел, созданном с использованием процедуры блочного шифрования. Число раундов шифрования обеспечивало равномерность распределения случайных чисел по результатам применения теста “стопка книг” (Пестунов, 2015). Контрольная последовательность чисел была предоставлена автором указанной статьи. При численном решении стохастических дифференциальных уравнений применялась схема Мильштейна (Henderson, Plaschko, 2006). Параметры моделирования процессов находятся в диапазонах, присущих выручке предприятий.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Общие предпосылки, на которые мы опирались при построении стохастической модели выручки, связаны с экономическим ростом, который в первом приближении подчиняется закону геометрической прогрессии. Почему так происходит, видно на примере инвестиций в акции. Если цена актива выросла в соответствии с требуемой доходностью, то инвестор ожидает продолжения восходящего тренда, который бы обеспечил такую же доходность в следующем периоде времени (Hull, 2003, p. 222). При описании спроса на продукцию и услуги предприятия в условиях информационной неопределенности также применялся закон геометрической прогрессии (Бухвалова, Петрусевич, 2011, с. 4). На поступательное движение, описываемое этим законом, накладываются случайные колебания. Если они пропорциональны текущему значению исследуемой величины, что характерно для экономических показателей, то говорят о мультипликативном характере воздействия случайных факторов.

В случае выручки значение показателя формируется в течение некоторого периода времени. В зависимости от классифицирующего признака такие величины при одних обстоятельствах на-

зываются интервальными, при других — потоковыми. В настоящей работе выручка называется *интервальной* при анализе конечных интервалов времени, и *мгновенной*, когда длительность интервала стремится к нулю. В последнем случае она имеет смысл производной по времени от остатка на соответствующем балансовом счете. Согласно этому временные ряды, построенные на основе выручки, будут относиться к интервальным (Суслов и др., 2005, с. 348). Принимая во внимание общие предпосылки, наиболее подходящей моделью для описания выручки оказывается мультипликативная модель с экспоненциальным трендом, где экспонента отражает геометрический рост с непрерывным начислением процентов.

Мгновенные значения выручки при мультипликативном характере воздействия случайных факторов можно представить с помощью модели геометрического броуновского движения. Случайная величина, испытывающая такое движение, распределена логарифмически нормально и экспоненциально растет. Уравнение для мгновенной выручки имеет вид (Ширяев, 2016, с. 259):

$$s_t = s_0 \exp\left(\left(\mu - \sigma^2 / 2\right)t + \sigma W_t\right), \tag{1}$$

где s_t и s_0 — мгновенные значения выручки в момент времени t и в начальный момент времени (время измеряется в единицах года); μ — мгновенный темп среднего прироста стохастического процесса (годовой показатель); σ — постоянный коэффициент; W_t — винеровский процесс длительностью t.

Зависимость стандартного отклонения логарифма темпа роста мгновенной выручки от времени в модели на основе геометрического броуновского движения описывается уравнением

$$\sigma_t = \sigma\sqrt{t}, \tag{2}$$

где σ_t — стандартное отклонение логарифма темпа роста мгновенной выручки для времени развития стохастического процесса, равного t. При анализе конкретного промежутка времени он будет прямо отражаться в индексе (например, годовой промежуток — $\sigma_{год}$). Таким образом, для геометрического броуновского движения $\sigma = \sigma_{год}$.

Наравне с обозначением винеровского процесса, в котором индекс указывает на его длительность, при рассмотрении корреляционного эффекта мы будем использовать обозначение с индексами, показывающими начало и конец участка винеровского движения. В частности, винеровский процесс в уравнении (1) можно записать как $W_t = W_{0,0+t}$.

Перейдем к анализу интервальных значений выручки. Эти значения (в отличие от мгновенных) будем обозначать заглавными буквами. Принимая во внимание уравнение (1), интервальное значение выручки равно

$$S_t = \int_t^{t+\tau} (s_0 \exp\left\{(\mu - \sigma^2 / 2)\theta + \sigma W_{0,\theta}\right\}) d\theta, \tag{3}$$

где S_t — интервальное значение выручки в момент времени t; τ — интервал времени, в течение которого формируется выручка (в единицах года); θ — переменная интегрирования.

В соответствии с уравнением (3) интервальное значение выручки представляет собой скользящий показатель, где t — начало интервала, в течение которого происходит формирование выручки. Например, можно рассматривать ежедневные значения квартальной выручки.

Введем новую переменную интегрирования. Сейчас отрезок времени $[t, t+\tau]$ показывает пределы интегрирования с опорой на общее время развития стохастического процесса. Подстановка $\theta' = \theta - t$ преобразует интеграл (3) к виду

$$S_t = \int_0^{\tau} (s_0 \exp\left\{(\mu - \sigma^2 / 2)(t + \theta') + \sigma W_{0,t+\theta'}\right\}) d\theta',$$

в котором пределы интегрирования задаются отрезком времени $[0, \tau]$ без привязки ко времени развития стохастического процесса.

После преобразования стохастический процесс, в результате которого формируется интервальное значение выручки, можно представить в виде суммы двух стохастических процессов, соответствующих разным отрезкам времени $W_{0,t+\theta'} = W_{0,t} + W_{t,t+\theta'}$. С учетом разложения стохастического

процесса на две составляющие получаем следующее выражение для интервального значения выручки:

$$S_t = \left(\int_0^{\tau} s_0 \exp\left\{ \left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) \theta' + \sigma W_{t,t+\theta'} \right\} d\theta' \right) \exp\left\{ \left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) t + \sigma W_{0,t} \right\} = \\ = I_t \exp\left\{ \left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) t + \sigma W_{0,t} \right\}, \tag{4}$$

где I_t — стохастический процесс с математическим ожиданием и стандартным отклонением, не зависящими от времени в силу тождественности статистических свойств винеровских процессов одинаковой длины.

Из уравнения (4) получаем интервальное значение выручки в начальный момент времени:

$$S_0 = I_0 = \int_0^{\tau} s_0 \exp\left\{ \left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) \theta' + \sigma W_{0,\theta'} \right\} d\theta', \tag{5}$$

где S_0 — случайная величина с такими же математическим ожиданием и стандартным отклонением, как у стохастического процесса I_t.

На основании уравнений (4) и (5) можно записать простое выражение для интервальных значений выручки:

$$S_t \cong S_0 \exp\left\{ \left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) t + \sigma W_{0,t} \right\}. \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет приблизительный характер, так как здесь не учитываются корреляционные связи, вызванные общим участком траектории винеровского процесса $[0, \tau]$ в составе его сомножителей. Это заметно, если винеровский процесс, находящийся в уравнении (6) под знаком экспоненты, представить в виде суммы $W_{0,t} = W_{0,\tau} + W_{\tau,t}$, где процесс, описываемый первым слагаемым, является общим, присутствуя под знаками экспоненты в уравнениях (5) и (6). Равенство $W_{0,t} = W_{0,\tau} + W_{\tau,t}$ относится к случаю, когда $t \geq \tau$.

Форма уравнения (6) не меняется при рассмотрении любого отрезка геометрического броуновского движения. Если известна выручка в момент времени t, то ее величина в момент времени $(t+T)$ равна

$$S_{t+T} \cong S_t \exp\left\{ \left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) T + \sigma W_T \right\}, \tag{7}$$

где T — промежуток времени между двумя значениями выручки; $W_T = W_{t,t+T}$ — винеровское движение на участке $[t, t+T]$.

Логарифм темпа роста процесса (7) характеризуется математическим ожиданием

$$E\left[\ln\left(S_{t+T} / S_t \right) \right] = \left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) T \tag{8}$$

и стандартным отклонением

$$\sigma_T = \sigma \sqrt{T}. \tag{9}$$

Пренебрежение корреляционными связями приводит к тому, что интервал формирования выручки не представлен в уравнении (9). Насколько это допустимо, показывает сравнение траекторий накопления стандартных отклонений логарифма темпа роста квартальной выручки σ_T, рассчитанных аналитически и методом статистического моделирования. На рис. 1 приведены нормированные на $\sigma_{\text{год}}$ значения показателя. При моделировании использовалось уравнение (П10) (см. Приложение). Разыгрывались 20-летние истории дневной выручки. Путем суммирования дневных значений рассчитывались квартальные, для которых в границах указанного периода анализируется волатильность логарифма темпа роста за время T. Статистическое моделирование учитывает корреляционные связи, что приводит к отклонению траектории от функции квадратного корня. Анализ отдельных историй выручки дает представление о масштабе случайных колебаний

выборочного стандартного отклонения. На рис. 1 видно, что временна́я динамика стандартного отклонения хорошо описывается уравнением (9), если для каждого интервала формирования выручки применять свое значение $\sigma_{год}$.

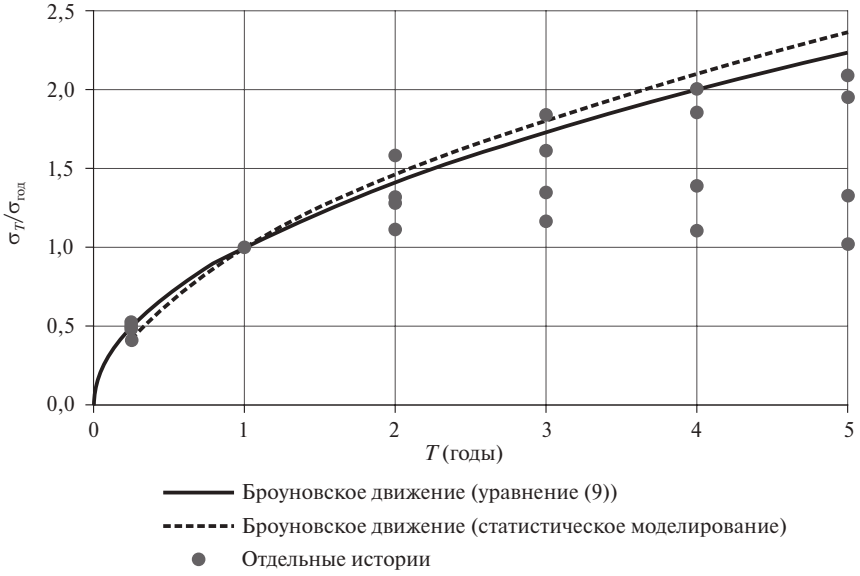

Рис. 1. Траектории накопления стандартного отклонения броуновского движения ($\mu = 10\%$, $\sigma = 20\%$)

При эмпирическом изучении свойств выручки удобно анализировать временные ряды, построенные на основе ретроспективных данных о логарифме темпа роста выручки. Учитывая (8) и (9), получаем выражение для временно́го ряда на основе выручки:

$$\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)=\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\sigma\varepsilon_n\sqrt{\tau}, \tag{10}$$

где $\ln\left(S_n / S_{n-1}\right)$ — логарифм темпа роста интервальных значений выручки; n — порядковый номер отрезка времени длительностью τ; ε_n — нормально распределенное случайное число шага n с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

Так как для соседних членов ряда (10) длительность развития стохастического процесса совпадает с интервалом формирования выручки, его стандартное отклонение $\sigma_\tau = \sigma\sqrt{\tau}$. Таким образом, волатильность ряда однозначно определяется длительностью интервала формирования случайной величины.

Из регулярности промежутков времени следует стационарность основных характеристик временного ряда: постоянство стандартного отклонения (гомоскедастичность) и среднего значения (отсутствие тенденций). Логарифмы темпа роста выручки статистически не связаны. Это означает, что свойства автокорреляционной функции временного ряда такие же, как у последовательности нормально распределенных случайных величин, образующих белый шум.

Математическая модель (6) сочетается с концепцией устойчивого роста (Van Horne, 1998, p. 403). Выручка предприятия, следующего этой концепции, увеличивается в соответствии с геометрической прогрессией, знаменатель которой может оставаться постоянным долгое время. Данное поступательное движение образует трендовую составляющую роста, связанную с действием детерминированных сил. На него накладываются колебания, вызванные влиянием непредвиденных факторов, которые формируют стохастическую составляющую роста.

Найдем связь между стохастической и детерминированной моделями роста. При уменьшении влияния случайных факторов $\sigma \to 0$, что приводит к вырождению процесса (6) в детерминированную зависимость

$$\upsilon_t = \upsilon_0 \, e^{\mu t}, \tag{11}$$

где υ_t и υ_0 — детерминированные значения выручки в момент времени t и в начальный момент времени.

Полученное уравнение описывает предельный случай геометрической прогрессии, в котором μ согласно концепции устойчивого роста определяется комбинацией операционных показателей предприятия:

$$\mu = \ln(1+SGR) = \ln\left\{\frac{A}{\upsilon}\Big/\left(\left(\frac{A}{\upsilon}\right)-b\left(\frac{NP}{\upsilon}\right)\left[1+\left(\frac{D}{E}\right)\right]\right)\right\}, \tag{12}$$

где SGR — коэффициент устойчивого роста; (A/υ) — коэффициент капиталоемкости (активы/продажи); b — коэффициент нераспределенной прибыли; (NP/υ) — коэффициент чистой рентабельности продаж (читая прибыль/продажи); (D/E) — соотношение заемного и собственного капиталов.

3. РЕВЕРСИВНАЯ МОДЕЛЬ

3.1. Цикличность операционной деятельности

Согласно концепции (Richards, Laughlin, 1980) выручка предприятия является результатом выполнения ряда операционных циклов. Их можно представить как случайные эксперименты, завершающиеся получением выручки. В начале эксперимента уровень спроса на продукцию предприятия точно неизвестен, поэтому выручка на момент его завершения является случайной величиной с дисперсией, отражающей действие случайных факторов на промежутке времени, равном длительности эксперимента, совпадающим с длительностью операционного цикла. Несмотря на непредсказуемость отдельных результатов, математическое ожидание выручки на момент окончания эксперимента поддается контролю. Предприятие может корректировать уровень затрат, обеспечивающих возобновление операционных циклов, сдвигая в бóльшую или меньшую сторону среднее значение выручки на момент их окончания.

В зависимости от того, на каком рынке — покупателя или продавца — работает предприятие, возобновление операционных циклов может происходить с учетом спроса или плана. В первом случае выпуск продукции следует за спросом на товары и услуги. Полученные средства служат источником финансирования затрат, связанных с возобновлением операционных циклов. Пропорционально длительности анализируемого промежутка времени растет дисперсия выручки, накапливая неопределенность, связанную с рынком покупателя. Во втором случае руководствуются составленным ранее планом производства. При дефиците выручки привлекается финансирование, не связанное с операционной деятельностью, при избытке — средства выводятся из оборота. Из-за того что возобновление операционных циклов мало зависит от предшествующих результатов, накопление неопределенности на рынке продавца происходит медленнее по сравнению с предыдущим случаем.

3.2. Реверсивное уравнение

Способу возобновления операционных циклов на основе плана, при котором влияние случайных факторов снижается, поставим в соответствие геометрический реверсивный процесс (П6) (см. Приложение), согласно которому математическая модель интервальной выручки имеет вид

$$S_t \cong S_0 \exp\left\{\left(\mu - 0{,}5\sigma^2 \frac{1-\exp(-\mu\nu t)}{\mu\nu t}\right)t + \sigma\int_0^t \exp\big(-\mu\nu(t-\theta)\big)\,dW_\theta\right\}, \tag{13}$$

где ν — коэффициент реверсии. При реализации концепции устойчивого роста плановые значения выручки задаются экспоненциальным трендом $\upsilon_t = \upsilon_0 e^{\mu t}$, определяющим уровень реверсии стохастического процесса. В начальный момент времени стохастический процесс и тренд совпадают.

Стандартное отклонение логарифма темпа роста выручки в соответствии с моделью (13) описывает уравнение

$$\sigma_t = \sigma\sqrt{\left(1-e^{-2\mu\nu t}\right)/(2\mu\nu)}. \tag{14}$$

При анализе временных рядов сравниваются значения выручки, разделенные отрезком времени, смещенным по отношению к начальной точке стохастического процесса на величину t. Таким исходным условиям соответствует реверсивный процесс (П8) (см. Приложение), из которого получаем

$$S_{t+T} \cong S_t \exp\left\{\mu T - \frac{\sigma^2}{2\mu\nu} e^{-\mu\nu t}\left(1-e^{-\mu\nu T}\right) - \int_0^t \left[\sigma\left(1-e^{-\mu\nu T}\right)e^{-\mu\nu(t-\theta)}\right]dW_\theta + \int_t^{t+T}\left[\sigma e^{-\mu\nu(t+T-\theta)}\right]dW_\theta\right\}, \tag{15}$$

где T — отрезок времени между двумя значениями выручки.

Волатильность логарифма темпа роста этого процесса в соответствии с уравнением (П9) (см. Приложение) равна

$$\sigma_{T,t} = \sigma\sqrt{\frac{1}{2\mu\nu}\left[\left(1-e^{-2\mu\nu t}\right)\left(1-e^{-\mu\nu T}\right)^2 + \left(1-e^{-2\mu\nu T}\right)\right]}, \tag{16}$$

где $\sigma_{T,t}$ — стандартное отклонение логарифма темпа роста выручки для промежутка времени длительностью T, который располагается на удалении t от начала стохастического процесса.

При $t \to \infty$ логарифм темпа роста процесса (15) характеризуется математическим ожиданием

$$E\left[\ln\left(S_{t+T}/S_t\right)\right] \cong \mu T \tag{17}$$

и стандартным отклонением

$$\sigma_T = \sigma_{T,\infty} \cong \sigma\sqrt{\left(1-e^{-\mu\nu T}\right)/\mu\nu}. \tag{18}$$

Модели (13) и (15) не принимают во внимание корреляционные связи, существующие между интервальными значениями выручки. Чтобы оценить погрешность, связанную с этим обстоятельством, дальнейший анализ будет сопровождаться расчетами, сделанными методом статистического моделирования.

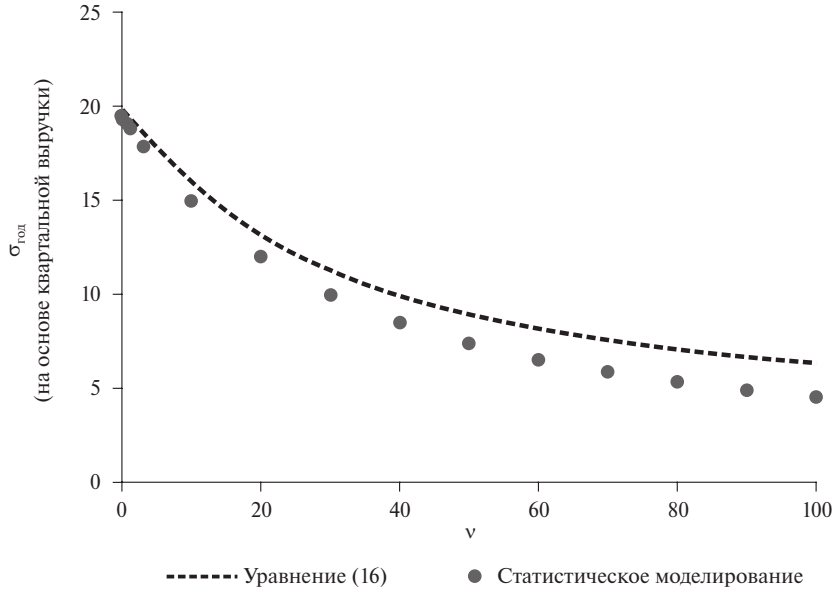

Рис. 2. Эффект реверсивности ($t \geq 10$, $\mu = 10\%$, $\sigma = 20\%$)

Реверсивность существенным образом влияет на волатильность стохастического процесса. На рис. 2 представлены результаты расчетов стандартного отклонения логарифма годового темпа роста квартальной выручки $\sigma_{год}$ с использованием уравнения (16) и метода статистического моделирова-

ния. В последнем случае с помощью уравнения (П1) (см. Приложение) генерировались 20-летние истории дневной выручки, находящиеся на 10-летнем удалении от начала стохастического процесса. На основе дневных значений путем суммирования рассчитывали квартальную выручку. Таким образом, для каждого логарифма темпа роста выручки, участвующего в расчетах $\sigma_{год}$, выполнялось условие $t \geq 10$. Первая слева точка графика относится к геометрическому броуновскому движению. Стандартное отклонение реверсивного процесса быстро снижается с ростом коэффициента реверсии, делая процесс более предсказуемым.

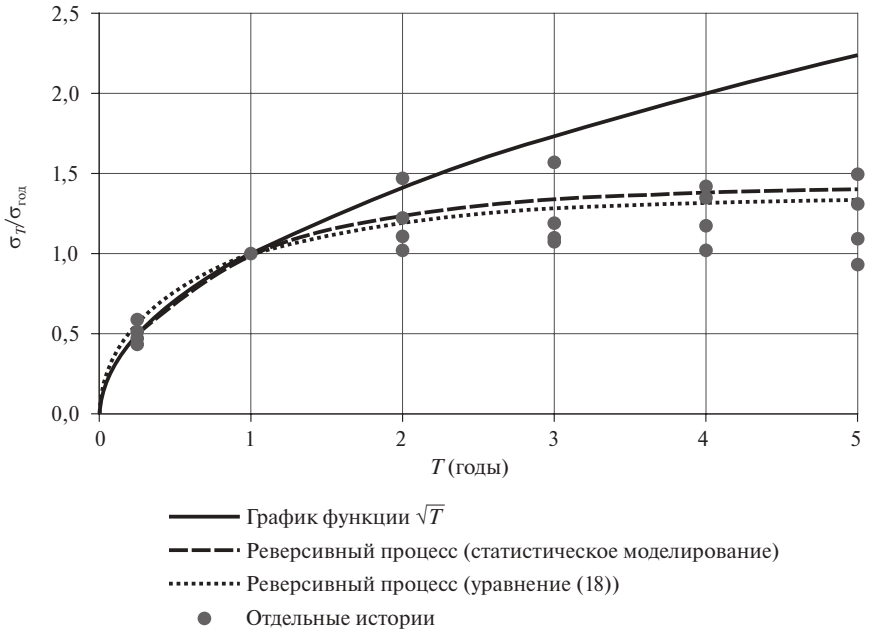

Рис. 3. Траектории накопления стандартного отклонения реверсивного процесса ($t \geq 10$, $\mu = 10\%$, $\sigma = 20\%$, $\nu = 8$)

Траектория накопления дисперсии реверсивного процесса более пологая по сравнению с броуновским движением (рис. 3). По этому признаку на практике можно установить наличие реверсивности. Поле точек показывает статистический разброс траекторий, сопутствующий анализу квартальной выручки за 20 лет. Результаты статистического моделирования подтверждают возможность применения уравнения (18) к участкам стохастического процесса, отстоящим от начала на значительном удалении. Из рассмотрения процессов с разным уровнем реверсивности видно, что при увеличении коэффициента реверсии выполаживание траекторий происходит быстрее, делая временну́ю динамику волатильности менее выраженной.

4. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

Этот раздел работы особенно важен, так как траектории накопления дисперсии позволяют отличить реверсивный процесс от броуновского движения. Поведение дисперсии исследуем на примере временны́х рядов, включающих темпы роста за разное время. Модель временно́го ряда построим с использованием уравнений (17) и (18), так как предполагается анализировать выручку предприятий, проработавших долгое время, вследствие чего t 1. Согласно этому теоретическую модель временно́го ряда описывает уравнение

$$\ln\left(S_n / S_{n-k}\right) = \mu k\tau + \sigma\varepsilon_n\sqrt{\left(1-\mathrm{e}^{-\mu\nu k\tau}\right)/\mu\nu}, \tag{19}$$

где S_{n-k} — выручка интервала времени $(n-k)$; k — число промежуточных интервалов между сравниваемыми значениями выручки.

В соответствии с моделью (19) стандартное отклонение, характеризующее волатильность ряда, равно

$$\sigma_T = \sigma\sqrt{\left(1-e^{-\mu\nu k\tau}\right)/(\mu\nu)}, \tag{20}$$

где σ_T — стандартное отклонение временного ряда, построенного на основе значений выручки, разделенных промежутком времени $T = k\tau$.

Траектории накопления стандартного отклонения логарифма темпа роста квартальной выручки σ_T (рис. 4) рассчитаны на основе бухгалтерской отчетности предприятий (см. таблицу) за период 1998–2017 гг. На графиках приведены нормированные на $\sigma_{год}$ значения показателя. Поле точек передает диапазон наблюдаемых значений стандартных отклонений. Ломаная линия служит примером эмпирической траектории, подготовленной по данным ПАО “Гайский ГОК”. Она близка к теоретическому графику, построенному с использованием уравнения (18). Стандартные отклонения некоторых предприятий обнаруживают максимум в области от двух до четырех лет, образуя характерный изгиб. Похожая динамика волатильности наблюдается для доходности облигаций, где соответствующий график был описан как “змеевидный” (Andersen, Benzoni, 2010). Эмпирические данные свидетельствуют о том, что геометрическая реверсивная модель точно отражает рост волатильности выручки с течением времени. Значения коэффициента реверсии (см. таблицу) получены методом наименьших квадратов.

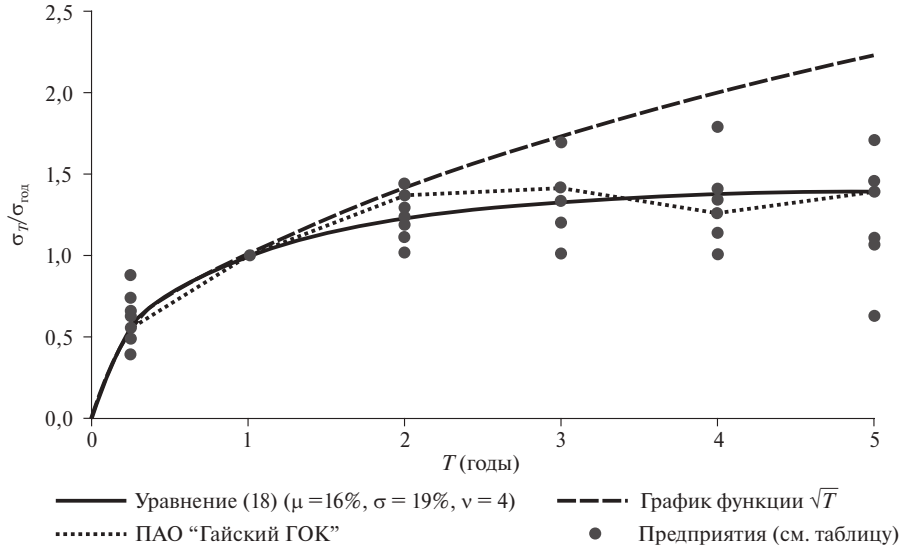

Рис. 4. Траектории накопления стандартного отклонения квартальной выручки

Таблица. Эмпирические коэффициенты квартальной выручки

Предприятие	μ, %	$\sigma_{год}$, %	ν
ПАО “Гайский ГОК”	16	19	4
ПАО “ПБТФ”	10	41	18
ПАО “Аэрофлот”	20	21	3
АО “Воркутауголь”	13	37	20
ОАО “Сургутнефтегаз”	19	36	4
ПАО “РЖД”	7	7	3
АО “Учалинский ГОК”	26	43	3

5. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Практический интерес представляют числовые характеристики реверсивного процесса. Необходимость в них возникает при стохастическом анализе безубыточности (Белых, 2018а) и операци-

онного цикла предприятий (Белых, 2018б). Дальнейший анализ числовых характеристик опирается на уравнение (13), выведенное для мгновенных случайных величин, из-за чего в отношении интервальных показателей полученные нами результаты следует считать приблизительными.

5.1. Математическое ожидание выручки

Сечение реверсивного процесса подчиняется логарифмически нормальному закону распределения. В соответствии со свойствами этого распределения математическое ожидание стохастического процесса (13) равно

$$\begin{aligned} V_t = \mathrm{E}(S_t) = \exp\left\{\mathrm{E}\left[\ln(S_t)\right]\right\}\exp\left(0{,}5\sigma_t^2\right) = \\ = S_0 \exp\left\{\mu t - 0{,}5\sigma^2\left(1-\mathrm{e}^{-\mu\nu t}\right)/\mu\nu + 0{,}5\sigma^2\left(1-\mathrm{e}^{-2\mu\nu t}\right)/2\mu\nu\right\}, \end{aligned} \tag{21}$$

где V_t — математическое ожидание выручки; σ_t — стандартное отклонение, соответствующее времени развития стохастического процесса (см. (14)).

Когда реверсивность отсутствует ($\nu \to 0$), уравнение (21) принимает вид, как при геометрическом броуновском движении:

$$V_t = S_0\,\mathrm{e}^{\mu t}. \tag{22}$$

5.2. Вероятность превышения заданного значения

Следуя процедуре (Fernandez, 2002), найдем вероятность того, что случайная величина S_t в момент времени t окажется больше некоторого значения K:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_t > K) = \mathrm{P}\left\{S_0 \exp\left\{\left[\mu - 0{,}5\sigma^2\left(1-\mathrm{e}^{-\mu\nu t}\right)/\mu\nu t\right]t + \sigma_t\varepsilon\right\} > K\right\} = \\ = \mathrm{P}\left[\varepsilon > \left(\ln(K/S_0) - \mu t + 0{,}5\sigma^2\left(1-\mathrm{e}^{-\mu\nu t}\right)/\mu\nu\right)/\sigma_t\right], \end{aligned}$$

где $\mathrm{P}(S_t > K)$ — вероятность, что в момент времени t выручка предприятия будет больше K; ε — нормально распределенное случайное число с нулевым средним значением и единичной дисперсией. Учитывая, что $\mathrm{P}(\varepsilon > \xi) = \mathrm{P}\left[\varepsilon < (-\xi)\right]$, получим

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_t > K) = \mathrm{P}\left[\varepsilon < \left\{\ln(S_0/K) + \mu t - 0{,}5\sigma^2\frac{1-\mathrm{e}^{-\mu\nu t}}{\mu\nu} + 0{,}5\sigma_t^2 - 0{,}5\sigma_t^2\right\}/\sigma_t\right] = \\ = \mathrm{P}\left[\varepsilon < \left\{\ln(V_t/K) - 0{,}5\sigma_t^2\right\}/\sigma_t\right] = N(d_2), \end{aligned} \tag{23}$$

где $N(d_2)$ — интегральная функция стандартного нормального распределения с аргументом, равным

$$d_2 = \left(\ln(V_t/K) - 0{,}5\sigma_t^2\right)/\sigma_t. \tag{24}$$

5.3. Математическое ожидание отклонения выручки от заданного значения

Найдем математическое ожидание отклонения случайной величины S_t от значения K в момент времени t в бóльшую сторону $F_t = \mathrm{E}(S_t / S_t > K)\mathrm{P}(S_t > K) - K\mathrm{P}(S_t > K)$, где F_t — математическое ожидание отклонения выручки от заданного значения в момент времени t, при условии, что $(S_t > K)$. В соответствии с уравнениями (23) и (24) условие $(S_t > K)$ выполняется, когда $\varepsilon > (-d_2)$. Математическое ожидание выручки, значения которой больше заданной величины, найдем с помощью интегрирования по переменной ε:

$$\mathrm{E}\left(S_t / S_t > K\right)\mathrm{P}\left(S_t > K\right) =$$

$$= \int_{-d_2}^{+\infty}\left[S_0 \exp\left\{ \mu t - 0{,}5\sigma^2 \frac{1-\mathrm{e}^{-\mu\nu t}}{\mu\nu} + 0{,}5\sigma_t^2 - 0{,}5\sigma_t^2 + \sigma_t\varepsilon \right\} \mathrm{e}^{-0{,}5\varepsilon^2} / \sqrt{2\pi} \right] d\varepsilon =$$

$$= \frac{V_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-0{,}5\sigma_t^2 + \sigma_t\varepsilon - 0{,}5\varepsilon^2} \right) d\varepsilon = \frac{V_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}5\left(\sigma_t - \varepsilon\right)^2}\, d\varepsilon,$$

где $\mathrm{E}\left(S_t / S_t > K\right)\mathrm{P}\left(S_t > K\right)$ — математическое ожидание отклонения выручки от заданного значения, когда $\left(S_t > K\right)$.

Переменную интегрирования заменим на $z = \left(\sigma_t - \varepsilon\right)$, в результате

$$E\left(S_t / S_t > K\right) P\left(S_t > K\right) = \left(\frac{V_t}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{d_1} \exp\left(-0{,}5z^2\right) dz = V_t N\left[\frac{\ln\left(V_t / K\right) + 0{,}5\sigma_t^2}{\sigma_t} \right] = V_t N\left(d_1\right),$$

где $N\left(d_1\right)$ — интегральная функция стандартного нормального распределения с аргументом

$$d_1 = \left[\sigma_t - \left(-d_2\right)\right] = \sigma_t + \frac{\ln\left(V_t / K\right) - 0{,}5\sigma_t^2}{\sigma_t} = \frac{\ln\left(V_t / K\right) + 0{,}5\sigma_t^2}{\sigma_t}. \tag{25}$$

Таким образом, математическое ожидание отклонения выручки от заданного значения в бóльшую сторону равно

$$F_t = V_t N\left(d_1\right) - KN\left(d_2\right). \tag{26}$$

Аналогичным образом можно найти математическое ожидание отклонения случайной величины S_t от значения K в момент времени t в меньшую сторону:

$$P_t = V_t\left[1 - N\left(d_1\right)\right] - K\left[1 - N\left(d_2\right)\right], \tag{27}$$

где P_t — математическое ожидание отклонения выручки от заданного значения в момент времени t, при условии, что $\left(S_t < K\right)$. Уравнения (26) и (27), выведенные для процесса (13), совпадают с аналогичными уравнениями для процесса (15) и броуновского движения (1), отличаясь от них способами расчета V_t и σ_t.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты, полученные в настоящей работе, предоставляют основу для разработки методики управления финансами предприятия в условиях экономической неопределенности. Основные методические предпосылки можно сформулировать следующим образом.

1. Геометрическая реверсивная модель выручки имеет преимущество по сравнению с моделью на основе геометрического броуновского движения, так как учитывает упорядоченность деятельности предприятия, связанной с производством и сбытом продукции. Величина коэффициента реверсии определяется уровнем контроля над его бизнес-процессами.

2. При разработке методики можно воспользоваться уравнениями для случая мгновенной случайной величины, если для разных интервалов формирования выручки применять соответствующие им коэффициенты σ. Ошибка, сопутствующая таким расчетам, статистически незначима на фоне случайных колебаний, которые могут встретиться на практике.

3. Наиболее подходящим способом планирования выручки предприятий, работающих долгое время или у которых коэффициент реверсии равен нулю, будет планирование от достигнутого уровня, когда ожидаемые значения показателя рассчитываются на основе данных последнего отчетного периода. В разд. 5 настоящей работы приведены уравнения, которые могут быть использованы при таком подходе к планированию.

4. Сочетание реверсивной модели выручки (текущее планирование) с концепцией устойчивого роста (стратегическое планирование) — хороший способ управления предприятием в условиях экономической неопределенности. Такая комбинация обеспечивает согласованность элементов плана, построенных на основе стохастической и детерминированной составляющих роста.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Геометрический реверсивный процесс

Найдем решение стохастического дифференциального уравнения, описывающего случайную величину, которая под влиянием внешних факторов испытывает смещение в сторону экспоненциального тренда:

$$dS_t = -\mu S_t\left[\ln\left(S_t/\upsilon_t\right)^{\nu}-1\right]dt+\sigma S_t\,dW_t, \tag{П1}$$

где S_t — стохастический процесс; μ, ν и σ — постоянные коэффициенты; $\upsilon_t=\upsilon_0 e^{\mu t}$ — уровень реверсии, определяемый уравнением (11); t — время $(t\ge 0)$; W_t — винеровский процесс.

Воспользуемся формулой Ито для функции $F\left(S_t,t\right)=\ln\left(S_t\right)e^{\mu\nu t}$:

$$dF\left(S_t,t\right)=\varphi(t)\,dt+\sigma\, e^{\mu\nu t}\,dW_t, \tag{П2}$$

где

$$\varphi(t)=\ln\left(S_t\right)e^{\mu\nu t}\,\mu\nu-\mu S_t\left[\ln\left(S_t/\upsilon_t\right)^{\nu}-1\right]e^{\mu\nu t}/S_t-0{,}5\sigma^2S_t^2\,e^{\mu\nu t}/S_t^2=$$
$$=\mu\nu e^{\mu\nu t}\ln\left(\upsilon_t\right)+\mu e^{\mu\nu t}-0{,}5\sigma^2 e^{\mu\nu t}=\mu\nu e^{\mu\nu t}\ln\left(\upsilon_0\right)+\mu^2\nu t e^{\mu\nu t}+\mu\left(1-\sigma^2/2\mu\right)e^{\mu\nu t}.$$

Решение дифференциального стохастического уравнения (П2) описывает процесс

$$F\left(S_t,t\right)=F\left(S_0,0\right)+\int_0^t\varphi\left(\theta\right)d\theta+\int_0^t\sigma e^{\mu\nu\theta}\,dW_\theta, \tag{П3}$$

где S_0 — значение стохастического процесса в начальный момент времени.

Найдем первый интеграл в правой части уравнения (П3):

$$\int_0^t\varphi\left(\theta\right)d\theta=\mu\nu\ln\left(\upsilon_0\right)\int_0^t e^{\mu\nu\theta}d\theta+\mu^2\nu\int_0^t\theta e^{\mu\nu\theta}\,d\theta+\mu\left(1-\sigma^2/2\mu\right)\int_0^t e^{\mu\nu\theta}\,d\theta=$$
$$=\ln\left(\upsilon_0\right)e^{\mu\nu\theta}\Big|_0^t+\mu^2\nu e^{\mu\nu\theta}\left[\frac{\theta}{\mu\nu}-\frac{1}{\left(\mu\nu\right)^2}\right]\Bigg|_0^t+\frac{1}{\nu}\left(1-\frac{\sigma^2}{2\mu}\right)e^{\mu\nu\theta}\Big|_0^t=\left[\ln\left(\upsilon_0\right)-\sigma^2/2\mu\nu\right]\left(e^{\mu\nu t}-1\right)+\mu t e^{\mu\nu t}.$$

Таким образом,

$$\ln\left(S_t\right)e^{\mu\nu t}=\ln\left(S_0\right)+\left[\ln\left(\upsilon_0\right)-\sigma^2/2\mu\nu\right]\left(e^{\mu\nu t}-1\right)+\mu t e^{\mu\nu t}+\int_0^t\sigma e^{\mu\nu\theta}\,dW_\theta. \tag{П4}$$

Если в начальный момент времени стохастический процесс и тренд находятся в одной точке $\left(\upsilon_0=S_0\right)$, то

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)=\left[\mu-\frac{\sigma^2}{2\mu\nu}\times\frac{1-e^{-\mu\nu t}}{t}\right]t+\int_0^t\sigma e^{-\mu\nu(t-\theta)}\,dW_\theta, \tag{П5}$$

из этого следует, что

$$S_t=S_0\exp\left\{\left[\mu-\frac{\sigma^2}{2\mu\nu}\times\frac{1-e^{-\mu\nu t}}{t}\right]t+\int_0^t\sigma e^{-\mu\nu(t-\theta)}\,dW_\theta\right\}. \tag{П6}$$

Дисперсия стохастического процесса (П5) равна

$$\mathrm{D}\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right]=\int_0^t\left[\sigma\,\mathrm{e}^{-\mu\nu(t-\theta)}\right]^2 d\theta=\frac{\sigma^2\,\mathrm{e}^{-2\mu\nu t}}{2\mu\nu}\mathrm{e}^{2\mu\nu\theta}\Big|_0^t=\frac{\sigma^2\,\mathrm{e}^{-2\mu\nu t}}{2\mu\nu}\left(\mathrm{e}^{2\mu\nu t}-1\right)=\frac{\sigma^2}{2\mu\nu}\left(1-\mathrm{e}^{-2\mu\nu t}\right). \qquad (\text{П7})$$

При рассмотрении промежутка времени $[t, t+T]$ из уравнения (П5) получаем

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{S_{t+T}}{S_t}\right)&=\left\{\mu(t+T)-\frac{\sigma^2}{2\mu\nu}\left[1-\mathrm{e}^{-\mu\nu(t+T)}\right]+\int_0^{t+T}\left[\sigma\,\mathrm{e}^{-\mu\nu(t+T-\theta)}\right]dW_\theta\right\}-\\&-\left\{\mu t-\frac{\sigma^2}{2\mu\nu}\left[1-\mathrm{e}^{-\mu\nu t}\right]+\int_0^t\left[\sigma\,\mathrm{e}^{-\mu\nu(t-\theta)}\right]dW_\theta\right\}=\\&=\mu T-\frac{\sigma^2}{2\mu\nu}\,\mathrm{e}^{-\mu\nu t}\left(1-\mathrm{e}^{-\mu\nu T}\right)-\int_0^t\left[\sigma\left(1-\mathrm{e}^{-\mu\nu T}\right)\mathrm{e}^{-\mu\nu(t-\theta)}\right]dW_\theta+\int_t^{t+T}\left[\sigma\,\mathrm{e}^{-\mu\nu(t+T-\theta)}\right]dW_\theta.\end{aligned} \qquad (\text{П8})$$

Дисперсия этого процесса равна сумме дисперсий двух независимых случайных величин

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\left[\ln\left(\frac{S_{t+T}}{S_t}\right)\right]&=\int_0^t\left[\sigma^2\left(1-\mathrm{e}^{-\mu\nu T}\right)^2\mathrm{e}^{-2\mu\nu(t-\theta)}\right]d\theta+\int_t^{t+T}\left[\sigma^2\,\mathrm{e}^{-2\mu\nu(t+T-\theta)}\right]d\theta=\\&=\frac{\sigma^2}{2\mu\nu}\left[\left(1-\mathrm{e}^{-2\mu\nu t}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\mu\nu T}\right)^2+\left(1-\mathrm{e}^{-2\mu\nu T}\right)\right].\end{aligned} \qquad (\text{П9})$$

При отсутствии реверсии ($\nu = 0$) уравнение (П1) принимает вид дифференциального уравнения для геометрического броуновского движения

$$dS_t=\mu S_t\,dt+\sigma S_t\,dW_t, \qquad (\text{П10})$$

решением которого является стохастический процесс, описываемый уравнением (1). Таким образом, геометрическое броуновское движение можно считать частным случаем геометрического реверсивного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

Белых В.В. (2018а). Стохастический анализ безубыточности компании // *Корпоративные финансы*. Т. 16. № 2. С. 20–34. [**Belykh V.V.** (2018a). Stochastic analysis of the break-even of the enterprise. *Journal of Corporate Finance Research*, 16, 2, 20–34 (in Russian).]

Белых В.В. (2018б). Стохастическая модель операционного цикла // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Менеджмент*. Т. 17. Вып. 3. С. 329–358. [**Belykh V.V.** (2018b). Stochastic model of the operating cycle. *Vestnik of Saint Petersburg University. Management*, 17, 3, 329–358 (in Russian).]

Блум Н. (2016). Изменчивость уровня неопределенности в экономике // *Вопросы экономики*. № 4. С. 30–55. [**Bloom N.** (2014). Fluctuations in uncertainty. *Journal of Economic Perspectives,* 28, 2, 153–176 (in Russian).]

Бухвалова В.В., Петрусевич А.В. (2011). Определение оптимальных объемов производства в условиях информационной неопределенности спроса // *Экономика и математические методы*. Т. 47. № 2. С. 3–23. [**Bukhvalova V.V., Petrusevich A.V.** (2011). Determination of the optimal production output under informational uncertainty of demand. *Economics and the Mathematical Methods*, 47, 2, 3–23 (in Russian).]

Пестунов А.И. (2015). Предварительная оценка минимального числа раундов легковесных шифров для обеспечения их удовлетворительных статистических свойств. В кн.: *Прикладная дискретная математика. Приложение*. № 8. С. 66–68. [**Pestunov A.I.** (2015). *Applied discrete mathematics. Supplement*, 8, 66–68 (in Russian).]

Степанов С.С. (2011). Пластичность волатильности. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://synset.com/pdf/volatility.pdf [**Stepanov S.S.** (2011). The plasticity of volatility. Available at: http://synset.com/pdf/volatility.pdf (in Russian).]

Субботин А.В. (2009). Моделирование волатильности: от условной гетероскедастичности к каскадам на множественных горизонтах // *Прикладная эконометрика*. Т. 15. № 3. С. 94–138. [**Subbotin A.V.** (2009). Volatility

models: From conditional heteroscedasticity to cascades at multiple horizons. *Applied Econometrics,* 15, 3, 94–138 (in Russian).]

Суслов В.И., Ибрагимов Н.М., Талышева Л.П., Цыплаков А.А. (2005). Эконометрия. Новосибирск: СО РАН. [**Suslov V.I., Ibragimov N.M., Talysheva L.P., Cyplakov A.A.** (2005). *Econometrics*. Novosibirsk: SO RAN (in Russian).]

Царьков И.Н. (2011). Операционный денежный поток в компании: планирование в условиях неопределенности // *Проблемы теории и практики управления*. № 10. С. 40–52. [**Tsarkov I.N.** (2011). Operational cash flow of a company: Planning in conditions of uncertainty. *The International Journal Theoretical and Practical Aspects of Management,* 10, 40–52 (in Russian).]

Ширяев А.Н. (2016). Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты, модели. М.: МЦНМО. [**Shiryaev A.N.** (2016). *Fundamentals of stochastic financial mathematics*, 1. Data, models. Moscow: MCNMO (in Russian).]

Andersen T.G., Benzoni L. (2010). Do bonds span volatility risk in the U.S. treasury market? A specification test for affine term structure models. *The Journal of Finance,* 65, 2, 603–653.

Black F., Scholes M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637–654.

Fernandez P. (2002). Valuing real options: Frequently made errors. *IESE research paper No. 455.*

Henderson D., Plaschko P. (2006). *Stochastic differential equations in science and engineering*. Singapore: World Scientific.

Hull J.C. (2003). *Options, futures, and other derivatives*. Boston: Prentice-Hall.

Richards V.D., Laughlin E.J. (1980). A cash conversion cycle approach to liquidity analysis. *Financial Management,* 9 (1), 32–38.

Rountree B., Weston J.P., Allayannis G. (2008). Do investors value smooth performance? *Journal of Financial Economics*, 90, 237–251.

Samuelson P.A. (1965). Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 6, 13–31.

Schofield N.C., Bowler T. (2011). *Trading the fixed income, inflation and credit markets: A relative value guide*. Chichester: John Willey & Sons, Ltd.

Van Horne J.C. (1998). *Financial management and policy*. 12th ed. New Jersey: Prentice-Hall.

A mathematical model of company revenue under demand uncertainty

© 2020 V.V. Belykh

V.V. Belykh,
Novosibirsk State University of Economics and Management, e-mail: v.v.belykh@gmail.com

Received 17.12.2018

Abstract. The study of volatility is one of the topical areas within the field of econometrics. In this study we focus on an enterprise operating in conditions of economic uncertainty, for which we propose a stochastic revenue model based on the reverting process. Such a model has an advantage over models based on geometric Brownian motion, correctly conveying the temporal dynamics of the standard deviation of the logarithm of the revenue growth rate. The accuracy of the model is confirmed by empirical data presented in this work. Stochastic constants are interpreted from the point of view of financial management, giving an opportunity to take a fresh look at the objectives associated with the management of the operating activities of an enterprise. It is shown that the reverting revenue model (as an instrument of current planning) in combination with the concept of sustainable growth (as an integral part of strategic planning) provides a good basis for developing an enterprise management technique under conditions of uncertainty of demand. This study provides equations for calculations of the numerical characteristics of a reverting process that facilitate the operational planning procedure. In this respect, obtained results can be considered as a contribution to the theory of financial management of an enterprise, which is still largely based on the concept of the deterministic nature of demand for goods and services.

Keywords: uncertainty, revenue generation, geometric Brownian motion, reverting process, revenue growth rate, operating cycle, sustainable growth.

JEL Classification: C67, G31, M21.

DOI: 10.31857/S042473880008560-5